MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 6 - 22/11/2012

(1) Sejam S uma superfície orientada no $\mathbb{R}^3$ e $c : I \to S$ parametrizada pelo comprimento de arco. O *referencial de Darboux* associado a c é o referencial ao longo de c constituído dos vetores (f_1, f_2, f_3) onde $f_1 = \frac{dc}{ds}$, (f_1, f_2) é uma base positiva de S e $f_3 = f_1 \wedge f_2$.

(a) Mostre que $\frac{df_i}{ds} = \sum a_i^j f_j$ onde $a_i^j = -a_j^i$.

(b) Definindo a *curvatura geodésica* por $k_g = a_1^2$, a *curvatura normal* por $k_n = a_1^3$ e a *torção geodésica* por $\tau_g = a_2^3$ temos:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{ds} & = & k_g f_2 + k_n f_3 \\ \\ \dfrac{df_2}{ds} & = & -k_g f_1 + \tau_g f_3 \\ \\ \dfrac{df_3}{ds} & = & -k_n f_1 - \tau_g f_2 \end{cases}$$

Conclua que $\frac{\delta c'}{ds} = k_g f_2 = k_g J(c')$ e, portanto, c é uma geodésica se e só se $k_g = 0$.

(c) Fixe um referencial móvel (e_1, e_2, e_3) onde $e_3 = f_3$ e seja φ a função angular tal que $c' = f_1 = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2$. Mostre que $k_g = \frac{d\varphi}{ds} - \omega(c')$ onde ω é a forma de conexão associada ao referencial móvel.

(d) Escolha c_i uma curva integral de e_i (isto é, tal que $\frac{dc_i}{ds}(s) = e_i(c(s))$ para $i = 1, 2$) e seja k_g^i a cuvatura geodésica de c_i. Mostre que:

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + \cos\varphi k_g^1 + \sin\varphi k_g^2 \quad (\textit{fórmula de Liouville})$$

(2) Sejam S uma superfície riemanniana orientada e Φ o seu atlas. Seja Φ^ω o sub-atlas formado das cartas $\varphi(p) = (x(p), y(p))$ tais que a métrica exprime-se na forma

$$g = \lambda^2(dx^2 + dy^2) \quad (\textit{coordenadas conformes})$$

Mostre que as mudanças de coordenadas são holomorfas, isto é verificam as equações de Cauchy-Riemann.

(3) Determine a característica de Euler-Poincaré da superfície

$$S = \{p \in \mathbb{R}^3 : x^2(p) + y^4(p) + z^6(p) = 1\}$$

(4) Seja S uma superfície riemanniana compacta, conexa e orientável. Mostre que:

(a) se $K = 0$, então S é homeomorfa ao toro T^2;

(b) se $K > 0$, então S é homeomorfa à esfera S^2.

(5) Seja S uma superfície riemanniana orientada com curvatura $K \leq 0$. Mostre que duas geodésicas c_1 e c_2 que partem de um ponto $p \in S$ não podem se encontrar num outro ponto q de S de forma que elas limitem uma região cujo bordo é constituído por elas.

(6) Uma *região poligonal* de uma superfície S é um subconjunto $\mathcal{P} \subset S$ homeomorfo a uma região poligonal do plano cujo bordo $\partial\mathcal{P}$ é uma curva suave por partes. Diremos que $\mathcal{P}$ é um *polígono geodésico* se seu bordo é constituído por segmentos de geodésicas. Mostre que se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são os ângulos internos do polígono, então

$$\sum \alpha_i = (n-2)\pi + \int_{\mathcal{P}} K dA$$

(7) Seja S uma superfície orientada, conexa e compacta. Se existe sobre S um campo de vetores que nunca se anula, então $\chi(S) = 0$.

(8) Mostre que as geodésicas do disco de Poincaré (veja lista anterior) são dadas pelos arcos das circunferências ortogonais ao bordo, os quais estão no interior do disco.

(9) Se T é um triângulo geodésico no disco de Poincaré, então $A(T) = \pi - \Sigma\alpha_i$ onde $A(T)$ é a área e α_i são os ângulos internos do triângulo.