MAT0315 - Introdução à Análise

Lista 2 – 29/08/2016

1. Mostre que em todo intervalo com mais que um elemento existem números racionais e irracionais.

2. Prove que $1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = (2n+1)(n+1)n/6$.

3. Mostre que dados os números reais a, b tais que $a, b > 0$ existe um natural n tal que $n.a > b$.

4. Verdadeiras ou falsas as sentenças? Justifique sua resposta.

   (a) Se a, b são números racionais então $a + b$ é racional.

   (b) Se a é racional e b é irracional então $a + b$ é irracional.

   (c) Se a, b são números irracionais então $a + b$ é irracional.

   (d) Se a é racional e b é irracional então ab é irracional.

5. Prove que todo conjunto finito e não vazio de números reais tem um elemento máximo.

6. sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos limitados e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Mostre as seguintes propriedades do supremo e do ínfimo:

   (a) Se $A \subset B$ então $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$,

   (b) Se $A \leq B$ então $\sup A \leq \inf B$,

   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

   (d) Se $c > 0$ então $\sup c.A = c. \sup A$ e $\inf c.A = c. \inf A$,

   (e) Se $c < 0$ então $\sup c.A = c. \inf A$ e $\inf c.A = c. \sup A$,

   (f) $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$,

   (g) Se $c > 0$ então $\sup(c.f) = c. \sup f$ e $\inf(c.f) = c. \inf f$,

   (h) Se $c < 0$ então $\sup(c.f) = c. \inf f$ e $\inf(c.f) = c. \sup f$,

   (i) Dê exemplo de funções tais que $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$.

7. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continua e crescente então $\sup(g \circ f) = g(\sup f)$.

8. (Intervalos encaixados) Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \ldots I_n \supset \ldots$ de intervalos fechados e limitados existe pelo menos um número c que pertence a todos os I_n.

9. Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é uma função continua mostre que f tem um ponto fixo, isto é existe c tal que $f(c) = c$.

10. Se $a_1/b_1, a_2/b_2, \ldots a_n/b_n$ pertencem ao intervalo $[a, b]$ onde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ são positivos mostre que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)/(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pertence ao intervalo $[a, b]$.