MAT0336 - Geometria Diferencial II

Prova substitutiva - 11/12/2012

(1) Mostre que não existe uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfa ao toro T^2 que tenha curvatura gaussiana $K \geq 0$.

(2) Se $g = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ é a expressão de uma métrica em coordenadas conformes, mostre que

$$\triangle f = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

(3) (*Superfícies de Liouville*) Seja S uma superfície que admite coordenadas locais tal que a métrica tenha a seguinte expressão:

$$g = (a(x) + b(y))(dx^2 + dy^2)$$

onde a e b são funções positivas. Determine a forma de conexão no referencial óbvio e a expressão da curvatura gaussiana.

(4) Sejam X e Y campos unitários ao longo de uma curva $c : [a, b] \to S$ e seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ o ângulo orientado de X a Y. Mostre que

$$\frac{\delta Y}{dt} - \frac{\delta X}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}.$$