MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 4 - 08/10/2013

(1) Um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ onde M é uma variedade diferenciável é uma derivação no espaço das funções $E^0(M)$.

(a) Mostre que se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $X \circ Y - Y \circ X$ é uma derivação e portanto determina um campo de vetores $[X, Y]$ tal que

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

$[X, Y]$ é chamado o *O Colchete de Lie* de X com Y.

(b) Mostre que o Colchete de Lie tem as seguintes propriedades:

i. $[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é bilinear e anti-simétrica.

ii. $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (Identidade de Jacobi)
O colchete de Lie com estas propriedades expressam que o conjunto dos campos de vetores é uma *Álgebra de Lie*.

(2) Seja $\omega \in E^1(M)$ e X, Y campos de vetores sôbre M. Então

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

(3) Utilize o exercício anterior para mostar que

$$(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

(4) Mostre que as isometrias do $\mathbb{R}^3$ são dadas por $f(x) = A(x) + b$ onde $A \in O(3)$ e $b \in \mathbb{R}^3$.

(5) Mostre que as isometrias do $\mathbb{R}^2$ são dadas por $f(x) = A(x) + b$ onde $A \in O(2)$ e $b \in \mathbb{R}^2$.

(6) Mostre que as isometrias da esfera $S^2(R)$ são obtidas restringindo as isometrias $A \in O(3)$ do $\mathbb{R}^3$ à esfera $S^2(R)$.

(7) Seja D^2 o *disco de Poincaré* com a métrica

$$g = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2+dy^2).$$

(a) Mostre que a métrica g é dada em coordenadas complexas por

$$g = \frac{4}{(1-z\bar{z})^2}(dzd\bar{z}).$$

(b) Mostre que a inversão na circunferência com centro no ponto $(a,0)$ ortogonal ao bordo do círculo D^2 é dada por $\sigma(z) = \dfrac{a\bar{z}-1}{\bar{z}-a}$. Mostre também que σ é uma isometria do disco. (Note que $|a|>1$).

(c) Substituindo a por $1/a$, uma inversão numa circunferência com centro no eixo x é dada por $\sigma_a(z) = \dfrac{\bar{z}-a}{a\bar{z}-1}$ onde $|a|<1$. Observe que para $a=0$ temos a reflexão no eixo y. $(1/a=\infty)$. Mostre que

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \frac{z+c}{cz+1}$$

onde $c = \dfrac{b-a}{1-ab}$.

(d) Defina $\tau_c(z) = \dfrac{z+c}{cz+1}$ para $|c|<1$. Mostre que $\tau_c \circ \tau_d = \dfrac{z+e}{ez+1}$ onde $e = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

(e) Defina no intervalo $I =]-1,1[$ a operação

$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Mostre que I com esta operação é um grupo abeliano e que $\text{tgh} : \mathbb{R} \to I$ é um isomorfismo de grupos.

(f) Mostre que o grupo de isometrias do disco de Poincaré é formado das transformações da forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z+c}{cz+1}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $c \in D^2$.

(8) Mostre que o grupo de isometrias do hiperboloide H é o subgrupo $G \subset O(2,1)$ que fixa H^2.