MAT0336 - Geometria Diferencial II

Lista 2 – 11/09/2012

(1) Seja X um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$. Defina $i_X : E^k(\mathbb{R}^n) \to E^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ por $(i_X\omega)(p) = i_{X(p)}\omega(p)$. Se $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ e $X = \sum X^j e_j$ calcule $i_X\omega$ e mostre que:

(a) $i_X \circ i_X = 0$

(b) $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge i_X(\omega_2)$ onde $\omega^1 \in E^k(\mathbb{R}^n)$

Note que, em particular temos $i_X(f\omega) = i_{(fX)}\omega = f i_X\omega$, onde $f \in E^0(\mathbb{R}^n)$

(2) Considere as formas diferenciais no $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy\\ \omega_2 &= dz - xdy + ydx\\ \omega_3 &= dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

e o campo de vetores $X(x, y, z) = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Calcule $d\omega_1,\ d\omega_2,\ \omega_1 \wedge \omega_2,\ i_X\omega_2,\ i_X\omega_3,\ \omega_2 \wedge d\omega_2$.

(3) Use a definição de gradiente ($\omega_{\nabla f} = df$) para mostrar que $\nabla f = \sum \dfrac{\partial f}{\partial x^i} e_i$

(4) Seja $X(p) = \sum a_i(p)e_i$ um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$. Use a definição de rotacional ($\eta_{rotX} = d(\omega_X)$) para deduzir uma fórmula do rotacional nas coordenadas usuais.

(5) Deduza a fórmula do $div(X)$ a partir da definição ($\Delta_{div(X)} = d(\eta_X)$).

(6) Prove que $rot(\nabla f) = 0$ e $div(rotX) = 0$.

(7) O *laplaciano* de uma função $f \in E^0(\mathbb{R}^n)$ é definido por $\Delta f = div(\nabla f)$. Mostre que $\Delta f = \sum \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(8) Mostre que:

(a) $div(fX) = \langle \nabla f, X\rangle + f div(X)$

(b) $\Delta(fg) = 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g + g\Delta f$

(9) Se X é um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$ mostre que ω_X é fechada se e somente se a matriz jacobiana JX de X é simétrica.

(10) Se X é um campo de vetores no $\mathbb{R}^n$ mostre que η_X é fechada se e somente se o traço da matriz jacobiana JX de X é nulo.

(11) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear tal que $\langle T(u), T(v)\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$ onde $\lambda > 0$. Se U é um subconjunto Jordan mensurável do $\mathbb{R}^n$ mostre que $vol(T(U)) = \lambda^n vol(U)$.

(12) Seja $\omega \in E^1(U)$ onde $U \in (\mathbb{R}^n)$ éum aberto estrelado com repeito a origem. Dizemos que ω é homogênea de grau r (r natural) se para todo $t > 0$ tem-se que $\omega_{tx} = t^r\omega_x$

(a) Mostre que $\omega_x^{'}(x) = r\omega_x$.

(b) Use a primitiva do Lema de Poincaré para mostrar que se ω é fechada então $f(x) = \omega_x(x)/(r + 1)$ é uma primitiva de ω.

(13) Verifique se as formas abaixo são homogêneas e fechadas. Determine uma primitiva caso exista.

(a) $\omega_1 = yzdx + zxdy + xydz$

(b) $\omega_2 = \dfrac{yzdx + zxdy + xydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(14) Considere as formas

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{r^\alpha}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Para quais α a forma ω é homogenea e fechada.

(15) As *coordenadas esféricas* no espaço são dadas pela aplicação $c(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ onde

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi \end{cases}$$

sendo $r > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi$.

(a) Sendo $\Delta = dx \wedge dy \wedge dz$ o elemento de volume do $\mathbb{R}^3$ calcule $c^*\Delta$.

(b) Sendo $V(p) = p/r^3$ onde $p = (x, y, z)$, mostre que a 2-forma η_V é fechada.

(c) Seja $f(\theta, \varphi) = (x, y, z)$ definida no retângulo $D =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Calcule $\iint_D f^*\eta_V$ onde $V(p) = p/r^3$

(d) Sendo $N(p) = p/r$ calcule $\iint_D f^*\eta_N$

(16) *Coordenadas cilíndricas* no $\mathbb{R}^3$ são dadas pela aplicação $c(r, \theta, z) = (x, y, z)$ onde
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ sendo $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$

(a) Calcule dx, dy, dz em termos das coordenadas r, θ, z.

(b) Seja (e_r, e_θ, e_z) a base dual de $(dr, d\theta, dz)$. Use o fato de que $v = dx(v)e_1 + dy(v)e_2 + dz(v)e_3$ e $v = dr(v)e_r + d\theta(v)e_\theta + dz(v)e_z$ para determinar as expressões de e_r, e_θ, e_z em termos de e_1, e_2, e_3.

(c) Mostre que $e_r = \dfrac{\partial c}{\partial r}, e_\theta = \dfrac{\partial c}{\partial \theta}, e_z = \dfrac{\partial c}{\partial z}$.

(d) Se $v \in \mathbb{R}^3$ então $||v||^2 = dx^2(v) + dy^2(v) + dz^2(v)$. Encontre a expressão de $||v||^2$ em termos de $dr, d\theta, dz$.

(e) Determine a expressão do elemento de volume Δ do $\mathbb{R}^3$ em termos de $dr, d\theta, dz$.

(f) A expressão em coordenadas cilíndricas de uma função diferenciavel $f : U \to \mathbb{R}$ onde $U \subset \mathbb{R}^3$ é aberto é a função $f \circ c$. É usual escrever $f(r, \theta, z) = (f \circ c)(r, \theta, z)$. A diferencial de f em coordenadas cilíndricas é dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ou

$$df = \frac{\partial f}{\partial e_r}dr + \frac{\partial f}{\partial e_\theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial e_z}dz$$

Dê a expressão em coordenadas cilíndricas de f e de sua diferencial nos seguintes casos:

i. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$

ii. $f(x, y, z) = \dfrac{xy + yz + zx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(g) Encontre as expressões do gradiente de f, do rotacional de f e do divergente de f em coordenadas cilíndricas.

(17) Seja X um campo de vetores no $\mathbb{R}^3$. Defina:

$$L_X : E^k(U) \to E^k(U)$$

por

$$L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$$

$L_X(\omega)$ é chamada a *derivada de Lie* de ω na direção X.

(a) Mostre que $L_X \circ d = d \circ L_X$ e $L_X \circ i_X = i_X \circ L_X$

(b) Mostre que $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_X(\eta)$

(c) Se $\omega = f dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots dx^{i_k}$ e $X = \sum X^i e_i$ mostre que

$$L_X(\omega) = df(X) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots dx^{i_k} + f \sum_{j=1}^{k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dX^{i_j} \wedge \dots dx^{i_k}$$

(18) Considere o campo identidade $I(x) = x$ no $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $L_I(f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k) = (df_x(x) + kf(x)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$

(b) Se $\eta = a dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^k$ então

$$L_I(\omega) = \eta \Leftrightarrow df_x(x) + kf(x) = a(x)$$

isto é L_I é bijetora se e só se a equação a derivadas parciais $df_x(x) + kf(x) = a(x)$ tem soluçao única.

(c) Comecemos analisando o caso unidimensional ($n = 1$). Tomando $k = 1$, temos que $L_I : E^1(\mathbb{R}) \to E^1(\mathbb{R})$ e $L_I(f(x)dx) = (xf'(x) + f(x))dx$. Mostre que a equação $xf'(x) + f(x) = a(x)$ tem como solução $xf(x) = \int_0^x a(u)du$. Faça a mudança de variável $u = xt$ e deduza que $f(x) = \int_0^1 a(xt)dt$.

(d) Consideremos agora o caso n-dimensional e $k \geq 1$. Na equação $df_x(x) + kf(x) = a(x)$ substitua x por tx e multiplique por t^{k-1}. Mostre que $f(x) = \int_0^1 t^{k-1} a(tx)dt$ é a única solução da equação acima. Conclua que L_I é um isomorfismo.

(e) Se $K = i_I \circ L_I^{-1} : E^k(\mathbb{R}^n) \to E^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mostre que $d \circ K + K \circ d = Id$. Desta forma, se ω é fechada então ela é exata. (Lema de Poincaré)