MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 5 - 05/11/2012

(1) Mostre que as isometrias do $\mathbb{R}^3$ são dadas por $f(x) = A(x) + b$ onde $A \in O(3)$ e $b \in \mathbb{R}$.

(2) Mostre que as isometrias da esfera $S^2(r)$ são obtidas restringindo as isometrias lineares do $\mathbb{R}^3$ à esfera.

(3) Seja D^2 o *disco de Poincaré* com a métrica

$$g = \frac{4}{(1 - x^2 - y^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

(a) Mostre que a métrica g é dada em coordenadas complexas por

$$g = \frac{4}{(1 - z\bar{z})^2}(dzd\bar{z}).$$

(b) Mostre que a inversão na circunferência com centro no ponto $(a, 0)$ ortogonal ao bordo do círculo D^2 é dada por $\sigma(z) = \dfrac{a\bar{z} - 1}{\bar{z} - a}$. Mostre também que σ é uma isometria do disco. (Note que $|a| > 0$).

(c) Substituindo a por $1/a$, uma inversão numa circunferência com centro no eixo x é dada por $\sigma_a(z) = \dfrac{\bar{z} - a}{a\bar{z} - 1}$ onde $|a| < 1$. Observe que para $a = 0$ temos a reflexão no eixo y. $(1/a = \infty)$. Mostre que

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \frac{z + c}{cz + 1}$$

onde $c = \dfrac{b - a}{1 - ab}$.

(d) Defina $\tau_c(z) = \dfrac{z + c}{cz + 1}$ para $|c| < 1$. Mostre que $\tau_c \circ \tau_d = \dfrac{z + e}{ez + 1}$ onde $e = \dfrac{a + b}{1 + ab}$.

(e) Defina no intervalo $I =]-1, 1[$ a operação

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab}.$$

Mostre que I com esta operação é um grupo abeliano e que $\mathrm{tgh} : \mathbb{R} \to I$ é um isomorfismo de grupos.

(f) Mostre que o grupo de isometrias do disco de Poincaré é formado das transformações da forma

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z + c}{cz + 1}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$ e $c \in D^2$.

(4) Mostre que o grupo de isometrias do plano hiperbólico H^2 é o subgrupo $G \subset O(2,1)$ que fixa H^2.

(5) Sejam $\tilde{M}$ e M variedades diferenciáveis conexas. Uma aplicação $p : \tilde{M} \to M$ é dita *de recobrimento* se

(i) é diferenciável e

(ii) todo $x \in M$ admite uma vizinhança aberta V tal que $p^{-1}(V) = \bigcup \tilde{V}_i$, onde os $\tilde{V}_i$ são abertos dois a dois disjuntos e $p : \tilde{V}_i \to V$ é um difeomorfismo.

A vizinhança V é chamada de *vizinhança distinguida* e $(\tilde{M}, p)$ de *recobrimento* de M. Mostre que se G opera descontinuamente em M (veja lista 4), então $\pi : M \to M/G$ é uma aplicação de recobrimento.

(6) Considere a aplicação $e : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $e(\theta) = e^{i\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Se $c : [a,b] \to S^1$ é suave por partes e θ_0 é tal que $e(\theta_0) = c(a)$, mostre que existe uma única função diferenciável $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(a) $\theta(a) = \theta_0$;

(b) $e(\theta(t)) = c(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

(7) (a) Ortonormalize os campos coordenados esféricos para obter um referencial móvel no aberto $U = \{(\theta, \varphi, r) : \theta \in \mathbb{R},\ \varphi \in]0,\pi[,\ r > 0\}$ e, a seguir, determine o referencial dual e as formas de conexão.

(b) Restrinja o referencial esférico à esfera $S^2(r)$ para obter um referencial móvel sobre ela. Escreva, neste referencial, a métrica e a segunda forma fundamental e calcule as curvaturas principais, média e gaussiana.

(8) Mostre que um referencial móvel definido num aberto de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ pode ser estendido localmente para um referencial do $\mathbb{R}^3$.

(9) Se g_1 e g_2 são métricas sobre uma superfície S, mostre que $ag_1 + bg_2$ onde $a, b > 0$ também é uma métrica sobre S.

(10) Seja $f(\theta, \varphi) = (e^{i\theta}, e^{\varphi})$ parametrizando o toro $T^2 \subset \mathbb{R}^4$. Mostre que a métrica induzida é dada por $g = d\theta^2 + d\varphi^2$ e calcule sua curvatura.

(11) Calcule a curvatura gaussiana do plano projetivo $P^2(\mathbb{R})$.

(12) Seja Δ o elemento de área de uma superficie S orientada. Para cada $u \in TS$ seja $J(u)$ o único vetor tal que

$$\langle Ju, v \rangle = \Delta(u, v)$$

(a) Mostre que: $Ju = 0$ então $u = 0$, $Ju \perp u$, $\langle Ju, Jv \rangle = \langle u, v \rangle$, $\langle Ju, v \rangle = -\langle u, Jv \rangle$ e $J^2 = -I$. No $\mathbb{R}^2$ J nada mais é a multiplicação por i que induz na *esfera de Riemann* uma estrutura complexa no fibrado tangente.

(b) Lembrando que $\omega_X(u) = \langle x, u \rangle$ e $\eta_X(u) = \Delta(X, u)$ mostre que: $\eta_X = \omega_{JX}$, $\omega_X \wedge \omega_Y = \langle JX, Y \rangle \Delta$, , $\omega_X \wedge \eta_Y = \langle X, Y \rangle \Delta$, $\eta_X \wedge \eta_Y = \langle JX, Y \rangle \Delta$.

(13) Considere no semi-plano $S = \{(u, v) : \ u > 0\}$ a métrica

$$g = du^2 + u^2 dv^2$$

.

Mostre que $K = 0$ e determine coordenadas (x, y) tal que $g = dx^2 + dy^2$. Voce consegue identificar esta situação com uma mudança de coordenadas conhecida?