MAT0315 - Introdução à Análise

Lista 3 – 28/09/2016

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in Dom(g)$, mostre que $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = 0$.

2. Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função crescente e $c \in]a,b[$. Mostre que existem os limites laterais $\lim_{x\to c_-} f(x)$ e $\lim_{x\to c_+} f(x)$.

3. Seja f uma função tal que $x^3 \leq f(x) \leq x^2$, para todo $x \leq 1$. O que você pode dizer a respeito de:

   $a)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ $\quad$ $b)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$ $\quad$ $c)$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

   $d)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\quad$ $e)$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ $\quad$ $f)$ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{x^4+1}$. Mostre que f é contínua na origem.

5. Considere a função

   $$f(x) = \begin{cases} 2x-4, & x < 2 \\ ax^2 - bx, & x \geq 2 \end{cases}$$

   $a)$ Para que valores de a e b f é contínua?

   $b)$ Seja $m(x) = \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$. Encontre a e b para que exista $\lim_{x\to 2} m(x)$.

6. Seja g uma função tal que $\lim_{x\to x_0} g(x) = 1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in Dom g$, $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{1}{2} < g(x) < \dfrac{3}{2}$.

7. Seja f definida em $\mathbb{R}$ e tal que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:

   $a)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ $\quad$ $b)$ $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$

8. Se $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ e f é contínua na origem, mostre que $f(0) = 0$.

9. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$. Mostre que $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$.

10. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = p/q \\ 0, & x \ irracional \end{cases} .$$
onde p, q são números inteiros. Mostre que f é descontínua nos racionais e contínua nos irracionais.

11. Se $f : [0,1] \to [0,1]$ é uma função continua mostre que f tem um ponto fixo, isto é existe c tal que $f(c) = c$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é nula em todo número racional. Mostre que f é identicamente nula.

13. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Mostre que existe $c \in [0, 1/2]$ para o qual $f(c) = f(c + 1/2)$.

14. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $c \in]a,b[$. Para que f seja derivavel em c é necessário e suficiente que exista uma função contínua $r :]a,b[\to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = f(a) + r(x)(x-a)$$
para todo $x \in]a,b[$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Mostre que a função f é derivavel com derivada nula em $x = 0$ o mesmo ocorrendo $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assim sucessivamente.

16. Uma função $f : I \to I\!R$, definida num intervalo I, chama-se ***côncava para cima*** quando para quaisquer pontos a e b em I, com $a < b$, tem-se
$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right], \qquad \forall x \in [a,b].$$

a) Dados a, b em I, com $a < b$, seja r a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Escreva a equação da reta r e interprete geometricamente a desigualdade acima.

b) Suponha f diferenciável. Mostre que f é côncava para cima se e somente se $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ para quaisquer $x, x_0 \in I$.

c) Se f é diferenciável mostre que f é côncava para cima se e somente se a derivada f' é uma função crescente.

d Se f é derivavel até segunda ordem e côncava para cima então $f'' \geq 0$.

17. Enuncie o exercício acima para funções côncava para baixo.

18.

19. Seja $f : [0, 1] \cup]2, 3] \to [0, 2]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & 2 < x \leq 3 \end{cases}.$$

Mostre que f é bijetora e calcule sua inversa. Verifique que f é contínua mas sua inversa f^{-1} é descontínua no ponto $y = 1$.