MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 1 – 08/08/2013

(1) Mostre que as funções coordenadas (x^i) relativas a uma base (e_i) de um espaço vetorial V de dimensão n formam uma base de V^*.

(2) Se S é um subespaço de dimensão $n-1$ de um espaço vetorial V de dimensão n, então o seu anulador S^0 é um subespaço de V^* de dimensão 1.

(3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Para cada $a \in V$, defina a forma linear ω_a por $\omega_a(v) = \langle a, v\rangle$. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \omega: & V & \to & V^* \\ & a & \mapsto & \omega_a \end{array}$$

é um isomorfismo.

(4) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Mostre que:

(a) $\langle \omega_a, \omega_b\rangle = \langle a, b\rangle$ define um produto interno em V^*;

(b) se (e_i) é uma base ortonormal de V, então sua base dual (x^i) é uma base ortonormal de V^*.

(5) Considere a função polinomial $\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$.

Se $\sigma \in S_n$ defina $\sigma\phi$ por

$$(\sigma\phi)(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i<j}(X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$$

e ϵ_σ por $\sigma\phi = \epsilon_\sigma\phi$. Mostre que:

(a) $\epsilon : S_n \to \{1, -1\}$ é um homomorfismo de grupos.

(b) $A_n = \{\sigma \in S_n : \epsilon_\sigma = 1\}$ é um subgrupo normal de S_n.

(6) Seja $\varphi : V^k \to \mathbb{R}$ uma função k-linear. Mostre que:

(a) φ é alternada se, e só se,

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k);$$

(b) φ é simétrica se, e só se,

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = \varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k).$$

(7) Sejam Δ a função determinante usual do $\mathbb{R}^3$, (x^1, x^2, x^3) a base dual da base canônica, $a = (1, 1, 1)$ e $b = (1, -1, 1)$.

(a) Escreva $\omega(v) = \Delta(a, b, v)$ na base (x^1, x^2, x^3).

(b) Escreva $\eta(u, v) = \Delta(a, u, v)$ na base $(x^1 \wedge x^2, x^2 \wedge x^3, x^3 \wedge x^1)$.

(c) Escreva Δ na base $x^1 \wedge x^2 \wedge x^3$.

(8) Sejam ω, η, φ as formas no $\mathbb{R}^3$ dadas por $\omega = -bx^1 + ax^2$, $\eta = cx^1 \wedge x^3 + dx^2 \wedge x^3$ e $\varphi = x^1 + x^2 + x^3$. Calcule $\omega \wedge \eta$, $\eta \wedge \eta$, $\omega \wedge \varphi$.

(9) Sejam ω e η formas de graus pares. Mostre que $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$.

(10) Se ω é uma forma de grau impar então $\omega \wedge \omega = 0$.

(11) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x^1, x^2, x^3) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = x^1 + x^2 + x^3$, $y^2 = x^2 + x^3$ e $y^3 = x^3$.

(a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.

(b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.

(c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.

(12) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x^1, x^2) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = x^1 + x^2$, $y^2 = x^2 - x^1$ e $y^3 = x^2 + 2x^1$.

(a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.

(b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.

(c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.

(13) Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x) = (y^1, y^2, y^3)$ onde $y^1 = ax$, $y^2 = bx$ e $y^3 = cx$.

(a) Se $\omega = y^1 + y^2$ calcule $T^*\omega$.

(b) Se $\eta = y^1 \wedge y^2 + y^2 \wedge y^3 + y^3 \wedge y^1$ calcule $T^*\eta$.

(c) Se $\Delta = y^1 \wedge y^2 \wedge y^3$ calcule $T^*\Delta$.

(14) Seja $b \in \bigwedge^2((\mathbb{R}^3)^*)$. Mostre que existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $b(u, v) = T(u \wedge v)$, onde $u \wedge v$ é o produto vetorial usual.

(15) Seja Δ uma função determinante sobre um espaço vetorial V de dimensão n (isto é, $0 \neq \Delta \in \bigwedge^n(V^*)$). Mostre que se W é um espaço vetorial e $\varphi : V^n \to W$ é n-linear alternada, então existe $w \in W$ tal que $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = \Delta(v_1, \ldots, v_n)w$.

(16) Seja Δ uma função determinante sobre um espaço vetorial V de dimensão n. Escolha uma base (e_i) de V tal que $\Delta(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Mostre que existe uma única função determinante Δ^* sobre V^* tal que $\Delta^*(x^1, \ldots, x^n) = 1$, onde (x^i) é a base dual de (e_i) e que Δ^* não depende da escolha desta base.

(17) Mostre que se $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, então existe uma única $\bar{\omega} : \bigwedge^k(V) \to \mathbb{R}$ linear tal que $\omega(v_1, \ldots, v_n) = \bar{\omega}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$. Mostre também que a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k(V^*) & \to & \bigwedge^k(V)^* \\ \omega & \mapsto & \bar{\omega} \end{array}$$

é um isomorfismo.

(18) Se $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, defina a *contração de ω na direção $a \in V$* por

$$i_a(\omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(a, v_1, \ldots, v_{k-1}).$$

(a) Mostre que $i_a : \bigwedge^k(V^*) \to \bigwedge^{k-1}(V^*)$ é linear.

(b) Se (e_i) é uma base de V e (x^i) é sua base dual, calcule $i_{e_j}(x^{i_1} \wedge \ldots \wedge x^{i_k})$ para $I = (i_1, \ldots, i_k) \in C_{n,k}$.

(19) Dizemos que $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$ é *decomponível* se existem $\omega^1, \ldots, \omega^k \in V^*$ tais que $\omega = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$. Dizemos que ω é *indecomponível* se não for decomponível.

(a) Mostre que toda k-forma linear em $\mathbb{R}^3$ é decomponível.

(b) Mostre que $x^1 \wedge x^2 + x^3 \wedge x^4$ é uma 2-forma indecomponível do $\mathbb{R}^4$.

(20) Seja $\Delta \in \bigwedge^n(V^*)$ uma função determinante.

(a) Mostre que a aplicação $\varphi : V \to \bigwedge^{n-1}(V^*)$ definida por

$$\varphi_a = \varphi(a) = i_a(\Delta)$$

é um isomorfismo.

(b) Mostre que $\varphi_a(v_1, \ldots, v_{n-1}) = (-1)^{n+1} \cdot \omega_a(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})$.

(21) Mostre que toda $(n-1)$-forma é decomponível. (Utilize (20.a))

(22) Sejam $a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}, x \in V^*$. Mostre que

$$(x+a^1)\wedge(x+a^2)\wedge\ldots\wedge(x+a^{n-1}) = x\wedge a^2\wedge\ldots\wedge a^{n-1}+a^1\wedge x\wedge\ldots\wedge a^{n-1}+\ldots+a^1\wedge\ldots a^{n-2}\wedge x$$

$$+a^1 \wedge a^2 \wedge \ldots \wedge a^{n-1}$$

(23) Utilize (22) para dar outra demonstração de (21).

(24) Considere as coordenadas usuais (y^i) do $\mathbb{R}^n$. Sejam $\omega^1, \ldots, \omega^k \in V^*$ e $T : V \to \mathbb{R}^k$ definida por $T(v) = (\omega^1(v), \ldots, \omega^k(v))$. Mostre que

$$(\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = (y^1 \wedge \ldots \wedge y^k)(T(v_1), \ldots, T(v_k)).$$

(25) Seja $T : V \to W$ linear. Fixe uma base (y^j) de W^*. Se $T(v) = \sum \omega^i(v) f_i$ onde f_i é dual de (y^j), mostre que $T^*(y^{i_1} \wedge \ldots \wedge y^{i_k}) = \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_k}$.

(26) Sejam (e_i) a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e (x^i) sua base dual. Sejam também $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1, 0)$ e $v_4 = (1, 1, 1, 1)$.

(a) Calcule $A(v_1, v_2)$ e $V(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Determine as coordenadas (a_{ij}) de $v_3 \wedge v_4$ na base $(e_i \wedge e_j)_{i<j}$.

(c) Verifique que $A(v_3, v_4)^2 = \sum_{i<j} a_{ij}^2 = ||v_3 \wedge v_4||^2$.

(27) Considere no $\mathbb{R}^3$ a função determinante usual Δ e, para cada $a \in \mathbb{R}^3$, sejam $\omega_a \in (\mathbb{R}^3)^*$ e $\varphi_a \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^3)^*$ definidas nos exercícios (3) e (20), respectivamente. Mostre que:

(a) $\omega_a \wedge \omega_b = \varphi_{a\wedge b}$.

(b) $\omega_a \wedge \varphi_b = \langle a, b\rangle \Delta$.

(28) Mostre que o quadrado da área de um paralelogramo determinado por dois vetores no $\mathbb{R}^3$ é igual à soma do quadrado das áreas dos paralelogramos projetados nos tres planos coordenados.

(29) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear anti-simétrica defina a 2-forma $\eta(u, v) = \langle T(u), v\rangle$. Pelo exercício 20 existe um vetor $\omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi_\omega = \eta$. Mostre que $T(v) = \omega \wedge v$. O vetor ω é chamado de *vetor de Darboux*.