

MAT0315 - Introdução à Análise

Lista 1 – 03/08/2016

Parte 1 - Operações

1. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $1 = 2 \implies 2 = 3$

(b) Se $a, b \in \mathbb{Z}_5$ então $(a^2 + b^2 = 0 \implies a = 0 \text{ e } b = 0)$

(c) $ax = a \implies x = 1$

Obs: \mathbb{Z}_5 é o nome matemático para o relógio de cinco horas.

2. Se $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$ prove que $(a/b)^{-1} = b/a$.

3. Prove que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para $r \neq 1$.

4. No exercício 3, faça $r = a/b$ e conclua que

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + a^n$$

5. Se $n + 1$ é ímpar mostre que

$$b^{n+1} + a^{n+1} = (b + a)(b^n - b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots - a^n)$$

6. Considere a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ onde $a > 0$. Ela é equivalente a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Complete o quadrado somando $(b/2a)^2$ dos dois lados e mostre que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Conclua disto que se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ então

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Parte 2 - Ordem

1. $a < b$ e $c < d \implies a + c < b + d$.
2. $a < b \implies -b < -a$.
3. $a > 0$ e $b > 0 \implies ab > 0$.
4. $a > 1 \implies a^2 > a$.
5. $0 < a < 1 \implies a^2 < a$.
6. $b > a > 0 \implies b^2 > a^2$.
7. Se $a, b, c, d > 0$, $a < b$ e $c < d$ então $ac < bd$.
8. $a < b \implies a^3 < b^3$.
9. Se $a, b > 0$ mostre que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
10. Se $ab \neq 0$ mostre que $b^2 + ab + a^2 > 0$.
11. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 \implies a = 0$ ou $b = 0$.
12. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 \implies a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = -b$.
13. Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.
14. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Se a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais, encontre os coeficientes do trinômio de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = (a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2$$

Use o fato que $ax^2 + bx + c \geq 0$ para mostrar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

15. Verifique se o conjunto

$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de \mathbb{R} verifica todos os axiomas dos números reais.

16. Verifique se o conjunto

$$K = \{a + b\pi : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de \mathbb{R} verifica todos os axiomas dos números reais.

Parte 3 - Completude

1. Verifique quais das seqüências abaixo são crescentes e limitadas superiormente ou decrescentes e limitadas inferiormente. Nestes casos determine seu limite:

(a) $s_n = (1 + n)/n$

(b) $s_n = (n - 1)/n$

(c) $s_n = (1 + n)/n^2$

(d) $s_n = \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$

(e) $s_n = (-1)^n/(n + 1)$

(f) $s_n = n^2/(n + 1)$

(g) $s_n = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots + \frac{?}{2^n}$

(h) $s_n = n/(n^2 + 1)$

(i) $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ ou indutivamente

$$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$$

(j) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ ou indutivamente

$$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$$

2. Se $a > 0$ mostre que a sequência

$$x_0 = a \text{ e } x_{n+1} = \frac{(x_n + \frac{a}{x_n})}{2}$$

é decrescente e limitada inferiormente. Determine seu limite.

3. Mostre que a sequência

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

é crescente e use o fato que $1/n! < 1/2^{n-1}$ para mostrar que $s_n < 3$. Do axioma da completude conclua que existe o número

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

4. Seja p_n o perímetro do polígono regular com 2^n lados inscrito na circunferência de raio unitário. Se l_n é seu lado então, $p_n = 2^n l_n$. Mostre que (p_n) é uma sequência crescente a partir de $p_2 = 4\sqrt{2}$ e limitada superiormente. Do axioma da completude conclua que existe o número π tal que

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

5. Para os conjuntos A abaixo determine, quando houver, $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$:

(a) $A = [a, b]$ onde $a < b$

(b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 1011, 13\}$

(c) $A =]a, b[$ onde $a < b$

(d) $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid , 0 < p < q , \text{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < 1011, 13 \right\}$

(e) $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid , 0 < p < q , \text{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < n \right\}$

(f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

(g) $A = \left\{ e^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

(h) $A = \left\{ \cos \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

(i) $A = \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$ onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente

- (j) $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente.
6. Seja $I \subset \mathbb{R}$. Se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x < x_2 \Rightarrow x \in I$ então I é um intervalo.
7. Considere o seguinte problema proposto por Fibonacci:
- Suponha que um casal de coelhos gere um novo casal a cada mês e que este torne-se reprodutivo com dois meses de idade. Começando com um casal recém-nascido quantos casais teremos no n -ésimo mês?
- (a) Seja a_n o número de casais no n -ésimo mês. Então $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$. Convença-se que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
- (b) Escreva os seis primeiros termos da sequência a_n .
- (c) Se $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ mostre que $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$.
- (d) Mostre que $x_0 < x_2 < \dots < x_{2k} < \dots < x_{2k+1} < \dots < x_3 < x_1$.
- (e) Mostre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = l$$

onde l é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

- (f) Conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Parte 4 - Números Naturais

1. Prove por indução:
- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$
- (b) $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$
2. Se m, n são naturais com $n \geq m$, então existe d natural tal que $n = m + d$ (isto é, $d = n - m$ é a diferença entre n e m).
3. Considere o conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 2)n\}$$

Mostre que $n \in A \implies (n + 1) \in A$. É verdade que $A = \mathbb{N}$?

4. Considere o conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(2n + 1)^2}{8} \right\}$$

Mostre que $n \in A \implies (n + 1) \in A$. Podemos concluir que $A = \mathbb{N}$?

5. (Algoritmo da divisão) Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n > m$, prove que existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $n = qm + r$ onde $r < m$.

6. Mostre que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x < 1$.

7. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

8. O “coeficiente binomial” é o número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad n, k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad k \leq n$$

Este é também o número de combinações de n elementos k a k .

(a) Mostre que:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \\ \text{ii.} \quad & \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

(b) Prove por indução o teorema binomial

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

(c) Mostre que:

$$\text{i.} \quad 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\text{ii. } 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots (-1)^n \binom{n}{n}$$

(d) Utilize a fórmula do binômio de Newton para mostrar que

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - 1/n) + \frac{1}{3!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) \dots (1 - (n - 1)/n) \end{aligned}$$

e conclua que

$$(1 + 1/n)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

9. Do teorema binomial temos

$$\begin{aligned} (1 + 1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ (2 + 1)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ (3 + 1)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ \vdots &= \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ (n + 1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Somando membro a membro os dois lados das igualdades, encontre uma fórmula para

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

10. Encontre fórmulas para

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n} \\ \text{(b)} \quad & \frac{3}{1 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n + 1}{n^2 \cdot (n + 1)^2} \end{aligned}$$

11. Sabendo-se que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, determine uma fórmula para

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n - 1)^2 - (2n)^2$$