MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 3- 02/10/2012

(1) Seja β_i o número de faces i-dimensional do cubo I^{k+1} e $\chi(I^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\beta_i$. Mostre que $\chi(I^{k+1}) = 2$ se k é par e $\chi(I^{k+1}) = 0$ se k é impar.

(2) Considere no $\mathbb{R}^3$ a folha do hiperboloide $H = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$.

(a) Dado um ponto $p = (x, y, z) \in H$, seja $(u, v, 0)$ o ponto onde a reta que passa por p e pelo ponto $(0, 0, -1)$ encontra o plano xy. Verifique que o domínio de φ é o disco unitário aberto e determine em coordenadas a função $\varphi(u, v) = (x, y, z)$.

(b) Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido da métrica de Lorentz $g(u, u) = dx(u)^2 + dy(u)^2 - dz(u)^2$. Calcule $h = \varphi^* g$.

(c) A inversão no circulo de centro O e raio R é a transformação σ que a cada ponto P do plano diferente de O associa o ponto Q na semireta $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = R^2$. Determine a expressão de σ num sistema de coordenadas com origem no ponto O.

(d) Sejam C o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ e σ a inversão neste círculo. Mostre que a imagem do círculo $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ é o semiplano $y \geq 1$ e calcule $\sigma^* h$.

(e) Mostre que a equação de uma circunfêrencia ou de uma reta em coordenadas complexa é $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0$ onde $a, c \in \mathbb{R}$ e a inversão σ na circunfêrencia unitária é dada por $\sigma(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Utilize isto para mostrar que a imagem de uma circunfêrencia ou uma reta por σ é uma circunfêrencia ou uma reta.

(3) O Cone com centro O gerado por um k-caminho $c : I^k \to \mathbb{R}^n$ é o (k+1)-caminho $Ic : I^{k+1} \mapsto \mathbb{R}^n$

$$(Ic)(s, t) = sc(t)$$

onde $s \in I$ e $t \in I^k$. Mostre que $\partial(Ic) + I(\partial c) = c$.

(4) Considere a 1-forma no $\mathbb{R}^2$ dada por $\omega = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ e os 1-caminhos

$c_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $c_2(t) = (a\cos t, b\sin t)$. Utilize o teorema de Stokes no plano para mostrar que $\int_{c_2} \omega = 2\pi$ e então mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \frac{2\pi}{ab}$$

.

(5) Seja $\omega = ydx + xdy + 2zdz$. Encontre f tal que $df = \omega$ e calcule $\int_c \omega$ onde c é o segmento indo do ponto $p = (1,0,0)$ ao ponto $q = (a,b,c)$.

(6) (a) Dado um ponto x e um vetor v no $\mathbb{R}^n$ considere o 1-caminho $c(t) = x + t\Delta x \cdot v$. Determine o bordo de Ic.

(b) Seja η uma 2-forma fechada e ω uma 1-forma tais que $\int_{\partial(Ic)} \omega = \int_{Ic} \eta$ para todo 1-caminho c como no item anterior.Mostre que

$$\int_0^1 (\omega_{sx}(x) - \omega_{s(x+\Delta x\cdot v)}(x + \Delta x \cdot v))ds + \int_0^1 \omega_{x+t\Delta x \cdot v}(\Delta x \cdot v)dt =$$

$$\int_0^1 (\int_0^1 \eta_{s(x+t\Delta x\cdot v)}(x + t\Delta x \cdot v, s\Delta x \cdot v)ds)dt$$

(c) Divida a expressão acima por Δx e tome o limite com Δx tendendo a 0 para concluir que

$$\omega_x(v) - df_x(v) = \int_0^1 \eta_{tx}(x, tv)dt$$

onde $f(x) = \int_0^1 \omega_{sx}(x)ds$. Assim se definirmos ω por

$$\omega_x(v) = \int_0^1 \eta_{tx}(x, tv)dt$$

obtemos a primitiva do lema de Poincaré.

(7) Seja $S^n(r)$ a esfera de raio r no $\mathbb{R}^{n+1}$, $N = (0,0,\ldots,1)$ e $S = (0,0,\ldots,-1)$ o polo norte e o polo sul respectivamente.

(a) Determine φ_n e φ_s as projeções estereográficas a partir do polo norte e sul respectivamente.

(b) Mostre que $(\varphi_s)^{-1} \circ \varphi_n : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ é a inversão na esfera $S^{n-1}(r)$.

(8) Generalize para $P^n(\mathbb{R})$ a estrutura de variedade dada em coordenadas não homogeneas análogo ao $P^2(\mathbb{R})$.

(9) Pense $P^2(\mathbb{R})$ como o quociente da esfera $S^2(\mathbb{R})$ pela aplicação antípoda. Mostre que a curva em $P^2(\mathbb{R})$ obtida projetando os paralelos da esfera $z = 1/2$ e $z = -1/2$ é difeomorfa a S^1.