MAT0315 - Introdução à Análise

Lista 4 – 08/11/2016

1. Considere a função $f : [0, 2] \to I\!R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   Seja P_n a partição do intervalo $[0, 2]$ em n partes iguais.

   a) Calcule $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 4, 5, 6, 7$;
   b) Dê uma expressão para $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 2k$ e $n = 2k + 1$ (n par ou ímpar);
   c) Calcule $lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ e $lim_{n\to\infty} s(f, P_n)$.

2. Considere a função $f : [0, 1] \to I\!R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1/n \\ 2, & x = 1/n \end{cases}$$

   onde n é um natural diferente de zero. Mostre que f é integravel e calcule sua integral.

3. Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Seja $f : [a, b] \to I\!R$ uma função integrável. Se

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   Mostre que existe uma constante c tal que

$$|F(y) - F(x)| \leq c|y - x|$$

5. Seja $f : [a, b] \to I\!R$ uma função positiva e integrável. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma função crescente. Conclua disto que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

6. Sejam $f, g : [a, b] \to I\!R$ funções contínuas. Então $(f(x) + \lambda g(x))^2$ é uma função positiva para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Use este fato e o exercício anterior para mostrar a desigualdade de Schwarz

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

7. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

   (1) Faça um gráfico de f;
   (2) Encontre a função $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$, $t \in [0, 2]$;
   (3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

   a) $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   b) $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   c) $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

8.

9. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral

para mostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \quad a > 0$$

10. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

11. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2\int_{a}^{b} f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

12. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

$a)$ Se f e g são contínuas, então

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \int_{a}^{b} g(x)dx$$

$b)$ $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1 + ln(x)}{x}dx = \frac{3}{2}$

$c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

13. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_{0}^{1+x^2} 1/(2 + \operatorname{sen} t)dt$$

14. $\displaystyle\int_{0}^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde f é contínua, determine $f(4)$.

15. Ache uma função continua f tal que

$$\int_{0}^{x} tf(t)dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - x^2/2$$

16. Seja f uma função derivável e inversível definida no intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

Dê uma interpretação geométrica para esta igualdade.

17. Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1+t^2)dt$$

18. Se $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ use integração por partes para calcular $\int_0^x f(x)dx$.

19. Se $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x \operatorname{sen} t^2 dt$ calcule $\int_0^x f(x)dx$.

20. Seja $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x\ ,\ 0 \leq x \leq\ a\}$ e S o sólido que com base B e cuja secção transversal ao eixo y passando por y é um retângulo cuja altura é $h(y)$.

    (a) Mostre que o volume de S é dado por

    $$V = \int_0^a (a-y)h(y)dy$$

    (b) Mostre a área da secção transversal ao eixo x é dada por $A(x) = \int_0^x h(y)dy$ e portanto o volume também é dado por

    $$V = \int_0^a A(x)dx$$

    (c) Conclua a igualdade

    $$\int_0^a (a-y)h(y)dy = \int_0^a \left(\int_0^x h(y)dy\right) dx$$

21. Use o exercício anterior para resolver os exercícios 16 e 17.

22. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_{x^3}^{\pi} \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

e determine $f^{-1}(0)$.

23. Derive as seguintes funções:

    (a) $g(x = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$

    (b) $h(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^{2x} \operatorname{sen}\left(\int_0^{y} \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right)$.

24. Seja $f : [0, b] \twoheadrightarrow [0, d]$ uma função contínua e inversível e $h : [0, d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

    (a) Mostre através de uma integração por partes que

    $$\int_0^b \left(\int_0^{f(x)} h(y)dy\right) dx = \int_0^d (b - f^{-1}(y))h(y)dy$$

    (b) Interprete as integrais acima como volume de um sólido tendo como base o conjunto

    $$B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } 0 \leq x \leq b\}$$