Geometria Diferencial II

Jose Antonio Verderesi

Sumário

Introdução

Um campo de vetores no $\mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sua diferencial em $p \in \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear $de_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Se

$$e(p) = (a_1(p), a_2(p), a_3(p))$$

então

$$de_p = (da_1)_p e_1 + (da_2)_p e_2 + (da_3)_p e_3$$

onde (e_1, e_2, e_3) é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Considere agora três campos de vetores

$$e_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad i = 1, 2, 3$$

tais que, para cada ponto p, $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ seja uma base do $\mathbb{R}^3$. A terna (e_1, e_2, e_3) é chamada um *referencial movel* no $\mathbb{R}^3$.

Seja $(\theta_p^1, \theta_p^2, \theta_p^3)$ a base dual, isto é

$$\theta_p^i(e_j(p)) = \delta_j^i$$

Se $v \in \mathbb{R}^3$, então

$$v = \theta_p^1(v)e_1(p) + \theta_p^2(v)e_2(p) + \theta_p^3(v)e_3(p)$$

Assim, para cada $p \in \mathbb{R}^3$, $(\theta_p^1(v), \theta_p^2(v), \theta_p^3(v))$ são as coordenadas de v na base $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$.

Diferenciando os campos $e_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ temos

$$(de_i)_p = \omega_i^1(p)e_1(p) + \omega_i^2(p)e_2(p) + \omega_i^3(p)e_3(p)$$

Desta forma, obtemos uma matriz de 1-formas $(\omega_j^i(p))$ para cada $p \in \mathbb{R}^3$. Estas são chamadas de *formas de conexão relativas ao referencial* (e_1, e_2, e_3).

Suponhamos, agora, que para cada p, $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ seja ortonormal (isto é, que $\langle e_i(p), e_j(p)\rangle = \delta_{ij}$). Então, para $v \in \mathbb{R}^3$,

$$||v||_p^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2 + \theta_p^3(v)^2$$

e o produto interno de u por v é dado por

$$\langle u, v\rangle_p = \theta_p^1(u)\theta_p^1(v) + \theta_p^2(u)\theta_p^2(v) + \theta_p^3(u)\theta_p^3(v)$$

ou abreviadamente

$$\langle\ ,\ \rangle_p = (\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2 + (\theta_p^3)^2$$

Diferenciando $\langle e_i(p), e_j(p)\rangle = \delta_{ij}$ obtemos

$$\langle de_i(p), e_j(p)\rangle + \langle e_i(p), de_j(p)\rangle = 0$$

Substituindo $de_i(p)$, obtemos

$$\omega_j^i(p) + \omega_i^j(p) = 0$$

Assim, a matriz $(\omega_j^i(p))$ é anti-simétrica.

Se $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um novo campo de vetores, podemos decompô-lo no referencial $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$:

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p) + X^3(p)e_3(p)$$

Sua diferencial é dada por

$$dX_p = (dX^1)_p e_1(p) + (dX^2)_p e_2(p) + (dX^3)_p e_3(p) + X_p^1(de_1)_p + X_p^2(de_2)_p + X_p^3(de_3)_p$$

Substituindo $(de_i)_p$, obtemos

$$dX_p = \sum_{i=1}^{3}\left((dX^i)_p + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^i(p)X_p^j\right)e_i(p)$$

Concluímos que para calcularmos dX_p basta conhecer as formas de conexão.

Nos cursos de cálculo, utilizamos em geral os campos constantes

$$\begin{cases} e_1(p) &= e_1 \\ e_2(p) &= e_2 \\ e_3(p) &= e_3 \end{cases}$$

Para estes, as formas de conexão são nulas (isto é, $\omega_j^i = 0$). Dizemos então que o referencial é *paralelo*.

Num referencial paralelo, a diferencial do campo X é a fórmula familiar

$$dX_p = (dX^1)_p e_1 + (dX^2)_p e_2 + (dX^3)_p e_3$$

Vejamos o que acontece quando trabalhamos com coordenadas cilíndricas no $\mathbb{R}^3$. Para cada ponto p, associamos os números $(r(p), \theta(p), z(p))$ que se relacionam com as coordenadas cartesianas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}$$

Os campos cilíndricos são

$$\begin{cases} e_1 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ e_2 &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ e_3 &= (0,0,1) \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{cases} de_1 &= ((-\sin\theta)d\theta, (\cos\theta)d\theta, 0) = d\theta e_2 \\ de_2 &= ((-\cos\theta)d\theta, (-\sin\theta)d\theta, 0) = -d\theta e_1 \\ de_3 &= 0 \end{cases}$$

Então $\omega_1^2(p) = d\theta_p$ e $\omega_2^1 = -d\theta_p$, as outras sendo nulas.

Considere agora uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e um referencial ortonormal (e_1, e_2, e_3) tal que $e_1(p)$ e $e_2(p)$ são tangentes a S no ponto p. Claramente, $e_3(p)$ é um vetor normal a S no ponto p.

Observe que se o referencial é paralelo, então a superfície S é um plano. Assim, para a geometria, é necessário trabalhar com referenciais não paralelos, ou seja, com campos $e_i(p)$ que variam com p.

Se T_pS é o plano tangente a S no ponto p, então

$$v \in T_pS \Leftrightarrow \theta_p^3(v) = 0$$

A equação geral do plano T_pS é $\theta_p^3 = 0$.

Como o referencial é ortonormal, se $v \in T_pS$, então

$$||v||^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2$$

Assim, para calcularmos comprimentos sobre S, basta conhecermos

$$(\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2$$

Toda a geometria de S está contida nas formas (θ^1, θ^2) e nas formas $(\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3)$ obtidas diferenciando o referencial "adaptado" a S:

$$\begin{cases} de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases}$$

(Lembre-se de que (ω^i_j) é anti-simétrica!)

$$(\omega^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ \omega^2_1 & 0 & \omega^2_3 \\ \omega^3_1 & \omega^3_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega^i_j = -\omega^j_i$$

Seja X um campo de vetores tal que $X(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$. Então

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Diferenciando, obtemos

$$dX_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + X^1(p)(de_1)_p(v) + X^2(p)(de_2)_p(v)$$

Substituindo $(de_i)_p(v)$, obtemos:

$$\begin{aligned} dX_p(v) &= (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega^2_1)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)) + \\ &+ ((\omega^3_1)_p(v)X^1(p) + (\omega^3_2)_p(v)X^2(p))e_3(p) \end{aligned}$$

Em geral, vemos que $dX_p(v)$ não é tangente a S no ponto p. A componente tangencial de $dX_p(v)$ é chamada a *derivada covariante* de X em p e é denotada por $\nabla_p X$. Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega^2_1)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

Portanto, $(\nabla X)_p(v)$ pode ser calculada a partir da forma $\omega = \omega^2_1 = -\omega^1_2$, a qual é denominada a *forma de conexão de* S.

É comum denotar a derivada covariante de X em p na direção v por $(\nabla_v X)_p$. Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (\nabla_v X)_p$$

Isto é análogo a

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

$(\nabla X)_p(v)$ tem duas componentes, a saber

$$T = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p)$$

$$R = \omega_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

A componente T é obtida diferenciando o campo $X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$ como se $e_1(p)$ e $e_2(p)$ fossem constantes. Assim, T mede a taxa de variação "translacional" do campo X na direção v a partir do ponto p. A componente R é obtida diferenciando X como se suas componentes $X^1(p)$ e $X^2(p)$ fossem constantes. Observe que o vetor

$$X(p)^\perp = -X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)$$

é ortogonal ao vetor

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Assim, $R = \omega_p(v)X(p)^\perp$ e, portanto, ω é a velocidade de rotação do referencial no ponto p na direção v. Em particular, se tomarmos $X(p) = e_1(p)$ ou $X(p) = e_2(p)$, obtemos

$$\begin{cases} (\nabla e_1)_p(v) & = & \omega_p(v)e_2(v) \\ (\nabla e_2)_p(v) & = & -\omega_p(v)e_1(p) \end{cases}$$

Abreviadamente,

$$\nabla(e_1, e_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\nabla e = e\omega$$

ω é a velocidade angular do referencial $e = (e_1, e_2)$ sobre a superfície.

A partir da derivada covariante, definimos paralelismo e geodésicas:

- um campo X é *paralelo* se $\nabla X = 0$;
- uma curva $c : I \to S$ é uma geodésica se $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

Vamos, a seguir, interpretar as formas ω_1^3 e ω_2^3.

O campo e_3 é normal a S. Assim, a variação deste campo diz como a superfície se curva. Se e_3 for constante, a superfície S é um plano. Portanto, $(de_3)_p(v)$ deve, de alguma forma, medir como S se curva na direção v:

$$(de_3)_p(v) = \omega_3^1(v)e_1(p) + \omega_3^2(v)e_2(p)$$

Se designarmos por $A_p(v) = -(de_3)_p(v)$, então $A_p : T_pS \to T_pS$ é uma aplicação linear. Por exemplo, se S é um plano, então $e_3(p) = n$ é constante. Logo, $A_p(v) = -(de_3)_p(v) = 0$.

Se S é a esfera de raio R, então

$$e_3(p) = \frac{p}{||p||} = \frac{p}{R}$$

Segue que $(de_3)_p(v) = v/R$ e, portanto,

$$A_p(v) = -\frac{v}{R}$$

Como veremos, a aplicação linear $A_p : T_pS \to T_pS$ é simétrica, isto é,

$$\langle A_p(u), v\rangle = \langle u, A_p(v)\rangle$$

A *segunda forma fundamental* de S em p é definida por

$$b_p(u, v) = \langle A_p(u), v\rangle = \langle u, A_p(v)\rangle$$

que é bilinear e simétrica. Lembrando que

$$u = \theta_p^1(u)e_1(p) + \theta_p^2(u)e_2(p)$$

e

$$A_p(v) = \omega_1^3(v)e_1(p) + \omega_2^3(v)e_2(p)$$

temos

$$b(u,v) = \omega_1^3(u)\theta^1(v) + \omega_2^3(u)\theta^2(v)$$

A *primeira forma fundamental* é o produto interno

$$\langle u, v\rangle = \theta^1(u)\theta^1(v) + \theta^2(u)\theta^2(v)$$

O teorema fundamental das superfícies no $\mathbb{R}^3$ diz que a primeira e a segunda formas fundamentais determinam S a menos de uma isometria do $\mathbb{R}^3$.

A primeira forma fundamental permite calcular o comprimento de curvas sobre a superfície S. Já a segunda forma fundamental estabelece a forma da superfície dentro do $\mathbb{R}^3$.

Os aspectos geométricos que dependem apenas da primeira forma são denominados *intrínsecos*. Aqueles que dependem também da segunda forma são chamados *extrínsecos*.

Por exemplo, o elemento de área

$$dA = \theta^1 \wedge \theta^2$$

é intrínseco à superfície S.

Um outro exemplo é a forma de conexão ω. A forma ω só depende da primeira forma fundamental.

A aplicação linear $A_p : T_pS \to T_pS$ é simétrica e, portanto, diagonalizável. Sejam λ_1 e λ_2 seus valores próprios. A *curvatura gaussiana* é definida por

$$K_p = \det A_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

e a *curvatura média* é definida por

$$H_p = \frac{\operatorname{tr} A_p}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

O seguinte teorema relaciona a curvatura gaussiana e a forma de conexão. Ele diz que

$$d\omega = KdA$$

Como $d\omega$ só depende da primeira forma fundamental, assim como dA, segue que K também só depende da primeira forma fundamental. Isto foi provado primeiramente por Gauss e deu origem ao que hoje conhecemos como Geometria Diferencial.

Por outro lado, a curvatura média é um invariante extrínseco da superfície S. Por exemplo, um pedaço de um plano e de um cilindro são isométricos e, portanto, suas curvaturas gaussianas são nulas, mas suas curvaturas médias são diferentes. Para o plano, $A_p = 0$. Logo, $K_p = \det A_p = 0$ e $H_p = (\operatorname{tr} A_p)/2 = 0$. Para o cilindo, A_p tem valores próprios $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Logo, $K_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ e $H_p = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = \lambda_2/2 \neq 0$.

CAPíTULO 1

Formas diferenciais

O objetivo deste capítulo é definir formas diferenciais num espaço vetorial real de dimensão finita.

1. Formas lineares

No que segue V é um espaço vetorial real de dimensão finita n e $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma base de V. O espaço dual de V será denotado por V^*. Este é formado das funções lineares $\omega : V \to \mathbb{R}$ que serão chamadas de *formas lineares sobre* V ou simplesmente formas lineares. Se $v \in V$ seja $x^i(v)$ a i-ésima coordenada de v na base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Então

$$v = \sum_{i=1}^{n} x^i(v) e_i$$

$(x^1, x^2, \ldots x^n)$ constitui uma base de V^* chamada de base dual da base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Note que se $\omega \in V^*$ então

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i) x^i$$

A aplicação $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(v) = (x^1(v), x^2(v), \ldots x^n(v))$ constitui um *sistema de coordenadas linear sobre V.*

Exemplo 1.1. *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* (x^1, x^2, x^3) *a base de* $(\mathbb{R}^3)^*$ *dual da base canônica do* $\mathbb{R}^3$*. Se* $\omega \in V^*$*, então*

$$\omega = ax^1 + bx^2 + cx^3$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Logo,*

$$\ker \omega = \{v \in \mathbb{R}^3 : ax^1(v) + bx^2(v) + cx^3(v) = 0\}.$$

Se $\omega \neq 0$*, então* $\ker \omega$ *é o plano normal ao vetor* (a, b, c) *que passa pela origem. Reciprocamente, se* S *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *cuja dimensão é 2, então existe* $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ *tal que* $\ker \omega = S$*. O conjunto*

$$S^0 = \{\omega \in (\mathbb{R}^3)^* : \ker \omega \supset S\}$$

é um subespaço de $(\mathbb{R}^3)^*$ *de dimensão 1, denominado o* anulador *de* S*.*

Exemplo 1.2. *Seja* $v \in V$*. A função*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v : & V^* & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & \omega(v) \end{array}$$

é uma forma linear de V^* *e a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & (V^*)^* \\ v & \mapsto & \varphi_v \end{array}$$

é um isomorfismo entre V *e* $(V^*)^*$*.*

Exemplo 1.3. *Seja* $a \in V$*. Se* $\langle\ ,\ \rangle$ *é um produto interno em* V*, a função*

$$\begin{array}{rccc} \omega_a : & V & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \langle a, v\rangle \end{array}$$

é uma forma linear de V *e a aplicação*

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ a & \mapsto & \omega_a \end{array}$$

é um isomorfismo.

2. Permutações

Denotaremos por S_n o grupo das permutações (isto é, bijeções) do conjunto $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Considere a função polinomial em n variáveis

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

Para cada $\sigma \in S_n$, defina

$$(\sigma\phi)(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

Observe que

$$\sigma\phi = \epsilon_\sigma \phi$$

onde $\epsilon_\sigma \in \{-1, 1\}$. O número ϵ_σ é denominado o *sinal* da permutação σ.

Note que $\epsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ é um homomorfismo de grupos. O núcleo de ϵ é denomindo *grupo alternado* e é denotado por A_n. Note que A_n um subgrupo normal de S_n.

Exemplo 1.4. *Se* $n = 2$*, então* $\phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2$*. O grupo* S_2 *tem apenas dois elementos: a identidade e a transposição* $(1\ 2)$*, as quais têm sinais 1 e -1 respectivamente.*

EXEMPLO 1.5. *Se $n = 3$, então $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$. O grupo S_3 tem seis elementos: as transposições $(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)$ com sinais -1 e, também, os 3-ciclos $(1\ 2\ 3)$ e $(1\ 3\ 2)$ e a identidade, estes com sinais 1.*

3. Aplicações multilineares

Sejam $V_1, \ldots, V_k$ e W espaços vetoriais reais de dimensão finita e $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_k \to W$. Dizemos que φ é uma *aplicação k-linear* se, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, as seguintes condições estão satisfeitas

$$\begin{array}{rcl} \varphi(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_k) & = & \lambda\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \\ \varphi(v_1, \ldots, u_i + v_i, \ldots, v_k) & = & \varphi(v_1, \ldots, u_i, \ldots, v_k) \ + \ \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) \end{array}$$

quaisquer que sejam $v_1 \in V_1, \ldots, v_k, \in V_k$, $u_i \in V_i$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se $V_1 = \ldots = V_k = V$, dizemos que φ é uma *aplicação k-linear de V em W*. Se, além disso, $W = \mathbb{R}$ dizemos que φ é uma *função k-linear de V*.

Seja $\varphi : V^k \to W$ uma aplicação k-linear de V em W. Dizemos que φ é *alternada* (respectivamente, *simétrica*) se para cada $\sigma \in S_k$, $\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \epsilon_\sigma \varphi(v_1, \ldots, v_k)$ (respectivamente, $\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \varphi(v_1, \ldots, v_k)$). Como toda permutação é um produto de transposições, esta condição é equivalente a

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

(respectivamente $\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$)

EXEMPLO 1.6. *O produto vetorial no $\mathbb{R}^3$*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 \wedge v_2 \end{array}$$

é uma aplicação bilinear (isto é, 2-linear) alternada de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 1.7. *Um produto interno em V*

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) & \mapsto & \langle v_1, v_2 \rangle \end{array}$$

é uma função bilinear simétrica de V.

EXEMPLO 1.8. *A função determinante no $\mathbb{R}^n$*

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \det(x^i(v_j))$$

onde (x^i) *é a base dual da base canônica do* $\mathbb{R}^n$ *e*

$$(x^i(v_j)) = \begin{pmatrix} x^1(v_1) & \dots & x^1(v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n(v_1) & \dots & x^n(v_n) \end{pmatrix}$$

é uma função n-linear alternada.

Exemplo 1.9. *Uma estrutura complexa em* V *é uma aplicação linear* $J : V \to V$ *tal que* $J^2 = -I$*, onde* I *denota o operador identidade de* V*. Se* $\langle\ ,\ \rangle$ *é um produto interno em* V *e* J *é uma isometria com respeito a este produto interno, então*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \langle u, J(v)\rangle \end{array}$$

é uma função bilinear alternada de V*.*

Uma função k-linear alternada de V é denominada uma *k-forma linear* de V ou, simplesmente, uma *k-forma* de V. Denotaremos por $\bigwedge^k(V^*)$ o espaço das k-formas de V. O conjunto das k-formas de V, munido da soma e da multiplicação por escalar usuais de funções, é um espaço vetorial. O espaço das funções k-lineares simétricas de V será designado por $S^k(V^*)$.

Proposição 1.10. *Se* $\varphi : V^k \to \mathbb{R}$ *é uma k-forma e* $v_1, \dots, v_k \in V$ *linearmentes dependentes, então* $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Demonstração. Um dos vetores é combinação linear dos demais, por exemplo

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

Como $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_1) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_2) = \ldots = \varphi(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k-1}) = 0$ então $\varphi(v_1, \dots, v_k) = 0$. □

Observe que $\bigwedge^1(V^*) = V^*$. Da proposição anterior vem que $\bigwedge^k(V^*) = \{0\}$ se $k > n$.

Exemplo 1.11. *Sejam* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$*. Se*

$$\eta(u,v) = \det(a,u,v)$$

onde

$$\det(a,u,v) = \det \begin{pmatrix} a^1 & x^1(u) & x^1(v) \\ a^2 & x^2(u) & x^2(v) \\ a^3 & x^3(u) & x^3(v) \end{pmatrix}$$

então $\eta \in \bigwedge^2(V^*)$*. Veremos adiante que estas esgotam todas as possibilidades de 2-formas no* $\mathbb{R}^3$*.*

4. Produto exterior de 1-formas

Sejam $\omega^1, \ldots, \omega^k \in V^*$. O *produto exterior* de $\omega^1, \ldots, \omega^k$ é a função $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k : V^k \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j))$$

EXEMPLO 1.12. *Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $k = 2$, $\omega^1 = x^1$ e $\omega^2 = x^2$. Se $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, então*

$$(x^1 \wedge x^2)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} x^1(v_1) & x^1(v_2) \\ x^2(v_1) & x^2(v_2) \end{pmatrix}$$

Geometricamente, $(x^1 \wedge x^2)(v_1, v_2)$ é a área orientada da projeção do paralelogramo gerado pelos vetores v_1 e v_2 no plano x^1x^2.

PROPOSIÇÃO 1.13.

(1) $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$ é uma k-forma de V;
(2) $\omega^{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \omega^{\sigma(k)} = \epsilon_\sigma \cdot \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$, qualquer que seja $\sigma \in S_k$;
(3) se $\{\omega^1, \ldots, \omega^k\}$ é l.d. então $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = 0$;
(4) se $\{\omega^1, \ldots, \omega^k\}$ é l.i. então $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Os três primeiros itens seguem do fato que as formas ω_i são lineares e das proriedades da função determinante.

Se $\{\omega^1, \ldots, \omega^k\}$ é l.i. então existem $\omega^{k+1}, \ldots, \omega^n \in V^*$ tais que $\{\omega^1, \ldots, \omega^k, \omega^{k+1}, \ldots, \omega^n\}$ é uma base de V^*. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a base de V da qual $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ é dual. Temos que

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega^i(v_j)) = \det I_k = 1$$

onde I_k denota a matriz identidade de dimensão k. Portanto $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \neq 0$. □

A seguir, vamos determinar uma base de $\bigwedge^k(V^*)$ a partir de uma base de V. Comecemos introduzindo algumas definições para facilitar a escrita. Dada uma sequência $(i_1, \ldots, i_k)$, onde $0 \leq i_j \leq n$ abreviaremos colocando $I = (i_1, \ldots, i_k)$ e $\omega^I = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}$. Consideremos também o conjunto $C_{n,k}$ das sequências tais que $(0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots, \leq i_k \leq n)$. O número de elementos de $C_{n,k}$ é $\binom{n}{k}$.

PROPOSIÇÃO 1.14. *Se $(x^1, \ldots, x^n)$ é uma base de V^* então*

$$\{x^I\}_{I \in C_{n,k}} = \{x^{i_1} \wedge x^{i_2} \ldots \wedge x^{i_k}\}_{(i_1, \ldots, i_k) \in C_{n,k}}$$

é uma base de $\bigwedge^k(V^*)$. Se $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ então

$$\omega = \sum_{I \in C_{n,k}} \omega(e_I) x^I$$

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a demonstração para $n = 3$. Por hipótese, $\{x^1, x^2, x^3\}$ é uma base de $V^* = \bigwedge^1(V^*)$.

Mostremos que $\{x^1 \wedge x^2, x^1 \wedge x^3, x^2 \wedge x^3\}$ é uma base de $\bigwedge^2(V^*)$. Se

$$a_{12}x^1 \wedge x^2 + a_{13}x^1 \wedge x^3 + a_{23}x^2 \wedge x^3 = 0$$

calculando em (e_1, e_2) concluímos que $a_{12} = 0$. Da mesma forma, concluímos que $a_{13} = a_{23} = 0$. Seja $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$. Então

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2) \quad = \quad & \omega(e_1, e_2)x^1(v_1)x^2(v_2) + \omega(e_2, e_1)x^2(v_1)x^1(v_2) + \\ & \omega(e_1, e_3)x^1(v_1)x^3(v_2) + \omega(e_3, e_1)x^3(v_1)x^1(v_2) + \\ & \omega(e_2, e_3)x^2(v_1)x^3(v_2) + \omega(e_3, e_2)x^3(v_1)x^2(v_2) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2) \quad = \quad & \omega(e_1, e_2)(x^1(v_1)x^2(v_2) - x^2(v_1)x^1(v_2)) + \\ & \omega(e_1, e_3)(x^1(v_1)x^3(v_2) - x^3(v_1)x^1(v_2)) + \\ & \omega(e_2, e_3)(x^2(v_1)x^3(v_2) - x^3(v_1)x^2(v_2)) \end{aligned}$$

pois ω é alternada. Logo,

$$\omega = \omega(e_1, e_2)x^1 \wedge x^2 + \omega(e_1, e_3)x^1 \wedge x^3 + \omega(e_2, e_3)x^2 \wedge x^3.$$

De forma semelhante, mostramos que $\{x^1 \wedge x^2 \wedge x^3\}$ é uma base de $\bigwedge^3(V^*)$. $\square$

COROLÁRIO 1.15. *Se $k \in \{1, \ldots, n\}$, então* $\dim \bigwedge^k(V^*) = \binom{n}{k}$.

5. Produto exterior

Sejam $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ e $\eta \in \bigwedge^r(V^*)$.

O *produto exterior* de ω por η é a função $\omega \wedge \eta : V^{k+r} \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+r}) = \frac{1}{k!r!} \sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+r)})$$

OBSERVAÇÃO 1.16. *Se $S_{r,k} = \{\sigma \in S_{k+r} : \sigma(1) < \ldots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \ldots < \sigma(k+r)\}$ então*

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+r}) = \sum_{\sigma \in S_{k,r}} \epsilon_\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+r)})$$

PROPOSIÇÃO 1.17. *Sejam $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, $\eta \in \bigwedge^r(V^*)$ e $\varphi \in \bigwedge^s(V^*)$.*

(1) $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{k+r}(V^*)$;
(2) $(\omega + \eta) \wedge \varphi = (\omega \wedge \varphi) + (\eta \wedge \varphi)$;
(3) $\eta \wedge \omega = (-1)^{kr} \omega \wedge \eta$;

(4) *se* $\omega = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$ *e* $\eta = \omega^{k+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k+r}$ *onde* $\omega^i \in V^*$ *então* $\omega \wedge \eta = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k \wedge \omega^{k+1} \wedge \ldots \wedge \omega^{k+r}$ *(isto é, o produto exterior acima coincide com o produto exterior de 1-formas anteriormente definido);*

(5) $(\omega \wedge \eta) \wedge \varphi = \omega \wedge (\eta \wedge \varphi)$.

Demonstração.

(1) Temos que $(\omega \wedge \eta)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k+r)})$ é igual a

$$\frac{1}{k!r!} \sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\sigma \omega(v_{\tau(\sigma(1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma(k))}) \eta(v_{\tau(\sigma(k+1))}, \ldots, v_{\tau(\sigma(k+r))}).$$

Fazendo a mudança $\varphi = \tau \circ \sigma$, obtemos $\sigma = \tau^{-1} \circ \varphi$ e $\epsilon_\sigma = \epsilon_\varphi \epsilon_{\tau^{-1}} = \epsilon_\varphi \epsilon_\tau$. Assim:

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(k+r)}) &= \tfrac{1}{k!r!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\tau \epsilon_\varphi \omega(v_{\varphi(1)}, \ldots, v_{\varphi(k)}) \eta(v_{\varphi(k+1)}, \ldots, v_{\varphi(k+r)}) \\ &= \epsilon_\tau (\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+r})\end{aligned}$$

o que demonstra a primeira parte.

(2) A demonstração é uma consequência da distributividade dos números reais.

(3) Considere a permutação

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & r & r+1 & \ldots & r+k \\ k+1 & \ldots & k+r & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

Observe que $\epsilon_\tau = (-1)^{kr}$. Logo,

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+r}) &= \tfrac{1}{k!r!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+r)}) \\ &= \tfrac{1}{k!r!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\sigma \eta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+r)}) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!r!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_{k+r}} \epsilon_\sigma \eta(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(r))}) \omega(v_{\sigma(\tau(r+1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(r+k))})\end{aligned}$$

Fazendo como anteriormente a mudança $\varphi = \sigma \circ \tau$ obtemos

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \ldots, v_{k+r}) = \epsilon_\tau (\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+r}) = (-1)^{kr} (\eta \wedge \omega)(v_1, \ldots, v_{k+r})$$

(4) Para fixarmos as ideias, tomemos $k = 1$ e $r = 2$. Assim, $\omega = \omega^1$ e $\eta = \omega^2 \wedge \omega^3$. Então $(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3)(v_1, v_2, v_3) = \det(\omega^i(v_j))$. Desenvolvendo o determinante pela primeira linha temos:

$$\begin{aligned}(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3)(v_1, v_2, v_3) &= \omega^1(v_1)(\omega^2 \wedge \omega^3)(v_2, v_3) - \omega^1(v_2)(\omega^2 \wedge \omega^3)(v_1, v_3) + \omega^1(v_3)(\omega^1 \wedge \omega^3)(v_2, v_3) \\ &= \omega^1 \wedge (\omega^2 \wedge \omega^3)(v_1, v_2, v_3) \\ &= (\omega \wedge \eta)(v_1, v_2, v_3)\end{aligned}$$

A demonstração no caso geral é uma consequência da fórmula de Laplace para a expansão do determinante.

(5) É uma consequência dos itens anteriores.

□

6. Imagem inversa de k-formas

Seja $T : W \to V$ uma aplicação linear entre os espaços vetoriais W e V. Recordamos que a *transposta* de T é a aplicação linear

$$\begin{array}{rccc} T^* : & V^* & \to & W^* \\ & \omega & \mapsto & T^*\omega \end{array}$$

onde

$$(T^*\omega)(w) = \omega(T(w))$$

qualquer que seja $w \in W$.

Se ω é uma k-forma em V, definimos a *imagem inversa* de ω por T como a função $T^*\omega : W^k \to \mathbb{R}$ dada por

$$(T^*\omega)(w_1, \dots, w_k) = \omega(T(w_1), \dots, T(w_k))$$

quaisquer que sejam $w_1, \dots, w_k \in W$.

Proposição 1.18. *Seja $T : W \to V$ uma aplicação linear. Sejam também $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, $\eta \in \bigwedge^r(V^*)$. Então:*

(1) $T^* : \bigwedge^r(V^*) \to \bigwedge^r(W^*)$ é uma aplicação linear.
(2) $T^*(\omega \wedge \eta) = T^*(\omega) \wedge T^*(\eta)$.

Demonstração. Exercício. □

Na prática, aplicar T^* significa fazer uma mudança de variáveis numa k-forma. Mais precisamente, fixemos uma base $(e_1, \dots, e_n)$ de V e seja $(x^1, \dots, x^n)$ a base dual. Se

$$\omega = \sum_{I \in C_{n,k}} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) x^{i_1} \wedge x^{i_2} \dots \wedge x^{i_k}$$

e $T : W \to V$ é dada por $T(w) = \sum_{i=1}^n T^i(w) e_i$ então $T^*(x^i) = T^i$. Assim temos:

$$\begin{array}{rcl} T^*(\omega) & = & \sum_{I \in C_{n,k}} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) T^*(x^{i_1}) \wedge T^*(x^{i_2}) \dots \wedge T^*(x^{i_k}) \\ & = & \sum_{I \in C_{n,k}} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) T^{i_1} \wedge T^{i_2} \dots \wedge T^{i_k} \end{array}$$

EXEMPLO 1.19. *Sejam* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$T(u,v) = (2u - v, u + v, u + 3v)$$

e

$$\omega = x^1 \wedge x^2 + x^2 \wedge x^3 + x^3 \wedge x^1$$

onde (x^1, x^2, x^3) *denota a base de* $(\mathbb{R}^3)^*$ *dual da base canônica do* $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x &= 2u - v \\ y &= u + v \\ z &= u + 3v \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} T^*\omega &= T^*(x^1 \wedge x^2 + x^2 \wedge x^3 + x^3 \wedge x^1) \\ &= T^*(x^1 \wedge x^2) + T^*(x^2 \wedge x^3) + T^*(x^3 \wedge x^1) \\ &= T^*x^1 \wedge T^*x^2 + T^*x^2 \wedge T^*x^3 + T^*x^3 \wedge T^*x^1 \end{aligned}$$

Se $w = (w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2$, *então*

$$\begin{aligned} T^*x^1(w) &= x^1(T(w)) = 2w^1 - w^2 \\ T^*x^2(w) &= x^2(T(w)) = w^1 + w^2 \\ T^*x^3(w) &= x^3(T(w)) = w^1 + 3w^2 \end{aligned}$$

Denotando por (x, y) *a base de* $(\mathbb{R}^2)^*$ *dual da base canônica do* $\mathbb{R}^2$, *obtemos*

$$\begin{aligned} T^*x^1 &= 2x - y \\ T^*x^2 &= x + y \\ T^*x^3 &= x + 3y \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} T^*\omega &= (2x - y) \wedge (x + y) + (x + y) \wedge (x + 3y) + (x + 3y) \wedge (2x - y) \\ &= -2x \wedge y \end{aligned}$$

7. O espaço $\bigwedge^k(V)$

Sabemos que $(V^*)^*$ identifica-se com V através da aplicação

$$\begin{aligned} V &\to (V^*)^* \\ v &\mapsto \varphi_v \end{aligned}$$

onde $\varphi_v(\omega) = \omega(v)$, qualquer que seja $\omega \in V^*$. No que segue, passaremos a escrever v para designar tanto um elemento de V quanto o seu correspondente φ_v em $(V^*)^*$. Assim, a expressão

$$v(\omega) = \varphi_v(\omega) = \omega(v)$$

onde $\omega \in V^*$ passa a fazer sentido. Isto justifica denotar o espaço $\bigwedge^k((V^*)^*)$ por $\bigwedge^k(V)$ e escrever

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)(\omega^1, \ldots, \omega^k) = \det(v_i(\omega^j)) = \det(\omega^j(v_i)).$$

8. Álgebra exterior

Temos definido acima uma operação nas formas lineares:

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k(V^*) \times \bigwedge^r(V^*) & \to & \bigwedge^{k+r}(V^*) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & \omega \wedge \eta \end{array}$$

esta induz na soma direta de espaços vetoriais

$$\bigwedge(V^*) = \overset{0}{\bigwedge}(V^*) \bigoplus \overset{1}{\bigwedge}(V^*) \bigoplus \cdots \bigoplus \overset{n}{\bigwedge}(V^*)$$

uma operação também designada por $\wedge$ e onde convencionamos que $\bigwedge^0(V^*) = \mathbb{R}$. Com estas operações $\bigwedge(V^*)$ torna-se uma álgebra associativa denominada *álgebra exterior sobre V.*

9. Orientação

Sejam $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ e $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ bases de V. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j$$

onde $a_i^1, \ldots, a_i^n \in \mathbb{R}$. Escrevemos

$$(f_i) \sim (e_i)$$

se $\det(a_i^j) > 0$. Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto das bases de V.

Uma *orientação* em V é uma classe de equivalência de $\sim$ e, portanto, orientar V significa fixar uma base (e_i) de V. As bases de V que pertencem à mesma classe de equivalência de (e_i) são denominadas *positivas*; uma base de V que não é positiva é denominada *negativa*.

Seja agora $\Delta \in \bigwedge^n(V^*)$ com $\Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) > 0$. Como

$$\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det(a_i^j)\Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

então as bases positivas são aquelas em que a n-forma Δ é positiva. Assim, fixar uma orientação é equivalente a fixar uma n-forma não nula em V.

10. Espaços com produto interno

Considere em V um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e além disto fixe uma orientação em V.

PROPOSIÇÃO 1.20. *Existe uma única* $\Delta \in \bigwedge^n(V^*)$ *tal que* $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$ *qualquer que seja* $(e_1, \ldots, e_n)$ *base ortonormal positiva de* V.

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos escolhendo uma n-forma ω tal que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = k > 0$. Tomemos então $\Delta = \frac{1}{k}\omega$ de forma que $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Se $(f_1, \ldots, f_n)$ é outra base ortonormal positiva então $\det(a_i^j) = 1$. Portanto

$$\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det(a_i^j)\Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \Delta(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$$

A unicidade segue do fato que uma n-forma fica determinada por seu valor numa base de V. □

A forma Δ estabelecida na proposição acima é chamada de *forma volume associada ao produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$. Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ o *volume do n-paralelepípedo* determinado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ é o número

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = |\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n)|$$

Fixada uma base ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ e escrevendo $v_i = \sum v_i^j e_j$ então $\Delta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \det[v_i^j]$. Como $[v_i^j]^t[v_i^j] = [\langle v_i, v_j\rangle]$ deduzimos que

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \ldots, v_n)^2 = \det[\langle v_i, v_j\rangle]$$

Isto motiva definir o *volume de um k-paralelepípedo* em V por

$$\mathrm{Vol}(v_1, v_2, \ldots, v_k)^2 = \det[\langle v_i, v_j\rangle]$$

Recordemos que num espaço com produto interno temos um isomorfismo natural entre V e V^* que a cada $a \in V$ associa a 1-forma ω_a definida por $\omega_a(v) = \langle a, v\rangle$.

Seja $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V^{n-1}$. Considere a forma linear $\omega : V \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(v) = \Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}, v)$$

qualquer que seja $v \in V$, onde Δ é dada pela Proposição 1.20. Sabemos que existe um único vetor $a \in V$ tal que $\omega(v) = \omega_a$ ou seja, tal que

$$\Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}, v) = \langle a, v\rangle$$

qualquer que seja $v \in V$. O vetor a é denominado *o produto vetorial* de $a_1, \ldots, a_{n-1}$ e será denotado por $a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$. Assim temos

$$\Delta(a_1, \ldots, a_{n-1}, v) = \langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}, v\rangle$$

Observemos que estamos usando a notação $a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}$ com dois sentidos diferentes a saber para designar o produto vetorial definido acima e também o produto exterior dos vetores $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in V^{n-1}$. Justificaremos isto mais adiante mostrando que o produto vetorial permite identificar o espaço $\bigwedge^{n-1}(V)$ com V.

PROPOSIÇÃO 1.21. *Suponha que V esteja orientado, $\langle\ ,\ \rangle$ seja um produto interno em V e que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ seja uma base positiva. Valem:*

(1) *a aplicação $\wedge : V^{n-1} \to V$ dada por $\wedge(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$ é $(n-1)$-linear alternada;*

(2) *$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}$ é ortogonal a a_i, qualquer que seja $i \in \{1, \dots, n-1\}$;*

(3) *$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} A^i e_i$ onde A^i é o menor da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

obtido mediante a omissão da i-ésima linha de A, onde a_i^j denota a j-ésima coordenada de a_i na base ortonormal positiva (e_i);

(4) *$a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} = 0$ se, e somente se, (a_i) é l.d.;*

(5) *Se (a_i) é l.i então $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1})$ é uma base positiva de V.*

(6) *$||a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}|| = \mathrm{Vol}(a_1, \dots, a_{n-1})$, onde $\mathrm{Vol}(a_1, \dots, a_{n-1})$ denota a volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $a_1, \dots, a_{n-1}$ de V.*

DEMONSTRAÇÃO.

(1) Segue do fato que Δ é alternada.

(2) $\langle a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}, a_i \rangle = \Delta(a_1, \dots a_i, \dots a_{n-1}, a_i) = 0.$

(3) Basta desenvolver o determinante abaixo pela última coluna:

$$\det A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 & v_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{n-1}^n & v_n \end{pmatrix}$$

(4) Os vetores (a_i) é l.d. se e somente se todos os menores A^i são nulos.

(5) Como
$\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}) = \langle a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle > 0$ então $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1})$ é uma base positiva.

(6) Como acima temos que $\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1})^2 = \langle a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle^2$. Por outro lado temos $\Delta(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1})^2$ é igual a

$$\det \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_{n-1} \rangle & 0 \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \dots & \langle a_2, a_{n-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \langle a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-1} \rangle \end{pmatrix}$$

Assim, temos que

$$\langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}\rangle^2 = \det[\langle a_i, a_j\rangle]\langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}\rangle$$

ou seja

$$\langle a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}, a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}\rangle = \det[\langle a_i, a_j]$$

e, portanto,

$$||a_1 \wedge \ldots \wedge a_{n-1}|| = \mathrm{Vol}(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

□

11. Álgebra vetorial clássica

Nesta seção assumimos que V é um espaço vetorial real de dimensão 3 orientado e munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

O espaço dual V^* identifica-se com V através do isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ a & \mapsto & \omega_a \end{array}$$

onde ω_a é a forma linear

$$\omega_a(v) = \langle a, v\rangle$$

O espaço das 2-formas também identifica-se com V através do isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \bigwedge^2(V^*) \\ a & \mapsto & \eta_a \end{array}$$

onde η_a é a 2-forma linear

$$\eta_a(v_1, v_2) = \Delta(a, v_1, v_2)$$

Da definição do produto vetorial temos

$$\eta_a(v_1, v_2) = \langle a, v_1 \wedge v_2\rangle$$

Finalmente podemos identificar as 3-formas com os números reais através da aplicação:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \bigwedge^3(V^*) \\ a & \mapsto & a\Delta \end{array}$$

Sejam $u_1, u_2 \in V$. Se $\omega_1(v) = \langle u_1, v\rangle$ e $\omega_2(v) = \langle u_2, v\rangle$, então $(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2)$ coincide com o *determinante de Gramm*:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Fixados $u_1, u_2 \in V$, obtemos a 2-forma

$$\eta(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Do isomorfismo acima existe um vetor $a \in V$ tal que

$$\langle a, v_1 \wedge v_2 \rangle = \Delta(a, v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Assim para cada par u_1, u_2 associamos um vetor $a = \Phi(u_1, u_2)$. É facil constatar que Φ é uma aplicação bilinear alternada:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (u_1, u_2) & \mapsto & \Phi(u_1, u_2) \end{array}$$

Proposição 1.22. *Se $\Phi : V \times V \to V$ é uma aplicação bilinear alternada então existe uma aplicação linear $L : V \to V$ tal que $\Phi(u, v) = L(u \wedge v)$.*

Demonstração. Se (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormal positiva de V então $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$. Basta definir $L(e_1) = \Phi(e_2 \wedge e_3)$, $L(e_2) = \Phi(e_3 \wedge e_1)$, $L(e_3) = \Phi(e_1 \wedge e_2)$. $\square$

Substituindo acima obtemos:

$$\langle L(u_1 \wedge u_2), v_1 \wedge v_2 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Calculando $\Phi(e_i, e_j) = L(e_i \wedge e_j)$ obtemos $L = I$.
Finalmente:

$$\langle u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, v_1 \rangle & \langle u_1, v_2 \rangle \\ \langle u_2, v_1 \rangle & \langle u_2, v_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Seja (x^1, x^2, x^3) a base dual da base ortonormal (e_1, e_2, e_3) então

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \sum_{I \in C_{3,2}} (\omega_1 \wedge \omega_2)(e_I) x^I (v_1, v_2)$$

Lembrando que $\omega_i(e_j) = \langle u_i, e_j \rangle = x^j(u_i)$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \sum_{I \in C_{3,2}} x^I(u_1, u_2) x^I(v_1, v_2)$$

No nosso caso temos

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) \quad = \quad & (x^1 \wedge x^2)(u_1, u_2)(x^1 \wedge x^2)(v_1, v_2) + \\ & (x^2 \wedge x^3)(u_1, u_2)(x^2 \wedge x^3)(v_1, v_2) + \\ & (x^3 \wedge x^1)(u_1, u_2)(x^3 \wedge x^1)(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Disto obtemos a identidade de Binet-Cauchy:

$$\begin{aligned} \langle u_1 \wedge u_2, v_1 \wedge v_2 \rangle \quad = \quad & (x^1 \wedge x^2)(u_1, u_2)(x^1 \wedge x^2)(v_1, v_2) + \\ & (x^2 \wedge x^3)(u_1, u_2)(x^2 \wedge x^3)(v_1, v_2) + \\ & (x^3 \wedge x^1)(u_1, u_2)(x^3 \wedge x^1)(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Fazendo $u_i = v_i$ temos a identidade de Lagrange:

$$\begin{aligned} \|v_1 \wedge v_2\|^2 \quad = \quad & (x^1 \wedge x^2)((v_1, v_2)^2 + \\ & (x^2 \wedge x^3)(v_1, v_2)^2 + \\ & (x^3 \wedge x^1)(v_1, v_2)^2 \end{aligned}$$

Esta diz que o quadrado da área do paralelogramo gerado pelos vetores v_1 e v_2 é igual a soma dos quadrados das áreas das projeções nos planos coordenados (Teorema de Pitágoras).

12. Formas diferenciais

Recordemos que se $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciavel e $p \in U$ então a diferencial de f em p é dada por:

$$\begin{cases} df_p : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ df_p(v) & = & \frac{\partial f}{\partial v}(p) & = & \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t} \end{cases}$$

Exemplo 1.23. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função linear então*

$$df_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} = f(v)$$

Assim $df_p = f$ ou seja df é constante.

Exemplo 1.24. *Seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base do $\mathbb{R}^n$. Se $x^1, \ldots, x^n$ é a base dual então cada $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função linear e portanto $dx^i_p = x^i$ qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^n$.*

Como consequência do exemplo anterior a diferencial de uma função tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} df_p(v) &= df_p(\textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} x^i(v)e_i) = \\ &\textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)x^i(v) = \\ &\textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i_p(v) \end{aligned}$$

Abreviadamente:

$$df = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

Mais geralmente se V, W são espaços vetoriais de dimensão finita, $U \subset V$ aberto e $F : U \to W$ diferenciável, a diferencial de F em p é dada por

$$dF_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{F(p+tv) - F(p)}{t}$$

Se $(w_1, \ldots, w_m)$ é uma base de W então $F(p) = \sum_{j=1,\ldots,m} f^j(p)w_j$ e sua diferencial em p é dada por $dF(p) = \sum_{j=1,\ldots,m} df^j(p)w_j$. Explicitamente temos:

$$dF_p(v) = \sum_{j=1,\ldots,m} \left(\sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p)dx^i_p(v) \right) w_j$$

ou na forma abreviada:

$$dF = \sum_{j=1,\ldots,m} \left(\sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} dx^i \right) w_j$$

A matriz

$$J(p) = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \right)$$

é chamada de *matriz jacobiana* de F no ponto p. Um caso de particular importância para nós é quando o espaço vetorial W é o espaço dual V^* ou mais geralmente $W = \bigwedge^k(V^*)$.

Definição 1.25. *Uma k-forma diferencial num aberto $U \in V$ é uma aplicação diferenciável*

$$\omega : U \to \bigwedge^k(V^*)$$

Fixada uma base $x^1, \ldots, x^n$ de V^* lembrando que $dx^i_p = x^i$ e que $(dx^I_p)_{I \in C_{n,k}} = (x^I)_{I \in C_{n,k}}$ constitui uma base de $\bigwedge^k(V^*)$ então

$$\omega(p) = \sum_{I \in C_{n,k}} a_I(p)dx^I_p$$

onde cada $a_I : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

EXEMPLO 1.26. *Para $k = 1$ temos as 1-formas diferenciáveis no $\mathbb{R}^n$*

$$\omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$
$$\omega_p = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i(p) dx_p^i$$

Em particular se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então a diferencial de f é uma 1-forma $df = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ onde $a_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

EXEMPLO 1.27. *No $\mathbb{R}^3$ temos*

$$\begin{aligned}
&1\text{-}formas: \quad \omega = adx + bdy + cdz \\
&2\text{-}formas: \quad \eta = adx \wedge dy + bdy \wedge dz + cdz \wedge dx \\
&3\text{-}formas: \quad \Delta = adx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

onde a, b, c são funções diferenciáveis definidas no $\mathbb{R}^3$.

A partir de agora suporemos que todas as funções consideradas tenham pelo menos derivadas segunda contínuas e a diferencial de f em p será denotada por f'_p ao invés de df_p. Em breve ficará claro porque fizemos esta mudança de notação.

As operações de soma, produto por escalar e produto exterior das formas lineares induzem as correspondentes operações nas formas diferenciais. Assim, por exemplo

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p$$

DEFINIÇÃO 1.28. *O conjunto das k-formas diferenciais sobre U será designado por $E^k(U)$.*

Note que $E^0(U)$ é o conjunto das funções diferenciáveis definidas em U. Com as operações usuais $E^k(U)$ é um espaço vetorial real. Além disto este espaço é um módulo sobre o anel $E^0(U)$ das funções diferenciáveis definidas em U. Observamos também que se $f \in E^0(U)$ e $\omega \in E^k(U)$ então $f \wedge \omega = f\omega$.

DEFINIÇÃO 1.29. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\omega \in E^k(V)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(U) \subset V$. Definimos*

$$f^*(\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$$

Da proposição 1.18 segue facilmente o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1.30. *Nas condições acima temos:*

(1) $f^* : E^k(V) \to E^k(U)$ é uma aplicação linear.
(2) Se $g \in E^0(V)$ então $f^*(g) = g \circ f$
(3) Se $\omega \in E^k(V)$ $\eta \in E^r(V)$ então $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$

EXEMPLO 1.31. *Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação dada por $x^i = f^i(y^1, \dots, y^m)$ e*

$$\omega = \sum_{i=1,\dots,n} a_i dx^i$$

então

$$f^*(\omega) = \textstyle\sum_{i=1,\dots,n} a_i (\sum_{j=1,\dots,m} \frac{\partial f^i}{\partial y^j} dy^j)$$

$$f^*(\omega) = \textstyle\sum_{i,j} a_i \frac{\partial f^i}{\partial y^j} dy^j$$

Como consequência para calcularmos $f^*(\omega)$ basta substituirmos dx^i na expressão de ω por $df^i = \sum_{j=1,\dots,m} \frac{\partial f^i}{\partial y^j} dy^j$.

A seguir vamos definir a operação mais importante nas formas diferenciais, a diferencial exterior. Comecemos com as 1-formas. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável então a sua diferencial $f' : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ é uma 1-forma sobre o $\mathbb{R}^n$ (lembre que mudamos a notação!). A diferencial desta função num ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é a função linear

$$(f')'_p : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$

chamada de *diferencial segunda de f no ponto p* e denotada abreviadamente por f''_p. Em coordenadas temos:

$$f'_p = \sum_{i=1,\dots,n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i_p$$

(Lembre que $dx^i_p = x^i$ é uma função constante igual a um vetor fixo x^i).

Calculando a diferencial de f' obtemos:

$$f''_p = \sum_{i=1,\dots,n} (\sum_{j=1,\dots,n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p) dx^j_p dx^i_p)$$

A diferencial segunda de f define uma função bilinear $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(u, v) = f''_p(u)(v)$$

Em coordenadas temos:

$$f''_p(u, v) = \sum_{i=1,\dots,n} (\sum_{j=1,\dots,n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p) u^j v^i)$$

O teorema de Schwarz diz que esta forma bilinear é simétrica ou seja $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)$.

A matriz $H = (\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(p))$ é uma matriz simétrica chamada de *matriz hessiana de f no ponto p*. Seja agora uma 1-forma

$$\omega_p = \sum_{i=1,\dots,n} a_i(p) dx^i_p$$

Então a diferencial de ω em p é uma aplicação linear

$$\omega'_p : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$$

Esta também define uma aplicação bilinear:

$$h(u,v) = \omega'_p(u)(v)$$

Assim se existir uma função f tal que $\omega = df$ esta forma precisa ser simétrica:

$$\omega'_p(u)(v) = \omega'_p(v)(u)$$

DEFINIÇÃO 1.32. *Se $\omega \in E^1(U)$ definimos diferencial exterior de ω por*

$$d\omega_p(u,v) = \omega'_p(u,v) - \omega'_p(v,u)$$

Assim a diferencial exterior de ω é a parte anti-simétrica da diferencial usual. Ela mede o quanto uma forma diferencial afasta-se de ser uma diferencial exata, isto é ser a diferencial de uma função. Analisemos a recíproca, isto é se $d\omega = 0$ quando existe f tal que $f' = \omega$? Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g(t) = f(tx)$. Então $g'(t) = f'_{tx}(x) = \omega_{tx}(x)$. Assim $f(x) - f(0) = g(1) - g(0) = \int_0^1 \omega_{tx}(x)dt$. Desta forma se existir uma tal f ela será dada por

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \omega_{tx}(x)dt$$

LEMA 1.33. *Sejam ω uma 1-forma definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, $f, g : W \to U$ funções diferenciáveis definidas em $W \subset \mathbb{R}^m$. Então a função*

$$\Phi(x) = \omega_{f(x)}(g(x))$$

é diferenciável e sua diferencial é dada por

$$\Phi'_x(v) = \omega'_{f(x)}(f'(v))(g(x)) + \omega_{f(x)}(g'(v))$$

DEMONSTRAÇÃO. Escrevemos a forma em coordenadas $\omega_p = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i(p)dx^i_p$. Então

$$\Phi(x) = \sum_{i=1,\ldots,n} a_i(f(x))g^i(x)$$

onde g^i são as coordenadas de g. Segue da regra da cadeia e do produto que:

$$\Phi'_x(v) = \sum_{i=1,\ldots,n} (a_i)'_{f(x)}(f'(v))g^i(x) + \sum_{i=1,\ldots,n} a_i(f(x))(g^i)'(v)$$

ou seja

$$\Phi'_x(v) = \omega_{f(x)}(f'(v))(g(x)) + \omega_{f(x)}(g'(v))$$

□

PROPOSIÇÃO 1.34. *(Lema de Poincaré para 1-formas) Se $\omega \in E^1(\mathbb{R}^n)$ e $d\omega = 0$ então a função*

$$f(x) = \int_0^1 \omega_{tx}(x)dt$$

é uma primitiva de ω, isto é $f' = \omega$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema anterior e pela regra de Leibniz a diferencial de f é dada por

$$f'_x(v) = \int_0^1 (\omega'_{tx}(tv)(x) + \omega_{tx}(v))dt$$

$$f'_x(v) = \int_0^1 (t\omega'_{tx}(v)(x) + \omega_{tx}(v))dt$$

Por hipótese $d\omega = 0$. Desta forma

$$d\omega_{tx}(v, x) = \omega'_{tx}(v, x) - \omega'_{tx}(x, v) = 0$$

ou seja:

$$\omega'_{tx}(v, x) = \omega'_{tx}(x, v)$$

Substituindo na expressão acima teremos

$$f'_x(v) = \int_0^1 (t\omega'_{tx}(x)(v) + \omega_{tx}(v))dt$$

$$f'_x(v) = \int_0^1 (t\omega'_{tx}(x) + \omega_{tx})(v)dt$$

$$f'_x(v) = \int_0^1 (\frac{d}{dt}(t\omega(tx))(v)dt$$

$$f'_x(v) = (t\omega_{tx})(v)|_0^1 = \omega_x)(v)$$

□

A seguir vamos estender a diferencial exterior para formas de grau maior que 1.

DEFINIÇÃO 1.35. *Se $\omega \in E^k(U)$ definimos*

$$d\omega_x(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_{1k}} \epsilon_\sigma \omega'_x(v_{\sigma(1)})(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k+1)})$$

ou de forma equivalente

$$d\omega_x(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \omega'_x(v_i)(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{(k+1)})$$

Em coordenadas teremos:

$$\omega = \sum_{I \in C_{nk}} a_I dx^I$$

$$\omega'_x(v) = \sum_{I \in C_{nk}} (da_I)_x(v) dx^I_x$$

$$d\omega_x(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{I \in C_{nk}} \sum_{\sigma \in S_{1k}} \epsilon_\sigma (da_I)_x(v_{\sigma(1)}) dx^I_x(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k+1)})$$

$$d\omega_x(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{I \in C_{nk}} ((da_I)_x \wedge dx^I_x)((v_1, \ldots, v_{k+1})$$

ou seja

$$d\omega = \sum_{I \in C_{nk}} ((da_I) \wedge dx^I$$

Exemplo 1.36. *Se $\omega \in \mathbb{R}^2$ é dada por $\omega = Pdx + Qdy$ então $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$ o que implica*

$$d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$$

Exemplo 1.37. *Se $\omega \in \mathbb{R}^3$ é dada por $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ então $d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$ de onde tiramos*

$$d\omega = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}) dy \wedge dz + (\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}) dz \wedge dx$$

Proposição 1.38. *O operador d tem as seguintes propriedades:*

(1) $d : E^k(U) \to E^{k+1}(U)$
(2) d *é* $\mathbb{R}$*-linear*
(3) $df = f'$
(4) Se $\omega \in E^k(U)$ *então* $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$
(5) $d^2\omega = 0$
(6) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$

Demonstração. As propriedades 1,2,3 seguem diretamente das definições.

Se

$$\omega = \sum_{I \in C_{nk}} a_I dx^I \text{ e } \eta = \sum_{I \in C_{nk}} b_J dx^J$$

então

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J \in C_{nk}} a_I b_J dx^I \wedge dx^J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J \in C_{nk}} d(a_I b_J) dx^I \wedge dx^J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J \in C_{nk}} (da_I b_J + a_I db_J) dx^I \wedge dx^J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J \in C_{nk}} b_J da_I dx^I \wedge dx^J + \sum_{I,J \in C_{nk}} a_I db_J dx^I \wedge dx^J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = \sum_{I,J \in C_{nk}} da_I dx^I \wedge b_J dx^J + (-1)^k \sum_{I,J \in C_{nk}} a_I dx^I \wedge db_J \wedge dx^J$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k (\omega \wedge d\eta)$$

provando o item 4.

$$\omega = \sum_{I \in C_{nk}} a_I dx^I$$

$$d\omega = \sum_{I \in C_{nk}} da_I \wedge dx^I$$

$$d\omega = \sum_{I \in C_{nk}} (\sum_{i=1,\dots,n} \frac{\partial a_I}{\partial x^i} dx^i) \wedge dx^I$$

$$d(d\omega) = \sum_{I \in C_{nk}} (\sum_{i,j=1,\dots,n} \frac{\partial^2 a_I}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i) \wedge dx^I$$

$$d(d\omega) = \sum_{I \in C_{nk}} (\sum_{i<j} (\frac{\partial^2 a_I}{\partial x^i \partial x^j} dx^j - \frac{\partial^2 a_I}{\partial x^j \partial x^i}) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I = 0$$

Finalmente se $g \in E^0(U)$ então $f^*(g) = g \circ f$.

Assim teremos $d(f^*(g)) = d(g \circ f) = dg \circ df = (f^*(dg)$. Se

$$\omega = \sum_{I \in C_{nk}} a_I dx^I$$

então

$$f^*(\omega) = \sum_{I \in C_{nk}} f^*(a_I) f^*(dx^I)$$

$$d(f^*(\omega)) = \sum_{I \in C_{nk}} d(f^*(a_I)) \wedge f^*(dx^I)$$

$$d(f^*(\omega)) = \sum_{I \in C_{nk}} (f^*(da_I)) \wedge f^*(dx^I)$$

$$d(f^*(\omega)) = \sum_{I \in C_{nk}} f^*(da_I \wedge dx^I)$$

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$$

□

Proposição 1.39. *(Lema de Poincaré)*
Se $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ *é fechada, isto é* $d\omega = 0$ *então a* $k-1$*-forma definida por*

$$\eta_x(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \omega_{tx}(x, tv_1, \ldots, tv_{k-1})dt$$

é uma primitiva de ω *ou seja* $d\eta = \omega$.

Demonstração.

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \eta'_x(v_i)(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k)$$

$$\eta'_x(v_i)(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_k) = \int_0^1 (\omega'_{tx}(tv_i)(x, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k) + \omega_{tx}(v_i, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k))dt$$

Substituindo teremos:

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \int_0^1 (\omega'_{tx}(tv_i)(x, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k) + \omega_{tx}(v_i, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k))dt$$

Como ω é alternada temos:

$$\omega_{tx}(v_i, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k) = (-1)^{i-1} \omega_{tx}(v_1, tv_2, \ldots, tv_i, \ldots, tv_k))$$

e como ω é fechada então

$$d\omega_{tx}(x, tv_1, \ldots, tv_k) = 0$$

$$(\omega'_{tx}(x)(tv_1, \ldots, tv_k) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \omega'_{tx}(tv_i)(x, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k) = 0$$

$$(\omega'_{tx}(x)(tv_1, \ldots, tv_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega'_{tx}(tv_i)(x, tv_1, \ldots, \widehat{tv_i}, \ldots, tv_k)$$

Substituindo na expressão de $d\eta$

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 (\omega'_{tx}(x)(tv_1, \ldots, tv_k) + k\omega_{tx}(v_1, tv_2, \ldots, tv_k))dt$$

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 (t^k \omega'_{tx}(x)(v_1, \ldots, v_k) + kt^{k-1} \omega_{tx}(v_1, v_2, \ldots, v_k))dt$$

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 (t^k \omega'_{tx}(x) + kt^{k-1} \omega_{tx})(v_1, v_2, \ldots, v_k)dt$$

$$d\eta_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k \omega_{tx}(x))(v_1, v_2, \ldots, v_k)dt$$

$\square$

13. Cohomologia de De Rhan

DEFINIÇÃO 1.40. *Diremos que uma k-forma ω é fechada ou que é um cobordo se $d\omega = 0$ e que ela é exata ou que é um cociclo se existe uma $k-1$-forma η tal que $d\eta = \omega$.*

Os operadores

$$d : E^{k-1}(U) \to E^k(U)$$

onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto definem uma sequência

$$\{0\} \to E^0(U) \to E^1(U) \to \dots E^{k-1}(U) \to E^k(U) \dots E^n(U) \to \{0\}$$

DEFINIÇÃO 1.41.

$$B^k(U) = Ker\ (d : E^k(U) \to E^{k+1}(U))$$
$$Z^k(U) = Im\ (d : E^{k-1}(U) \to E^k(U))$$

Como $d^2 = d \circ d = 0$ temos que

$$Z^k(U) \subset B^k(U)$$

O k-ésimo grupo de Cohomologia de De Rham do aberto U é por definição o cociente:

$$H^k(U) = B^k(U)/Z^k(U)$$

EXEMPLO 1.42. *(cohomologia de $\mathbb{R}$)*

$$E^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é diferenciavel}\}$$

$$E^1(\mathbb{R}) = \{adx : a \text{ é diferenciavel}\}$$

Agora

$$B^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : df = 0\}$$
$$B^1(\mathbb{R}) = E^1(\mathbb{R}) = \{adx : a \text{ é diferenciavel}\}$$
$$Z^0(\mathbb{R}) = \{0\}$$

Se $\omega = adx$ então tomando-se $f = \int adx$ temos que $df = \omega$ de onde concluimos que

$$Z^1(\mathbb{R}) = E^1(\mathbb{R})$$

Assim temos

$$\begin{cases} H^0(\mathbb{R}) & = & \mathbb{R} \\ H^1(\mathbb{R}) & = & \{0\} \end{cases}$$

EXEMPLO 1.43. *Seja $U \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Então $U = \bigcup_{j \in A} I_j$, reunião disjunta de intervalos I_j. Então teremos:*

$$\begin{cases} H^0(U) & = & \mathbb{R}^A \\ H^1(U) & = & \{0\} \end{cases}$$

EXEMPLO 1.44. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então $U = \bigcup_{j \in A} C_j$, reunião disjunta de suas componentes conexas C_j. Então teremos:*

$$H^0(U) = \mathbb{R}^A$$

EXEMPLO 1.45. *(cohomologia de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$)*

Considere as coodenadas polares no plano

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Então temos que $r = \sqrt{x^2+y^2}$. De onde concluimos que

$$dr = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Diferenciando temos que

$$\begin{cases} dx &= \cos\theta dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta \\ dy &= \operatorname{sen}\theta dr + r\cos\theta d\theta \end{cases}$$

De onde concluimos que

$$d\theta = \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$$

Note que apesar da função θ não estar definida em todo $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ as formas

$$\begin{cases} \omega_1 &= \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \omega_2 &= \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} \end{cases}$$

estão globalmente definidas.

Um cálculo simples mostra que $d\omega_1 = 0$ e $d\omega_2 = 0$. A forma ω_1 é exata: $dr = \omega_1$ mas a forma ω_2 não é exata pois se consideramos a curva fechada $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ onde $0 \leq t \leq 2\pi$ então a integral de linha é diferente de zero:

$$\int_c \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$$

Se $\omega = a(r,\theta)dr$ é uma forma fechada então $d\omega = \dfrac{\partial a}{\partial \theta} d\theta \wedge dr = 0$. Portanto $\dfrac{\partial a}{\partial \theta} = 0$. Assim a função a só depende de r, $a = a(r)$. Se $f(r) = \int a(r)dr$ então $df = \omega$ ou seja ω é exata. Se $\omega = b(r,\theta)d\theta$ é uma forma fechada então $d\omega = \dfrac{\partial b}{\partial r} dr \wedge d\theta = 0$. Portanto $\dfrac{\partial b}{\partial r} = 0$. Assim a *função b só depende de θ, $b = b(\theta)$. Assim $\omega = b(\theta)d\theta$. Seja*

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta)d\theta$$

Considere a nova forma

$$\eta = \omega - kd\theta = (b(\theta) - k)d\theta$$

e seja

$$f(\theta) = \int_0^{\theta}(b(\theta) - k)d\theta$$

Então $f(2\pi) = f(0) = 0$ e portanto é uma função periódica definida no $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ e $df = \theta$. Assim $\eta \in Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ e temos

$$\omega + Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = (\eta + kd\theta) + Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = kd\theta + Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$$

Consideremos o caso geral onde $\omega = a(r,\theta)dr + b(r,\theta)d\theta$ é uma forma fechada.

Então temos $\dfrac{\partial b}{\partial r} - \dfrac{\partial a}{\partial \theta} = 0$.

Seja

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(1,\theta)d\theta$$

e

$$f(r,\theta) = \int_0^{\theta}(b(1,\theta) - k)d\theta + \int_1^r a(r,\theta)dr$$

Como acima verifica-se que f esta bem definida no $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ e temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= a(r,\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= (b(\theta) - k) + \textstyle\int_1^r \dfrac{\partial a}{\partial \theta}dr\end{aligned}$$

Usando o fato que ω é fechada vem

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta} &= (b(1,\theta) - k) + \textstyle\int_1^r \dfrac{\partial b}{\partial r}dr \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= (b(1,\theta) - k) + b(r,\theta) - b(1,\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= b(r,\theta) - k\end{aligned}$$

Disto podemos concluir que

$$\omega = df + kd\theta$$

$$\omega + Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = kd\theta + Z^1(\mathbb{R}^2 - \{0\})$$

mostrando que

$$H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{R}$$

Como $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ *é conexo temos que* $H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. *Se* $\eta = a(r,\theta)dr \wedge d\theta$ *e* $f(r,\theta) = \int a(r,\theta)dr$ *então a* 1*-forma* $\omega = f(r,\theta)d\theta$ *é uma primitiva de* η *ou seja* $d\omega = \eta$. *Em resumo a cohomologia do* $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ *é*

$$\begin{cases} H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) &= \mathbb{R} \\ H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) &= \mathbb{R} \\ H^2(\mathbb{R}^2 - \{0\}) &= \{0\} \end{cases}$$

14. Análise vetorial clássica

Recordemos que um campo de vetores num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável

$$X : U \to \mathbb{R}^3$$

Se (e_1, e_2, e_3) é uma base então

$$X(p) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e

$$dX(p) = da_1(p)e_1 + da_2(p)e_2 + da_3(p)e_3$$

Seja $\Gamma(U)$ o conjunto dos campos definidos em U. Com as operações habituais $\Gamma(U)$ torna-se um espaço vetorial sôbre $\mathbb{R}$ e um módulo sôbre o anel $E^0(U)$ das funções diferenciáveis definidas em U. Considere a seguir as formas duais dx^1, dx^2, dx^3. Uma 1-forma $\omega \in E^1(U)$ decompõe-se

$$\omega = a_1dx^1 + a_2dx^2 + a_3dx^3$$

As 2-formas $\eta \in E^2(U)$ decompõe-se

$$\eta = b_1dx^2 \wedge dx^3 + b_2dx^3 \wedge dx^1 + b_3dx^1 \wedge dx^2$$

Finalmente as formas de grau tres são dadas por

$$\gamma = c dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

As diferenciais exteriores, sendo $f \in E^0(U)$, são dadas por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^3$$

$$d\omega = da_1 \wedge dx^1 + da_2 \wedge dx^2 + da_3 \wedge dx^3$$

$$d\omega = (\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2})dx^1 \wedge dx^2 + (\frac{\partial a_3}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^3})dx^1 \wedge dx^3 + (\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3})dx^2 \wedge dx^3$$

$$d\eta = db_1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + db_2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + db_3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$$

$$d\eta = (\frac{\partial b_1}{\partial x^1} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$
$$d\gamma = 0$$

Assumamos a partir de agora que (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormal positiva de forma que o elemento de volume do $\mathbb{R}^3$ é dado por

$$\Delta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Para cada $X \in \Gamma(U)$ defina a 1-forma

$$(\omega_X)_p(v) = \langle X(p), \rangle v$$

e a 2-forma

$$(\eta_X)_p(u, v) = \Delta(X(p), u, v)$$

Para cada $f \in E^0(U)$ defina

$$\Delta_f = f\Delta$$

As aplicações

$$\begin{cases} \Gamma(U) & \to & E^1(U) \\ X & \mapsto & \omega_X \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Gamma(U) & \to & E^2(U) \\ X & \mapsto & \eta_X \end{cases}$$
$$\begin{cases} E^0(U) & \to & E^3(U) \\ X & \mapsto & \Delta_f \end{cases}$$

são isomorfismos de espaços vetoriais e de módulos.

Definição 1.46. *(Gradiente, Rotacional, Divergente)*
O Gradiente de uma função $f \in E^0(U)$ é o campo ∇f tal que

$$\omega_{\nabla f} = df$$

O Rotacional de um campo $X \in \Gamma(U)$ é o campo $rot(X) \in \Gamma(U)$ tal que

$$\eta_{rot(X)} = d\omega_X$$

O Divergente de um campo $X \in \Gamma(U)$ é a função $div(X) \in E^0(U)$ tal que

$$\Delta_{div(X)} = d\eta_X$$

O Laplaciano de uma função $f \in E^0(U)$ é a função $\triangle f \in E^0(U)$ dada por

$$\triangle f = div(\nabla f)$$

Mostramos na secção 11 a seguinte igualdade

$$\omega_X \wedge \omega_Y = \eta_{X\wedge Y}$$

Considere a 3-forma

$$\omega_X \wedge \eta_Y$$

Como $\omega_X \wedge \Delta = 0$ fazendo a contração na direção Y temos:

$$i_Y\omega_X \wedge \Delta - \omega_X \wedge i_Y\Delta = 0$$

ou seja

$$\omega_X \wedge \eta_Y = \langle X, Y\rangle\Delta$$

Diferenciando

$$\omega_{\nabla f} = df$$

temos

$$d\omega_{\nabla f} = 0$$

de onde concluimos que

$$rot(\nabla f) = 0$$

De forma semelhante diferenciando

$$\Delta_{div(rot(X))} = d\eta_{rot(X)}$$

obtemos

$$div(rot(X) = 0$$

Consideremos a seguir o elemento de área $\triangle$ no plano $\mathbb{R}^2$. Para cada $u \in \mathbb{R}^2$ seja Ju o único vetor tal que

$$\langle Ju, v\rangle = \triangle(u, v)$$

PROPOSIÇÃO 1.47. *O operador linear $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem as seguintes propriedades:*

(1) $Ju \perp u$
(2) $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$
(3) $\langle Ju, v\rangle = -\langle u, Jv\rangle$
(4) $J^2 = -I$

DEMONSTRAÇÃO. Como $\langle Ju, u\rangle = \triangle(u, u) = 0$ vem que $Ju \perp u$. Agora,

$$\langle Ju, Ju\rangle^2 = \triangle(u, Ju)^2$$

$$\triangle(u, Ju)^2 = \det\begin{pmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, Ju\rangle \\ \langle Ju, u\rangle & \langle Ju, Ju\rangle \end{pmatrix}$$

como $\langle Ju, u\rangle = 0$ temos que $\langle Ju, Ju\rangle^2 = \langle u, u\rangle\langle Ju, Ju\rangle$. De onde concluimos que $\langle Ju, Ju\rangle = \langle u, u\rangle$. Da fórmula de polarização temos que:

$$\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$$

Também

$$\langle Ju, v\rangle = \triangle(u, v) = -\triangle(v, u) = -\langle Jv, u\rangle$$

Finalmente,

$$\langle J^2 u, v\rangle = -\langle Ju, Jv\rangle = -\langle u, v\rangle$$

De onde concluimos que

$$J^2 = -I$$

□

O operador J nada mais é que a estrutura complexa usual do plano. Em coordenadas $J(x, y) = -(y, x)$.

Como antes para cada $X \in \Gamma(U)$ onde U é um aberto do plano seja

$$(\omega_X)_p(u) = \langle X(p), u\rangle$$

$$(\eta_X)_p(u) = \triangle(X(p), u)$$

Proposição 1.48. *Se $X, Y \in \Gamma(U)$ então:*

(1) $\eta_X = \omega_{JX}$
(2) $\omega_X \wedge \omega_Y = \langle JX, Y\rangle\ \triangle$
(3) $\omega_X \wedge \eta_Y = \langle X, Y\rangle\ \triangle$
(4) $\eta_X \wedge \eta_Y = \omega_X \wedge \omega_Y = \langle JX, Y\rangle\ \triangle$

Demonstração.

(1)

$$(\eta_X)_p(u) = \triangle(X(p), u) = \langle JX(p), u\rangle = (\omega_{JX})_p(u)$$

(2)

$$(\omega_X \wedge \omega_Y)(u, v) = \det\begin{pmatrix} \langle X, u\rangle & \langle X, v\rangle \\ \langle Y, u\rangle & \langle Y, v\rangle \end{pmatrix} = \triangle(X, Y)\triangle(u, v) = \langle JX, Y\rangle\ \triangle(u, v)$$

(3)

$$\omega_X \wedge \eta_Y = \omega_X \wedge \omega_{JY} = \langle JX, JY\rangle\ \triangle = \langle X, Y\rangle\ \triangle$$

(4)

$$\eta_X \wedge \eta_Y = \omega_{JX} \wedge \omega_{JY} = \langle J^2 X, JY\rangle\ \triangle = \langle JX, Y\rangle\ \triangle$$

□

CAPíTULO 2

Integral de formas diferenciais

Neste capítulo defiremos a integral de uma k-forma ao longo de um k-caminho no $\mathbb{R}^n$ e provaremos a versão do teorema de Stokes para cadeias.

1. Integral de formas sobre cadeias

Comecemos recordando a fórmula de mudança de variáveis para integrais múltiplas.

Seja $g : U \to V$ um difeomorfismo entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset U$ um domínio compacto Jordan mensurável então

$$\int_{g(D)} f(y)dy^1 \dots dy^n = \int_D f(g(x)| \det g'(x)|dx^1 \dots dx^n$$

Se a função g é dada em coordenadas por $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ então o determinante jacobiano de g é dado por:

$$\frac{\partial(y^1 \dots y^n)}{\partial(x^1 \dots x^n)} = \det g'(x) = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$$

e a fórmula de mudança de variáveis escreve-se como

$$\int_{g(D)} f(y^1, \dots, y^n)dy^1 \dots dy^n = \int_D f(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)) \left| \frac{\partial(y^1 \dots y^n)}{\partial(x^1 \dots x^n)} \right| dx^1 \dots dx^n$$

Exemplo 2.1. *Considere uma aplicação afim do* $\mathbb{R}^n$ $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $g(x) = T(x) + b$ *onde* T *é linear e* $b \in \mathbb{R}^n$*. Então* $\det g'(x) = \det T$ *e temos:*

$$\int_{T(D)+b} f(y)dy^1 \dots dy^n = |detT| \int_D f(T(x) + b)dx^1 \dots dx^n$$

Em coordenadas

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + b^i$$

$$\int_{T(D)+b} f(y)dy^1 \dots dy^n = |det(a^i_j)| \int_D f(\sum_{j=1}^{n} a^1_j x^j + b^1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a^n_j x^j + b^n)dx^1 \dots dx^n$$

Consideremos a seguir uma n-forma $\omega = f dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ definida no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.2.
$$\int_D \omega = \int_D f(y) dy^1 \ldots dy^n$$

Sendo g como acima temos que

$$g^*\omega = (f \circ g) \det g'(x) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$
$$g^*\omega = (f \circ g) \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Supondo que g preserva a orientação, isto é det $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) > 0$ a fórmula de mudança de variaveis adquire a expressão simplificada:
$$\int_{g(D)} \omega = \int_D g^*\omega$$

Em poucas palavras: a integral de n-formas é invariante por imagem inversa através de difeomorfismos que preservam a orientação.

Sejam $I = [0,1]$, I^n o n-cubo unitário do $\mathbb{R}^n$ e V um espaço vetorial de dimensão finita. Diremos que uma função $f : I^n \to V$ é diferenciável se ela for a restrição de uma função diferencável definida num aberto U que contém I^n. Convencionaremos que $I^0 = \{0\}$.

Definição 2.3. *Um k-caminho no $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável*

$$c : I^k \to \mathbb{R}^n$$

Assim um 0-caminho é um ponto $c(0)$, um 1-caminho é uma curva $c : I \to \mathbb{R}^n$, um 2-caminho é uma superfície parametrizada com bordo $c : I^2 \to \mathbb{R}^n$ etc.

Definição 2.4. *Sejam $\omega \in E^k(U)$ onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $c : I^k \to U$ um k-caminho. A integral de ω sobre c é o número*
$$\int_c \omega = \int_{I^k} c^*\omega$$

Definição 2.5. *Uma k-cadeia no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma soma formal*

$$c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_m c_m$$

onde cada $c_i : I^k \to \mathbb{R}^n$ é um k-caminho e os α_i são números reais. A integral de ω sobre c é o número
$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_{c_i} \omega$$

A seguir queremos definir o que entendemos por bordo ou fronteira de uma cadeia. Começaremos descrevendo as faces de um cubo.

As faces do cubo $I^k \subset \mathbb{R}^k$ são dadas por

$$F^{k-1}_{(j,\epsilon)} = \{(x^1, \ldots, x^{j-1}, \epsilon, \ldots, x^k) : x^i \in [0,1]\}$$

onde $j = 1, \ldots, k$ e $\epsilon = 0, 1$. Assim

$$p \in F^{k-1}_{(j,\epsilon)} \Longleftrightarrow p \in I^k \text{ e } x^j(p) = \epsilon$$

Observe que o vetor e_j da base canônica é ortogonal à face $F^{k-1}_{(j,\epsilon)}$. O vetor normal à face $F^{k-1}_{(j,0)}$ que aponta para fora do cubo I^k é $-e_j$. Já aquele que aponta para fora e normal à face $F^{k-1}_{(j,1)}$ é e_j. Sendo $N_{j,\epsilon}$ o vetor normal à face $F^{k-1}_{(j,\epsilon)}$ então

$$N_{(j,\epsilon)} = (-1)^{(\epsilon+1)} e_j$$

Orientamos as faces $F^{k-1}_{(j,\epsilon)}$ escolhendo vetores tangentes $(f_1, \ldots, f_{k-1})$ à face de maneira que $(N_{(j,\epsilon)}, f_1, \ldots, f_{k-1})$ seja uma base positiva do $\mathbb{R}^k$ isto é

$$\Delta(N_{(j,\epsilon)}, f_1, \ldots, f_{k-1}) > 0$$

Notando que

$$\Delta(N_{(j,\epsilon)}, e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k) = (-1)^{(\epsilon+1)} \Delta(e_j, e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k)$$
$$\Delta(N_{(j,\epsilon)}, e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k) = (-1)^{(\epsilon+1)} (-1)^{(j-1)} \Delta(e_1, \ldots, e_k)$$
$$\Delta(N_{(j,\epsilon)}, e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_k) = (-1)^{j+\epsilon}$$

podemos escolher, por exemplo, os vetores

$$f_1 = (-1)^{j+k} e_1, \ldots, f_{j-1} = e_{j-1}, f_{j+1} = e_{j+1}, \ldots, f_{k-1} = e_k$$

Neste caso teremos

$$\Delta(N_{(j,\epsilon)}, f_1, \ldots, f_{k-1}) = 1$$

Cada face do cubo pode ser visto como um $k-1$-caminho dado por

$$\sigma^k_{(j,\epsilon)}(x^1, \ldots, x^{k-1}) = (x^1, \ldots, x^{j-1}, \epsilon, \ldots, x^{k-1})$$

Agora

$$d\sigma^k_{(j,\epsilon)}(e_1) = e_1 \ldots d\sigma^k_{(j,\epsilon)}(e_{j-1}) = e_{j-1}$$
$$d\sigma^k_{(j,\epsilon)}(e_j) = e_{j+1} \ldots d\sigma^k_{(j,\epsilon)}(e_{k-1}) = e_k$$

Segue que $d\sigma^k_{(j,\epsilon)}$ leva a orientação canônica do $\mathbb{R}^k$ na orientação fixada da face se $(-1)^{j+\epsilon} = 1$ e inverte caso contrário.

Definição 2.6. *O Bordo do k-cubo é a $(k-1)$-cadeia dada por*

$$\partial I^k = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\epsilon=0,1} (-1)^{j+\epsilon} \sigma^k_{(j,\epsilon)} \right)$$

Exemplo 2.7.

(1) $\partial I^2 = \sigma^2_{(1,1)} - \sigma^2_{(1,0)} + \sigma^2_{(2,0)} - \sigma^2_{(2,1)}$
(2) $\partial I^3 = \sigma^3_{(1,1)} - \sigma^3_{(1,0)} + \sigma^3_{(2,0)} - \sigma^3_{(2,1)} + \sigma^3_{(3,1)} - \sigma^3_{(3,0)}$

Se $c : I^k \to U \subset \mathbb{R}^n$ é um k-caminho em U então $c \circ \sigma^k_{(j,\epsilon)}$ é um $k-1$-caminho em U.

Definição 2.8. *O Bordo de c é a $(k-1)$-cadeia dada por*

$$\partial c = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{\epsilon=0,1} (-1)^{j+\epsilon} c \circ \sigma^k_{(j,\epsilon)} \right)$$

Se $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots + \alpha_m c_m$ é uma k-cadeia então Bordo de c é $(k-1)$-cadeia

$$\partial c = \alpha_1 \partial c_1 + \alpha_2 \partial c_2 + \ldots + \alpha_m \partial c_m$$

Teorema 2.9. *Se c é uma k-cadeia então*

$$\partial^2 c = \partial(\partial c) = 0$$

Demonstração. Basta demonstrar o teorema para um k-caminho em U. Pela definição,

$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\delta=0,1} (-1)^{i+\delta} c \circ \sigma^k_{(i,\delta)} \right)$$

Portanto,

$$\partial(\partial c) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\delta=0,1} (-1)^{i+\delta} \partial(c \circ \sigma^k_{(i,\delta)}) \right)$$

Agora,

$$\partial(c \circ \sigma^k_{(i,\delta)}) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{\epsilon=0,1} (-1)^{j+\epsilon} (c \circ \sigma^k_{(i,\delta)}) \circ \sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)} \right)$$

Assim

$$\partial(\partial c) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\delta=0,1} (-1)^{i+\delta} \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{\epsilon=0,1} (-1)^{j+\epsilon} c \circ \sigma^k_{(i,\delta)} \circ \sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)} \right) \right)$$

Se $i \leq j$ temos

$$\begin{array}{lcl} \sigma^k_{(i,\delta)}(\sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)}(x^1,\ldots,x^{k-2})) & = & \\ \sigma^k_{(i,\delta)}(x^1,\ldots,x^{j-1},\epsilon,x^j,\ldots,x^{k-1}) & = & (x^1,\ldots x^{i-1},\delta\ldots,\epsilon,x^j,\ldots,x^{k-1}) \quad = \\ \sigma^k_{(j+1,\epsilon)}(x^1,\ldots x^{i-1},\delta\ldots,x^j,x^{k-1}) & = & \sigma^k_{(j+1,\epsilon)}(\sigma^{k-1}_{(i,\delta)}(x^1,\ldots,x^{k-2})) \end{array}$$

Assim para $i \leq j$ temos

$$\sigma^k_{(i,\delta)} \circ \sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)} = \sigma^k_{(j+1,\epsilon)} \circ \sigma^{k-1}_{(i,\delta)}$$

Então

$$\partial(\partial c) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\sum_{\delta=0,1}\sum_{\epsilon=0,1}(-1)^{i+j+\epsilon+\delta}c\circ\sigma^k_{(i,\delta)}\circ\sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)}\right)$$

$$\partial(\partial c) = \sum_{1\leq i<j\leq k-1}\left(\sum_{\delta=0,1}\sum_{\epsilon=0,1}(-1)^{i+j+\epsilon+\delta}c\circ\sigma^k_{(i,\delta)}\circ\sigma^{k-1}_{(j,\epsilon)} + (-1)^{i+j+\epsilon+\delta+1}c\circ\sigma^k_{(j+1,\delta)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,\epsilon)}\right)$$

Observe que o termo que corresponde a $i = k$ está contemplado na segunda parte fazendo $j = i = k+1$.

$$\partial(\partial c) = \sum_{1\leq i<j\leq k-1}\left(\sum_{\delta=0,1}\sum_{\epsilon=0,1}(-1)^{i+j+\epsilon+\delta}c\circ\sigma^k_{(j+1,\epsilon)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,\delta)} + (-1)^{i+j+\epsilon+\delta+1}c\circ\sigma^k_{(j+1,\delta)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,\epsilon)}\right)$$

Desenvolvendo a soma:

$$\begin{array}{lr} \sum_{\delta=0,1}\sum_{\epsilon=0,1}(-1)^{i+j+\epsilon+\delta}c\circ\sigma^k_{(j+1,\epsilon)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,\delta)} + (-1)^{i+j+\epsilon+\delta+1}c\circ\sigma^k_{(j+1,\delta)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,\epsilon)} & = \\ (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,0)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,0)} - (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,0)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,0)} & + \\ (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,1)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,1)} - (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,1)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,1)} & - \\ (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,1)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,0)} + (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,0)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,1)} & - \\ (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,0)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,1)} + (-1)^{i+j}c\circ\sigma^k_{(j+1,1)}\circ\sigma^{k-1}_{(i,0)} = 0 & \end{array}$$

□

2. Teorema de Stokes

Comecemos lembrando o que é a diferencial de uma função. Sejam $f \in E^0(U)$, $p \in U$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Considere o 1-caminho $c_{\Delta x}(t) = p + t\Delta x v$ $0 \leq t \leq 1$. Então $\partial c_{\Delta x} = c(1) - c(0)$.

$$df_p(v) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(p+\Delta x v) - f(p)}{\Delta x}$$

$$df_p(v) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c(1)) - f(c(0))}{\Delta x}$$
$$df_p(v) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\partial c_{\Delta x})}{\Delta x}$$

Consideremos agora uma 1-forma $\omega \in E^1(U)$ e um 2-caminho $c : I^2 \to U$ dado por

$$c_{\Delta x}(t_1, t_2) = p + t_1 \Delta x_1 v_1 + t_2 \Delta x_2 v_2$$

onde $p \in U$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$.

Mostraremos que a diferencial exterior de ω em p é dada pela variação da integral de linha de ω no bordo de c com relação a $\Delta x_1 \cdot \Delta x_2$. Mais precisamente,

Proposição 2.10.
$$d\omega_p(v_1, v_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} \int_{\partial c_{\Delta x}} \omega$$

Demonstração. O bordo de c é dado por

$$\partial c = \sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{\epsilon = 0,1} (-1)^{j+\epsilon} c \circ \sigma^2_{(j,\epsilon)} \right)$$

Para simplificar a notação coloquemos

$$\begin{aligned} c_1 &= c \circ \sigma^2_{(2,0)} \\ c_2 &= c \circ \sigma^2_{(1,1)} \\ c_3 &= c \circ \sigma^2_{(2,1)} \\ c_4 &= c \circ \sigma^2_{(1,0)} \end{aligned}$$

de forma que

$$\partial c = c_1 - c_3 + c_2 - c_4$$

onde

$$\begin{aligned} c_1(t_1) &= p + t_1 \Delta x_1 v_1 \\ c_2(t_2) &= p + \Delta x_1 v_1 + t_2 \Delta x_2 v_2 \\ c_3(t_1) &= p + t_1 \Delta x_1 v_1 + \Delta x_2 v_2 \\ c_4(t_2) &= p + t_2 \Delta x_2 v_2 \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \int_{\partial c_{\Delta x}} \omega &= \int_{\partial c_1} \omega - \int_{\partial c_3} \omega + \int_{\partial c_2} \omega - \int_{\partial c_4} \omega \\ &= \int_0^1 (c_1^* \omega - c_3^* \omega) + \int_0^1 (c_2^* \omega - c_4^* \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial c_{\Delta x}} \omega &= \int_0^1 (\omega_{p+t_1\Delta x_1 v_1}(\Delta x_1 v_1) - \omega_{p+t_1\Delta x_1 v_1+\Delta x_2 v_2}(\Delta x_1 v_1))dt_1 \\ &+ \int_0^1 (\omega_{p+\Delta x_1 v_1+t_2\Delta x_2 v_2}(\Delta x_2 v_2) - \omega_{p+t_2\Delta x_2 v_2}(\Delta x_2 v_2))dt_2 \\ \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}\int_{\partial c_{\Delta x}} \omega &= \lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{1}{\Delta x_2}\int_0^1 (\omega_p - \omega_{p+\Delta x_2 v_2})(v_1)dt_1 \\ &+ \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{1}{\Delta x_1}\int_0^1 (\omega_{p+\Delta x_1 v_1} - \omega_p)(v_2)dt_2\end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}\int_{\partial c_{\Delta x}} \omega = -\omega'_p(v_2,v_1) + \omega'_p(v_1,v_2) = d\omega_p(v_1,v_2)$$

□

Em geral temos:

Proposição 2.11. *Sejam $\omega \in E^k(U)$, $p, v_i \in \mathbb{R}^n$ e $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{k+1})$.*
Se $c_{\Delta x} : I^{k+1} \to \mathbb{R}^n$ é o $k+1$-caminho

$$c_{\Delta x}(t_1,\ldots,t_n) = p + \sum_{i=1}^{k+1} t_i \Delta x_i v_i$$

então

$$d\omega_p(v_1,\ldots,v_{k+1}) = \lim_{\Delta x}\frac{1}{\Delta x_1,\ldots,\Delta x_{k+1}}\int_{\partial c_{\Delta x}}$$

Teorema 2.12. *(Teorema de Stokes)*

Seja $\omega \in E^k(U)$ uma k-forma definida no aberto U do $\mathbb{R}^n$ e c uma $(k+1)$-cadeia em U. Então

$$\int_{\partial c}\omega = \int_c d\omega$$

Demonstração. Se $c = \sum \alpha_i c_i$ então $\partial c = \sum \alpha_i \partial c_i$ e

$$\int_{\partial c}\omega = \sum \alpha_i \int_{\partial c_i}\omega$$

$$\int_c d\omega = \sum \alpha_i \int_{c_i} d\omega$$

Portanto basta demonstrar o teorema para um $(k+1)$-caminho $c : I^{k+1} \to \mathbb{R}^n$. Pela definição temos

$$\int_c d\omega = \int_{I^{k+1}} c^*(d\omega) = \int_{I^{k+1}} dc^*(\omega)$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\partial c}\omega &= \sum(-1)^{j+\epsilon}\int_{c\circ\sigma^{k+1}_{(j,\epsilon)}}\omega &&= \sum(-1)^{j+\epsilon}\int_{I^k}(c\circ\sigma^{k+1}_{(j,\epsilon)})^*\omega \\ &= \sum(-1)^{j+\epsilon}\int_{I^k}(\sigma^{k+1}_{(j,\epsilon)})^*(c^*\omega) &&= \sum(-1)^{j+\epsilon}\int_{\sigma^{k+1}_{(j,\epsilon)}}(c^*\omega) \\ &= \int_{\partial I^{k+1}}(c^*\omega)\end{aligned}$$

Portanto basta demonstrar que se $\omega \in E^k(I^{k+1})$ então

$$\int_{I^{k+1}} d\omega = \int_{\partial I^{k+1}}\omega$$

Para fixarmos as idéias suporemos $k = 1$. O caso geral é semelhante.

Da proposição 2.10 temos que:

$$d\omega_p(e_1, e_2) = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x.\Delta y}\int_{\partial R}\omega$$

onde R é o retângulo orientado no sentido anti-horário determinado por p e pelos vetores $\Delta x e_1, \Delta y e_2$. Assim dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $|\Delta x| < \delta$ e $|\Delta y| < \delta$ então

$$\left| d\omega_p(e_1, e_2) - \frac{1}{\Delta x.\Delta y}\int_{\partial R}\omega\right| < \epsilon$$

$$\left| d\omega_p(e_1, e_2)\Delta x.\Delta y - \int_{\partial R}\omega\right| < \epsilon\Delta x.\Delta y$$

Da continuidade uniforme podemos encontrar uma partição P do retângulo I^2 tal que

$$\left| d\omega_{p_{ij}}(e_1, e_2)\Delta x_i.\Delta y_j - \int_{\partial R_{ij}}\omega\right| < \epsilon\Delta x_i.\Delta y_j$$

desde que $|P| < \delta$ sendo $P = P_1 \times P_2$, $P_1 : 0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$, $P_2 : 0 = y_0 < \ldots < y_m = 1$, $p_{ij} = (x_{i-1}, y_{j-1})$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e finalmente R_{ij} é o retângulo orientado determinado por p_{ij} e pelos vetores $\Delta x_i e_1, \Delta y_j e_2$.Da desigualdade triangular obtemos:

$$\left|\sum_{i,j} d\omega_{p_{ij}}(e_1, e_2)\Delta x_i.\Delta y_j - \sum\int_{\partial R_{ij}}\omega\right| \le \sum_{i,j}\left| d\omega_{p_{ij}}(e_1, e_2)\Delta x_i.\Delta y_j - \int_{\partial R_{ij}}\omega\right| \le \sum_{i,j}\epsilon\Delta x_i.\Delta y_j = \epsilon$$

Em virtude da orientação as integrais de linha sôbre os lados que são comuns a dois retângulos da partição cancelam-se e temos:

$$\sum\int_{\partial R_{ij}}\omega = \int_{\partial I^2}\omega$$

Segue que

$$\left|\sum_{i,j} d\omega_{p_{ij}}(e_1, e_2)\Delta x_i.\Delta y_j - \int_{\partial I^2} \omega\right| \leq \epsilon$$

Do critério de integrabilidade temos:

$$\int_{I^2} d\omega = \int_{I^2} d\omega_p(e_1, e_2)dxdy = \int_{\partial I^2} \omega$$

$\square$

CAPíTULO 3

Variedades