MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 2 – 02/09/2013

(1) Seja X um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$. Defina *a contração na direção X*

$$i_X : E^k(\mathbb{R}^n) \to E^{k-1}(\mathbb{R}^n)$$

por $(i_X\omega)(p) = i_{X(p)}\omega(p)$.

Se $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ e $X = \sum X^j e_j$ calcule $i_X\omega$ e mostre que:

(a) $i_X \circ i_X = 0$

(b) $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge i_X(\omega_2)$ onde $\omega^1 \in E^k(\mathbb{R}^n)$
Note que, em particular temos $i_X(f\omega) = i_{(fX)}\omega = f i_X\omega$, onde $f \in E^0(\mathbb{R}^n)$

(2) Considere as formas diferenciais no $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \\ \omega_2 &= dz - xdy + ydx \\ \omega_3 &= dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

e o campo de vetores $X(x, y, z) = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Calcule $d\omega_1,\ d\omega_2,\ i_X\omega_2,\ i_X\omega_3,\ \omega_1 \wedge \omega_2\ \omega_2 \wedge d\omega_2$.

(3) Use a definição de gradiente ($\omega_{\nabla f} = df$) para mostrar que $\nabla f = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x^i} e_i$

(4) Seja $X(p) = \sum a_i(p)e_i$ um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$. Use a definição de rotacional ($\eta_{rotX} = d(\omega_X)$) para deduzir uma fórmula do rotacional nas coordenadas usuais.

(5) Deduza a fórmula do $div(X)$ a partir da definição ($\Delta_{div(X)} = d(\eta_X)$).

(6) O *laplaciano* de uma função $f \in E^0(\mathbb{R}^n)$ é definido por $\Delta f = div(\nabla f)$. Mostre que $\Delta f = \sum \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(7) Mostre que:

(a) $div(fX) = \langle \nabla f, X \rangle + f div(X)$

(b) $\Delta(fg) = 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g + g\Delta f$

(c) $\text{rot}(fX) = \nabla f \wedge X + f\text{rot}(X)$

(8) Se F é um campo que tem direção constante, mostre que $\text{rot}(F)$ é ortogonal a F.

(9) Seja S uma superfície fechada orientada pela normal exterior n que limita um sólido Ω. Se f, g são funções diferenciáveis definidas num aberto que contém Ω, mostre que valem as Identidades de Green:

(a) $\iint_S \dfrac{\partial f}{\partial n}\, dA = \iiint_\Omega \triangle f\ dV$

(b) $\iint_S f\dfrac{\partial g}{\partial n}\, dA = \iiint_\Omega (f\triangle g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle)\ dV$

(c) $\iint_S (f\dfrac{\partial g}{\partial n} - g\dfrac{\partial f}{\partial n})\ dA = \iiint_\Omega (f\triangle g - g\triangle f)\ dV$

(10) Mostre que o problema de Dirichlet $\triangle u = f$ em Ω , $u = g$ em $\partial\Omega$ admite no máximo uma solução.

(11) Mostre que duas soluções para o problema de Neumann $\triangle u = f$ em Ω , $\langle \nabla u, n\rangle = g$ em $\partial\Omega$ diferem por uma constante.

(12) Se X é um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$ mostre que ω_X é fechada se e somente se a matriz jacobiana $J(X)$ de X é simétrica.

(13) Se X é um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$ mostre que η_X é fechada se e somente se o traço da matriz jacobiana $J(X)$ de X é nulo.

(14) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear tal que $\langle T(u), T(v)\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ onde $\lambda > 0$. Se U é um subconjunto Jordan mensurável do $\mathbb{R}^n$ mostre que $vol(T(U)) = \lambda^n vol(U)$.

(15) Seja $\omega \in E^1(U)$ onde $U \in (\mathbb{R}^n)$ é um aberto estrelado com repeito a origem. Dizemos que ω é homogênea de grau r (r natural) se para todo $t > 0$ tem-se que $\omega_{tx} = t^r\omega_x$

(a) Mostre que $\omega'_x(x) = r\omega_x$.

(b) Use a primitiva do Lema de Poincaré para mostrar que se ω é fechada então $f(x) = \omega_x(x)/(r+1)$ é uma primitiva de ω.

(16) Verifique se as formas abaixo são homogêneas e fechadas. Determine uma primitiva caso exista.

(a) $\omega_1 = yzdx + zxdy + xydz$

(b) $\omega_2 = \dfrac{yzdx + zxdy + xydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(17) Considere as formas

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{r^\alpha}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Para quais α a forma ω é homogenea e fechada.

(18) As *coordenadas esféricas* no espaço são dadas pela aplicação $c(r,\theta,\varphi) = (x,y,z)$ onde

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi \end{cases}$$

sendo $r > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi$.

(a) Sendo $\Delta = dx \wedge dy \wedge dz$ o elemento de volume do $\mathbb{R}^3$ calcule $c^*\Delta$.

(b) Sendo $V(p) = p/r^3$ onde $p = (x,y,z)$, mostre que a 2-forma η_V é fechada.

(c) Seja $f(\theta,\varphi) = (x,y,z)$ definida no retângulo $D =]0,2\pi[\times]0,\pi[$. Calcule $\iint_D f^*\eta_V$ onde $V(p) = p/r^3$

(d) Sendo $N(p) = p/r$ calcule $\iint_D f^*\eta_N$

(19) *Coordenadas cilíndricas* no $\mathbb{R}^3$ são dadas pela aplicação $c(r,\theta,z) = (x,y,z)$ onde

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \quad \text{sendo } r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi$$

(a) Calcule dx, dy, dz em termos das coordenadas r, θ, z.

(b) Seja (e_r, e_θ, e_z) a base dual de $(dr, d\theta, dz)$. Use o fato de que $v = dx(v)e_1 + dy(v)e_2 + dz(v)e_3$ e $v = dr(v)e_r + d\theta(v)e_\theta + dz(v)e_z$ para determinar as expressões de e_r, e_θ, e_z em termos de e_1, e_2, e_3.

(c) Mostre que $e_r = \dfrac{\partial c}{\partial r}, e_\theta = \dfrac{\partial c}{\partial \theta}, e_z = \dfrac{\partial c}{\partial z}$.

(d) Se $v \in \mathbb{R}^3$ então $||v||^2 = dx^2(v) + dy^2(v) + dz^2(v)$. Encontre a expressão de $||v||^2$ em termos de $dr, d\theta, dz$.

(e) Determine a expressão do elemento de volume Δ do $\mathbb{R}^3$ em termos de $dr, d\theta, dz$.

(f) A expressão em coordenadas cilíndricas de uma função diferenciavel $f : U \to \mathbb{R}$ onde $U \subset \mathbb{R}^3$ é aberto é a função $f \circ c$. É usual escrever $f(r, \theta, z) = (f \circ c)(r, \theta, z)$. A diferencial de f em coordenadas cilíndricas é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

ou

$$df = \frac{\partial f}{\partial e_r} dr + \frac{\partial f}{\partial e_\theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial e_z} dz$$

Dê a expressão em coordenadas cilíndricas de f e de sua diferencial nos seguintes casos:

i. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$

ii. $f(x, y, z) = \dfrac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(g) Encontre as expressões do gradiente de f, do rotacional de f e do divergente de f em coordenadas cilíndricas.

(20) Seja X um campo de vetores no $\mathbb{R}^3$. Defina:

$$L_X : E^k(U) \to E^k(U)$$

por

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

$L_X(\omega)$ é chamada a *derivada de Lie* de ω na direção X.

(a) Mostre que $L_X \circ d = d \circ L_X$ e $L_X \circ i_X = i_X \circ L_X$

(b) Mostre que $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_X(\eta)$

(c) Se $\omega = f dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots dx^{i_k}$ e $X = \sum X^i e_i$ mostre que

$$L_X(\omega) = df(X) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots dx^{i_k} + f \sum_{j=1}^{k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dX^{i_j} \wedge \ldots dx^{i_k}$$

(21) Considere o campo identidade $I(x) = x$ no $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $L_I(f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = (df_x(x) + kf(x)) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$

(b) Se $\eta = adx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^k$ então

$$L_I(\omega) = \eta \Leftrightarrow df_x(x) + kf(x) = a(x)$$

isto é L_I é bijetora se e só se a equação a derivadas parciais $df_x(x) + kf(x) = a(x)$ tem soluçao única.

(c) Comecemos analisando o caso unidimensional ($n = 1$). Tomando $k = 1$, temos que $L_I : E^1(\mathbb{R}) \to E^1(\mathbb{R})$ e $L_I(f(x)dx) = (xf'(x) + f(x))dx$. Mostre que a equação $xf'(x) + f(x) = a(x)$ tem como solução $xf(x) = \int_0^x a(u)du$. Faça a mudança de variável $u = xt$ e deduza que $f(x) = \int_0^1 a(xt)dt$.

(d) Consideremos agora o caso n-dimensional e $k \geq 1$. Na equação $df_x(x) + kf(x) = a(x)$ substitua x por tx e multiplique por t^{k-1}. Mostre que $f(x) = \int_0^1 t^{k-1} a(tx)dt$ é a única solução da equação acima. Conclua que L_I é um isomorfismo.

(e) Se $K = i_I \circ L_I^{-1} : E^k(\mathbb{R}^n) \to E^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mostre que $d \circ K + K \circ d = Id$. Desta forma, se ω é fechada então ela é exata. (Lema de Poincaré)

(22) Seja β_i o número de faces i-dimensional do cubo I^{k+1} e $\chi(I^{k+1}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \beta_i$. Mostre que $\chi(I^{k+1}) = 2$ se k é par e $\chi(I^{k+1}) = 0$ se k é impar.

(23) O Cone com centro O gerado por um k-caminho $c : I^k \to \mathbb{R}^n$ é o (k+1)-caminho $Ic : I^{k+1} \mapsto \mathbb{R}^n$

$$(Ic)(s,t) = sc(t)$$

onde $s \in I$ e $t \in I^k$. Mostre que $\partial(Ic) + I(\partial c) = c$.

(24) (a) Dado um ponto x e um vetor v no $\mathbb{R}^n$ considere o 1-caminho $c(t) = x + t\Delta x \cdot v$. Determine o bordo de Ic.

(b) Seja η uma 2-forma fechada e ω uma 1-forma tais que $\int_{\partial(Ic)} \omega = \int_{Ic} \eta$ para todo 1-caminho c como no item anterior.Mostre que

$$\int_0^1 (\omega_{sx}(x) - \omega_{s(x+\Delta x \cdot v)}(x + \Delta x \cdot v))ds + \int_0^1 \omega_{x+t\Delta x \cdot v}(\Delta x \cdot v)dt =$$

$$\int_0^1 (\int_0^1 \eta_{s(x+t\Delta x \cdot v)}(x + t\Delta x \cdot v, s\Delta x \cdot v)ds)dt$$

(c) Divida a expressão acima por Δx e tome o limite com Δx tendendo a 0 para concluir que

$$\omega_x(v) - df_x(v) = \int_0^1 \eta_{tx}(x, tv)dt$$

onde $f(x) = \int_0^1 \omega_{sx}(x)ds$. Assim se definirmos ω por

$$\omega_x(v) = \int_0^1 \eta_{tx}(x, tv)dt$$

obtemos a primitiva do lema de Poincaré.

(25) Considere a 1-forma no $\mathbb{R}^2$ dada por $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ e os 1-caminhos $c_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $c_2(t) = (a\cos t, b\sin t)$. Utilize o teorema de Stokes no plano para mostrar que $\int_{c_2} \omega = 2\pi$ e então mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}$$

.

(26) Seja $\omega = ydx + xdy + 2zdz$. Encontre f tal que $df = \omega$ e calcule $\int_c \omega$ onde c é o segmento indo do ponto $p = (1, 0, 0)$ ao ponto $q = (a, b, c)$.