MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 4- 18/10/2012

(1) Seja S uma superfície compacta triangulada, F o número de faces da triangulação, A o número de arestas e V o número de vértices. A característica de *Euler-Poincaré* de S é definida por

$$\chi(S) = V - A + F$$

(a) Projete o bordo do cubo I^3 sobre a esfera S^2 para triangulá-la e conclua que $\chi(S^2) = 2$.

(b) Determine uma triangulação do toro $T^2 = S^1 \times S^1$ e calcule $\chi(T^2)$.

(2) Sejam $D = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| \leq r\}$ e

$$\omega = \frac{zdx \wedge dy + ydz \wedge dx + xdy \wedge dz}{r}.$$

(a) Calcule $\int_D d\omega$ utilizando coordenadas esféricas.

(b) Calcule $\int_{\partial D} \omega$.

(3) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável e $N(x) = x$ o campo normal à esfera S^2. Se $\langle \nabla_x f, N(x) \rangle > 0$, mostre que existe p no interior da esfera tal que $\nabla_p f = 0$.

(4) Uma *ação* (ou *operação*) de um grupo G sobre uma variedade M é uma aplicação $\mu : G \times M \to M$ tal que as aplicações $\mu_g : M \to M$ definidas por $\mu_g(p) = \mu(g,p)$ são diferenciáveis e verificam as seguintes propriedades:

(a) $\mu_g \circ \mu_h = \mu_{gh}$;

(b) $\mu_e = I$ (onde e denota a identidade do grupo).

i. Mostre que $\mu_{g^{-1}} = \mu_g^{-1}$ e, portanto, μ_g é um difeomorfismo.

ii. Se G está munido da topologia discreta, então μ é contínua.

A seguir vamos simplificar a notação colocando

$$g \cdot p = \mu(g,p) = \mu_g(p).$$

(5) Dizemos que G *opera descontinuamente* em M se todo ponto p de M admite uma vizinhança V tal que $g \cdot V \cap V = \emptyset$ para todo $g \neq e$. Uma tal vizinhança será chamada de *vizinhança fundamental*.

   (a) Se $G_p = \{g : g \cdot p = p\}$ é a isotropia em p, mostre que $G_p = \{e\}$.

   (b) A aplicação $G \to G \cdot p$ dada por $g \to g \cdot p$ é injetora.

   (c) Mostre que G é enumerável. (Lembre que M tem base enumerável).

(6) Considere uma ação descontínua de G sobre M. Defina a relação de equivalência:

$$p \sim q \iff \text{ existe } g \in G \text{ tal que } q = g \cdot p.$$

Seja $[p]$ a classe de equivalência de p. Então $[p] = G \cdot p$ é chamada de *órbita* do ponto p. Designemos por M/G o espaço quociente munido da topologia quociente e por $\pi : M \to M/G$ a projeção.

   (a) Mostre que se V é uma vizinhança fundamental, então $\pi \restriction_V : V \to [V]$ é um homeomorfismo e
   $$\pi^{-1}([V]) = \bigcup_{g \in G} g \cdot V$$

   (b) Sendo Φ o atlas de M, defina $\widetilde{\Phi}$ como a coleção das aplicações $\varphi \circ (\pi \restriction_V)^{-1}$ onde $\varphi \in \Phi$ e $\mathrm{Dom}(\varphi) = V$ é uma vizinhança fundamental. Mostre que $\widetilde{\Phi}$ define um atlas sobre M/G.

(7) Prove que se M é orientada então M/G é orientável se, e só se, as aplicações μ_g preservam a orientação de M.

(8) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} = S^1 \times \mathbb{R}$.

(9) O grupo $\mathbb{Z}$ opera no $\mathbb{R}^2$ pela ação $n \cdot (x, y) = (x + n, (-1^n)y)$. Mostre que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} =$ faixa de Moebius infinita.

(10) O grupo $\mathbb{Z}_2$ opera na esfera S^2 pela ação $1 \cdot p = p, (-1) \cdot p = -p$. Mostre que $S^2/\mathbb{Z}_2 = P^2(\mathbb{R})$.