MAT0336 - Geometria Diferencial II

Introdução

JOSE ANTONIO VERDERESI

Um campo de vetores no $\mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável $e : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sua diferencial em $p \in \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear $de_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Se

$$e(p) = (a_1(p), a_2(p), a_3(p))$$

então

$$de_p = (da_1)_p e_1 + (da_2)_p e_2 + (da_3)_p e_3$$

onde (e_1, e_2, e_3) é a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Considere agora três campos de vetores

$$e_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad i = 1, 2, 3$$

tais que, para cada ponto p, $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ seja uma base do $\mathbb{R}^3$.

Seja $(\theta_p^1, \theta_p^2, \theta_p^3)$ a base dual, isto é

$$\theta_p^i(e_j(p)) = \delta_j^i$$

Se $v \in \mathbb{R}^3$, então

$$v = \theta_p^1(v)e_1(p) + \theta_p^2(v)e_2(p) + \theta_p^3(v)e_3(p)$$

Assim, para cada $p \in \mathbb{R}^3$, $(\theta_p^1(v), \theta_p^2(v), \theta_p^3(v))$ são as coordenadas de v na base $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$.

Diferenciando os campos $e_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ temos

$$(de_i)_p = \omega_i^1(p)e_1(p) + \omega_i^2(p)e_2(p) + \omega_i^3(p)e_3(p)$$

Desta forma, obtemos uma matriz de 1-formas $(\omega_j^i(p))$ para cada $p \in \mathbb{R}^3$. Estas são chamadas de *formas de conexão relativas ao referencial* $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$.

Suponhamos, agora, que para cada p, $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ seja ortonormal (isto é, que $\langle e_i(p), e_j(p)\rangle = \delta_{ij}$). Então, para $v \in \mathbb{R}^3$,

$$||v||_p^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2 + \theta_p^3(v)^2$$

e o produto interno de u por v é dado por

$$\langle u, v\rangle_p = \theta_p^1(u)\theta_p^1(v) + \theta_p^2(u)\theta_p^2(v) + \theta_p^3(u)\theta_p^3(v)$$

ou abreviadamente

$$\langle\ ,\ \rangle_p = (\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2 + (\theta_p^3)^2$$

Diferenciando $\langle e_i(p), e_j(p)\rangle = \delta_{ij}$ obtemos

$$\langle de_i(p), e_j(p)\rangle + \langle e_i(p), de_j(p)\rangle = 0$$

Substituindo $de_i(p)$, obtemos

$$\omega_j^i(p) + \omega_i^j(p) = 0$$

Assim, a matriz $(\omega_j^i(p))$ é anti-simétrica.

Se $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um novo campo de vetores, podemos decompô-lo no referencial $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$:

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p) + X^3(p)e_3(p)$$

Sua diferencial é dada por

$$dX_p = (dX^1)_p e_1(p) + (dX^2)_p e_2(p) + (dX^3)_p e_3(p) + X_p^1(de_1)_p + X_p^2(de_2)_p + X_p^3(de_3)_p$$

Substituindo $(de_i)_p$, obtemos

$$dX_p = \sum_{i=1}^{3}\left((dX^i)_p + \sum_{j=1}^{3}\omega_j^i(p)X_p^j\right)e_i(p)$$

Concluímos que para calcularmos dX_p basta conhecer as formas de conexão.

Nos cursos de cálculo, utilizamos em geral os campos constantes

$$\begin{cases} e_1(p) & = & e_1 \\ e_2(p) & = & e_2 \\ e_3(p) & = & e_3 \end{cases}$$

Para estes, as formas de conexão são nulas (isto é, $\omega_j^i = 0$). Dizemos então que o referencial é *paralelo*.

Num referencial paralelo, a diferencial do campo X é a fórmula familiar

$$dX_p = (dX^1)_p e_1 + (dX^2)_p e_2 + (dX^3)_p e_3$$

Vejamos o que acontece quando trabalhamos com coordenadas cilíndricas no $\mathbb{R}^3$. Para cada ponto p, associamos os números $(r(p), \theta(p), z(p))$ que se relacionam com as coordenadas cartesianas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \\ z & = & z \end{cases}$$

Os campos cilíndricos são

$$\begin{cases} e_1 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ e_2 &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ e_3 &= (0,0,1) \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{cases} de_1 &= ((-\sin\theta)d\theta, (\cos\theta)d\theta, 0) = d\theta e_2 \\ de_2 &= ((-\cos\theta)d\theta, (-\sin\theta)d\theta, 0) = -d\theta e_1 \\ de_3 &= 0 \end{cases}$$

Então $\omega_1^2(p) = d\theta_p$ e $\omega_2^1 = -d\theta_p$, as outras sendo nulas.

Considere agora uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e um referencial $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ tal que

(i) $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ é ortonormal e

(ii) $e_1(p)$ e $e_2(p)$ são tangentes a S no ponto p.

Claramente, $e_3(p)$ é um vetor normal a S no ponto p.

Observe que se o referencial é paralelo, então a superfície S é um plano. Assim, para a geometria, é necessário trabalhar com referenciais não paralelos, ou seja, com campos $e_i(p)$ que variam com p.

Se T_pS é o plano tangente a S no ponto p, então

$$v \in T_pS \Leftrightarrow \theta_p^3(v) = 0$$

A equação geral do plano T_pS é $\theta_p^3 = 0$.

Como o referencial é ortonormal, se $v \in T_pS$, então

$$||v||^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2$$

Assim, para calcularmos comprimentos sobre S, basta conhecermos

$$(\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2$$

Toda a geometria de S está contida nas formas (θ^1, θ^2) e nas formas $(\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3)$ obtidas diferenciando o referencial "adaptado" a S:

$$\begin{cases} de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases}$$

(Lembre-se de que (ω_j^i) é anti-simétrica!)

$$(\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ \omega_1^2 & 0 & \omega_3^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega_j^i = -\omega_i^j$$

Seja X um campo de vetores tal que $X(p) \in T_pS$ para todo $p \in S$. Então

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Diferenciando, obtemos

$$dX_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + X^1(p)(de_1)_p(v) + X^2(p)(de_2)_p(v)$$

Substituindo $(de_i)_p(v)$, obtemos:

$$\begin{aligned} dX_p(v) \quad = \quad & (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega_1^2)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)) + \\ & + ((\omega_1^3)_p(v)X^1(p) + (\omega_2^3)_p(v)X^2(p))e_3(p) \end{aligned}$$

Em geral, vemos que $dX_p(v)$ não é tangente a S no ponto p. A componente tangencial de $dX_p(v)$ é chamada a *derivada covariante* de X em p e é denotada por $\nabla_p X$. Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega_1^2)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

Portanto, $(\nabla X)_p(v)$ pode ser calculada a partir da forma $\omega = \omega_1^2 = -\omega_2^1$, a qual é denominada a *forma de conexão de* S.

É comum denotar a derivada covariante de X em p na direção v por $(\nabla_v X)_p$. Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (\nabla_v X)_p$$

Isto é análogo a

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

$(\nabla X)_p(v)$ tem duas componentes, a saber

$$T = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p)$$

$$R = \omega_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

A componente T é obtida diferenciando o campo $X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$ como se $e_1(p)$ e $e_2(p)$ fossem constantes. Assim, T mede a taxa de variação "translacional" do campo X na direção v a partir do ponto p. A componente R é obtida diferenciando X como se suas componentes $X^1(p)$ e $X^2(p)$ fossem constantes. Observe que o vetor

$$X(p)^\perp = -X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)$$

é ortogonal ao vetor

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Assim, $R = \omega_p(v)X(p)^\perp$ e, portanto, ω é a velocidade de rotação do referencial no ponto p na direção v. Em particular, se tomarmos $X(p) = e_1(p)$ ou $X(p) = e_2(p)$, obtemos

$$\begin{cases} (\nabla e_1)_p(v) & = & \omega_p(v)e_2(v) \\ (\nabla e_2)_p(v) & = & -\omega_p(v)e_1(p) \end{cases}$$

Abreviadamente,

$$\nabla(e_1, e_2) = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\nabla e = e\omega$$

ω é a velocidade angular do referencial $e = (e_1, e_2)$ sobre a superfície.

A partir da derivada covariante, definimos paralelismo e geodésicas:

- um campo X é *paralelo* se $\nabla X = 0$;
- uma curva $c : I \to S$ é uma geodésica se $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$.

Vamos, a seguir, interpretar as formas ω_1^3 e ω_2^3.

O campo e_3 é normal a S. Assim, a variação deste campo diz como a superfície se curva. Se e_3 for constante, a superfície S é um plano. Portanto, $(de_3)_p(v)$ deve, de alguma forma, medir como S se curva na direção v:

$$(de_3)_p(v) = \omega_3^1(v)e_1(p) + \omega_3^2(v)e_2(p)$$

Se designarmos por $A_p(v) = -(de_3)_p(v)$, então $A_p : T_pS \to T_pS$ é uma aplicação linear. Por exemplo, se S é um plano, então $e_3(p) = n$ é constante. Logo, $A_p(v) = -(de_3)_p(v) = 0$.

Se S é a esfera de raio R, então

$$e_3(p) = \frac{p}{||p||} = \frac{p}{R}$$

Segue que $(de_3)_p(v) = v/R$ e, portanto,

$$A_p(v) = -\frac{v}{R}$$

Como veremos, a aplicação linear $A_p : T_pS \to T_pS$ é simétrica, isto é,

$$\langle A_p(u), v\rangle = \langle u, A_p(v)\rangle$$

A *segunda forma fundamental* de S em p é definida por

$$b_p(u, v) = \langle A_p(u), v\rangle = \langle u, A_p(v)\rangle$$

que é bilinear e simétrica. Lembrando que

$$u = \theta_p^1(u)e_1(p) + \theta_p^2(u)e_2(p)$$

e

$$A_p(v) = \omega_1^3(v)e_1(p) + \omega_2^3(v)e_2(p)$$

temos

$$b(u,v) = \omega_1^3(u)\theta^1(v) + \omega_2^3(u)\theta^2(v)$$

A *primeira forma fundamental* é o produto interno

$$\langle u,v\rangle = \theta^1(u)\theta^1(v) + \theta^2(u)\theta^2(v)$$

O teorema fundamental das superfícies no $\mathbb{R}^3$ diz que a primeira e a segunda formas fundamentais determinam S a menos de uma isometria do $\mathbb{R}^3$.

A primeira forma fundamental permite calcular o comprimento de curvas sobre a superfície S. Já a segunda forma fundamental estabelece a forma da superfície dentro do $\mathbb{R}^3$.

Os aspectos geométricos que dependem apenas da primeira forma são denominados *intrínsecos*. Aqueles que dependem também da segunda forma são chamados *extrínsecos*.

Por exemplo, o elemento de área

$$dA = \theta^1 \wedge \theta^2$$

é intrínseco à superfície S.

Um outro exemplo é a forma de conexão ω. A forma ω só depende da primeira forma fundamental.

A aplicação linear $A_p : T_pS \to T_pS$ é simétrica e, portanto, diagonalizável. Sejam λ_1 e λ_2 seus valores próprios. A *curvatura gaussiana* é definida por

$$K_p = \det A_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

e a *curvatura média* é definida por

$$H_p = \frac{\operatorname{tr} A_p}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

O seguinte teorema relaciona a curvatura gaussiana e a forma de conexão. Ele diz que

$$d\omega = K dA$$

Como $d\omega$ só depende da primeira forma fundamental, assim como dA, segue que K também só depende da primeira forma fundamental. Isto foi provado primeiramente por Gauss e deu origem ao que hoje conhecemos como Geometria Diferencial.

Por outro lado, a curvatura média é um invariante extrínseco da superfície S. Por exemplo, um pedaço de um plano e de um cilindro são isométricos e, portanto, suas curvaturas gaussianas são nulas, mas suas curvaturas médias são diferentes. Para o plano, $A_p = 0$. Logo, $K_p = \det A_p = 0$ e $H_p = (\operatorname{tr} A_p)/2 = 0$. Para o cilindo, A_p tem valores próprios $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Logo, $K_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ e $H_p = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = \lambda_2/2 \neq 0$.