MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 5 - 05/11/2013

(1) (a) Ortonormalize os campos coordenados esféricos para obter um referencial móvel no aberto $U = \{(\theta, \varphi, r) : \theta \in \mathbb{R},\ \varphi \in]0, \pi[,\ r > 0\}$ e, a seguir, determine o referencial dual e as formas de conexão.

(b) Restrinja o referencial esférico à esfera $S^2(r)$ para obter um referencial móvel sobre ela. Escreva, neste referencial, a métrica e a segunda forma fundamental e calcule as curvaturas principais, média e gaussiana.

(2) Mostre que um referencial móvel definido num aberto de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ pode ser estendido localmente para um referencial do $\mathbb{R}^3$.

(3) Se g_1 e g_2 são métricas sobre uma superfície S, mostre que $ag_1 + bg_2$ onde $a, b > 0$ também é uma métrica sobre S.

(4) Seja $f(\theta, \varphi) = (e^{i\theta}, e^{i\varphi})$ parametrizando o toro $T^2 \subset \mathbb{R}^4$. Mostre que a métrica induzida é dada por $g = d\theta^2 + d\varphi^2$ e calcule sua curvatura.

(5) Calcule a curvatura gaussiana do plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$.

(6) Seja Δ o elemento de área de uma superficie S orientada. Para cada $u \in TS$ seja $J(u)$ o único vetor tal que

$$\langle Ju, v\rangle = \Delta(u, v)$$

(a) Mostre que: $Ju = 0$ então $u = 0$, $Ju \perp u$, $\langle Ju, Jv\rangle = \langle u, v\rangle$, $\langle Ju, v\rangle = -\langle u, Jv\rangle$ e $J^2 = -I$. No plano J nada mais é a multiplicação por i. Na esfera J induz a estrutura complexa da *esfera de Riemann*.

(b) Lembrando que $\omega_X(u) = \langle X, u\rangle$ e $\eta_X(u) = \Delta(X, u)$ mostre que: $\eta_X = \omega_{JX}$, $\omega_X \wedge \omega_Y = \langle JX, Y\rangle\Delta$, , $\omega_X \wedge \eta_Y = \langle X, Y\rangle\Delta$, $\eta_X \wedge \eta_Y = \langle JX, Y\rangle\Delta$.

(7) Considere no semi-plano $S = \{(u, v) :\ u > 0\}$ a métrica

$$g = du^2 + u^2 dv^2$$

.

Mostre que $K = 0$ e determine coordenadas (x, y) tal que $g = dx^2 + dy^2$. Voce consegue identificar esta situação com uma mudança de coordenadas conhecida?

(8) Sejam S uma superfície orientada no $\mathbb{R}^3$ e $c : I \to S$ parametrizada pelo comprimento de arco. O *referencial de Darboux* associado a c é o referencial ao longo de c constituído dos vetores (f_1, f_2, f_3) onde $f_1 = \dfrac{dc}{ds}$, (f_1, f_2) é uma base positiva de S e $f_3 = f_1 \wedge f_2$.

(a) Mostre que $\dfrac{df_i}{ds} = \sum a_i^j f_j$ onde $a_i^j = -a_j^i$.

(b) Definindo a *curvatura geodésica* por $k_g = a_1^2$, a *curvatura normal* por $k_n = a_1^3$ e a *torção geodésica* por $\tau_g = a_2^3$ temos:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{ds} &= \quad k_g f_2 + k_n f_3 \\[2ex] \dfrac{df_2}{ds} &= -k_g f_1 + \tau_g f_3 \\[2ex] \dfrac{df_3}{ds} &= -k_n f_1 - \tau_g f_2 \end{cases}$$

Conclua que $\dfrac{\delta c'}{ds} = k_g f_2 = k_g \cdot J(c')$ e, portanto, c é uma geodésica se e só se $k_g = 0$.

(c) Fixe um referencial móvel (e_1, e_2, e_3) onde $e_3 = f_3$ e seja φ a função angular tal que $c' = f_1 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$. Mostre que $k_g = \frac{d\varphi}{ds} - \omega(c')$ onde ω é a forma de conexão associada ao referencial móvel.

(d) Escolha c_i uma curva integral de e_i (isto é, tal que $\frac{dc_i}{ds}(s) = e_i(c(s))$ para $i = 1, 2$) e seja k_g^i a curvatura geodésica de c_i. Mostre que:

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + \cos\varphi k_g^1 + \sin\varphi k_g^2 \quad \textit{(fórmula de Liouville)}$$

(9) Seja M uma superfície riemanniana e G um grupo de isometrias de M operando descontinuamente em M. Considere a métrica em $S = M/G$ tal que a projeção $\pi : M \to S = M/G$ seja uma isometria local. Mostre que se $c : I \to M$ é uma geodésica então $\gamma = \pi \circ c$ é uma geodésica de S.

(10) Mostre que as geodésicas da esfera são os grandes círculos e descreva as geodésicas do plano projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(11) Seja f uma isometria de uma superfície S e $p \in S$. Se $f(p) = p$ e $df_p = Id$ use o fato que f leva geodésicas em geodésicas para mostrar que $f = Id$.

(12) Seja S uma superfície riemanniana que admite um sistema de coordenadas (x, y) tal que a métrica é dada por

$$g = Edx^2 + Gdy^2$$

onde E, G são funções diferenciáveis e positivas. Mostre que

$$K = -\frac{1}{EG}\left(\left(\frac{(\sqrt{G})_x}{\sqrt{E}}\right)_x + \left(\frac{(\sqrt{E})_y}{\sqrt{G}}\right)_y\right)$$

(13) Sejam S uma superfície riemanniana orientada e Φ o seu atlas. Seja Φ^ω o sub-atlas formado das cartas $\varphi(p) = (x(p), y(p))$ tais que a métrica exprime-se na forma

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) \quad (\textit{coordenadas conformes})$$

Mostre que as mudanças de coordenadas são holomorfas, isto é verificam as equações de Cauchy-Riemann.

(14) Determine a característica de Euler-Poincaré da superfície

$$S = \{p \in \mathbb{R}^3 : x^2(p) + y^4(p) + z^6(p) = 1\}$$

(15) Seja S uma superfície riemanniana compacta, conexa e orientável. Mostre que:

(a) se $K = 0$, então S é homeomorfa ao toro T^2;

(b) se $K > 0$, então S é homeomorfa à esfera S^2.

(16) Seja S uma superfície riemanniana orientada com curvatura $K \leq 0$. Mostre que duas geodésicas c_1 e c_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar num outro ponto q de S de forma que elas limitem uma região cujo bordo é constituído por elas.

(17) Uma *região poligonal* de uma superfície S é um subconjunto $\mathcal{P} \subset S$ homeomorfo a uma região poligonal do plano cujo bordo $\partial\mathcal{P}$ é uma curva suave por partes. Diremos

que $\mathcal{P}$ é um *polígono geodésico* se seu bordo é constituído por segmentos de geodésicas. Mostre que se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, então

$$\sum \alpha_i = (n-2)\pi + \int_{\mathcal{P}} K dA$$

(18) Seja S uma superfície orientada, conexa e compacta. Se existe sobre S um campo de vetores que nunca se anula, então $\chi(S) = 0$.

(19) Mostre que as geodésicas do disco de Poincaré (veja lista anterior) são dadas pelos arcos das circunferências ortogonais ao bordo, os quais estão no interior do disco.

(20) Se T é um triângulo geodésico no disco de Poincaré, então $A(T) = \pi - \Sigma\alpha_i$ onde $A(T)$ é a área e α_i são os ângulos internos do triângulo.