MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 3 - 24/10/2013

(1) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciavel e $N(x) = x$ o campo normal a esfera S^2. Se $\langle \nabla_x f, N(x) \rangle > 0$ mostre que existe p no interior da esfera tal que $\nabla_p f = 0$.

(2) Seja S uma superfície compacta orientada por uma 2-forma η.

(a) Se ω é uma 1-forma sôbre S, mostre que existe um ponto $p \in S$ tal que $d\omega_p = 0$.

(b) Conclua que η não é exata e portanto $H^2(S) \neq \{0\}$.

(3) Uma *ação* (ou operação) de um grupo G sôbre uma variedade M é uma aplicação $\mu : G \times M \to M$ tal que as aplicações $\mu_g : M \to M$ definidas por $\mu_g(p) = \mu(g, p)$ são diferenciaveis e verificam as seguintes propriedades:

(a) $\mu_g \circ \mu_h = \mu_{gh}$

(b) $\mu_e = I$ (e identidade do grupo)

i. Mostre que $\mu_{g^{-1}} = \mu_g^{-1}$ e portanto μ_g é um difeomorfismo.

ii. Se G está munido da topologia discreta então μ é continua.

A seguir vamos simplificar a notação colocando $g.p = \mu(g, p) = \mu_g(p)$

(4) Dizemos que G *opera descontinuamente* em M se todo ponto p de M admite uma vizinhança V tal que $g.V \cap V = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Uma tal vizinhança será chamada de *Vizinhança Fundamental*.

(a) Se $G_p = \{g : g \cdot p = p$ é a isotropia em p, mostre que $G_p = \{e\}$.

(b) A aplicação $G :\to G \cdot p$, $g \to g \cdot p$ é injetora.

(c) Mostre que G é enumeravel. (Lembre que M tem base enumeravel)

(5) Sejam $\tilde{M}$ e M variedades diferenciáveis conexas. Uma aplicação $p : \tilde{M} \to M$ é dita *de recobrimento diferenciável* se

(i) é diferenciável e

(ii) todo $x \in M$ admite uma vizinhança aberta V tal que $p^{-1}(V) = \bigcup \tilde{V}_i$, onde os $\tilde{V}_i$ são abertos dois a dois disjuntos e $p : \tilde{V}_i \to V$ é um difeomorfismo.

A vizinhança V é chamada de *vizinhança distinguida* e $(\tilde{M}, p)$ de *recobrimento* de M.

Mostre que se G opera descontinuamente em M, então $\pi : M \to M/G$ é uma aplicação de recobrimento.

(6) Considere a aplicação $e : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $e(\theta) = e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Se $c : [a, b] \to S^1$ é suave por partes e θ_0 é tal que $e(\theta_0) = c(a)$, mostre que existe uma única função diferenciável $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(a) $\theta(a) = \theta_0$

(b) $c(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$

(7) (a) Considere uma ação descontinua de G sobre M. Defina a relação de equivalência:

$$p \sim q \iff \text{ existe } g \in G \text{ tal que } q = g \cdot p.$$

Seja $[p]$ a classe de equivalência de p. Então $[p] = G \cdot p$ é chamada de órbita do ponto p. Designemos por M/G o espaço quociente munido da topologia quociente e por $\pi : M \to M/G$ a projeção.

i. Mostre que se V é uma vizinhança fundamental então $\pi|_V : V \to [V]$ é um homeomorfismo e $\pi^{-1}([V]) = \bigcup_{g \in G} gV$.

ii. Sendo Φ o atlas de M defina $\widetilde{\Phi}$ como a coleção das aplicações $\varphi \circ (\pi|_V)^{-1}$ onde $\varphi \in \Phi$ e $Dom(\varphi) = V$ é uma vizinhança fundamental. Mostre que $\widetilde{\Phi}$ define um atlas sobre M/G.

(b) Prove que M/G é orientável se e só se M é orientável as aplicações μ_g preservam a orientação de M.

(c) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = S^1 \times \mathbb{R}$.

(d) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1^n)y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} =$ faixa de Moebius infinita.

(e) O grupo $\mathbb{Z}_2$ opera no $\mathbb{R}^3$ pela ação $1 \cdot p = p, (-1) \cdot p = -p$. Note que a isotropia na origem é todo o grupo e portanto a ação não é descontinua mas a restrição da ação a $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ o é. Seja $S \subset \mathbb{R}^3 - \{0\}$ uma superfície simétrica em relação a origem, isto é invariante pela ação. Então $\mathbb{Z}_2$ opera descontinuamente em S e podemos considerar a superfície $S/\mathbb{Z}_2$. Vejamos alguns casos:

i. Mostre que $S^2/\mathbb{Z}_2 = P^2(\mathbb{R})$.

ii. Se $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\ ,\ |z| < 1\}$ é o cilindro então $S/\mathbb{Z}_2$ é a faixa de Moebius.

iii. Se S é o toro obtido girando a circunferência $(x-2)^2 + z^2 = 1\ ,\ y = 0$ em torno do eixo z então $S/\mathbb{Z}_2$ é a garrafa de Klein.

(8) Considere no $\mathbb{R}^3$ a folha do hiperboloide $H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$.

(a) Dado um ponto $p = (x, y, z) \in H$, seja $(u, v, 0)$ o ponto onde a reta que passa por p e pelo ponto $(0, 0, -1)$ encontra o plano xy. Defina a função φ por $\varphi(u, v) = (x, y, z)$. Verifique que o domínio de φ é o disco unitário aberto e determine em coordenadas a função $\varphi(u, v) = (x, y, z)$.

(b) Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido da métrica de Lorentz $g(u, u) = dx(u)^2 + dy(u)^2 - dz(u)^2$. Calcule $h = \varphi^* g$.

(c) A inversão no circulo de centro O e raio R é a transformação σ que a cada ponto P do plano diferente de O associa o ponto Q na semireta $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$. Determine a expressão de σ num sistema de coordenadas com origem no ponto O.

(d) Sejam C o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ e σ a inversão neste círculo. Mostre que a imagem do círculo $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ é o semiplano $y \geq 2$ e calcule $\sigma^* h$ onde h é a métrica encontrada no item b transladada para o círculo $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

(e) Mostre que a equação de uma circunfêrencia ou de uma reta em coordenadas complexa é $az\overline{z} + bz + \overline{b}\overline{z} + c = 0$ onde $a, c \in \mathbb{R}$ e a inversão σ na circunfêrencia unitária é dada por $\sigma(z) = \frac{1}{\overline{z}}$. Utilize isto para mostrar que a imagem de uma circunfêrencia ou uma reta por σ é uma circunfêrencia ou uma reta.

(9) Seja $S^n(r)$ a esfera de raio r no $\mathbb{R}^{n+1}$, $N = (0, 0, \ldots, 1)$ e $S = (0, 0, \ldots, -1)$ o polo norte e o polo sul respectivamente.

(a) Determine φ_n e φ_s as projeções estereográficas a partir do polo norte e sul respectivamente.

(b) Mostre que $(\varphi_s)^{-1} \circ \varphi_n : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ é a inversão na esfera $S^{n-1}(r)$.

(10) Generalize para $P^n(\mathbb{R})$ a estrutura de variedade dada em coordenadas não homogeneas análogo ao $P^2(\mathbb{R})$.

(11) Seja S uma superfície compacta triangulada, F o número de faces da triangulação, A o número de arestas e V o número de vértices. A característica de *Euler-Poincaré* de S é definida por

$$\chi(S) = V - A + F$$

(a) Projete o bordo do cubo I^3 sôbre a esfera S^2 para obter uma triangulação e conclua que $\chi(S^2) = 2$.

(b) Determine uma triangulação do toro $T^2 = S^1 \times S^1$ e calcule $\chi(T^2)$.