MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Lista 1 – 07/08/2023

Parte 1 - Números Reais

1. Mostre que em todo intervalo com mais que um elemento existem números racionais e irracionais.

2. Prove que $1^2 + 2^2 + \dots n^2 = (2n+1)(n+1)n/6$.

3. Mostre que dados os números reais a, b tais que $a, b > 0$ existe um natural n tal que $n.a > b$.

4. Verdadeiras ou falsas as sentenças? Justifique sua resposta.

   (a) Se a, b são números racionais então $a + b$ é racional.

   (b) Se a é racional e b é irracional então $a + b$ é irracional.

   (c) Se a, b são números irracionais então $a + b$ é irracional.

   (d) Se a é racional e b é irracional então ab é irracional.

5. Prove que todo conjunto finito e não vazio de números reais tem um elemento máximo.

6. sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos limitados e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções limitadas. Mostre as seguintes propriedades do supremo e do ínfimo:

   (a) Se $A \subset B$ então $\sup A \leq \sup B$ e $\inf A \geq \inf B$,

   (b) Se $A \leq B$ então $\sup A \leq \inf B$,

   (c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ e $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$,

   (d) Se $c > 0$ então $\sup c.A = c. \sup A$ e $\inf c.A = c. \inf A$,

   (e) Se $c < 0$ então $\sup c.A = c. \inf A$ e $\inf c.A = c. \sup A$,

   (f) $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$,

   (g) Se $c > 0$ então $\sup(c.f) = c. \sup f$ e $\inf(c.f) = c. \inf f$,

   (h) Se $c < 0$ então $\sup(c.f) = c. \inf f$ e $\inf(c.f) = c. \sup f$,

(i) Dê exemplo de funções tais que $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.

7. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função continua e crescente então $\sup(g \circ f) = g(\sup f)$.

8. Respostas: $4a$ V , $4b$ V , $4c$ F $4d$ F

Parte 2 - Integrais

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Seja P_n a partição que divide o intervalo $[a,b]$ em n partes iguais. Mostre que $S(f,P_n) - s(f,P_n) = (f(b)-f(a))(b-a)/n$ e conclua disto que f é integravel.

2. Considere a função $f : [0,2] \to I\!R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

   Seja P_n a partição do intervalo $[0,2]$ em n partes iguais.

   $a)$ Calcule $s(f,P_n)$ e $S(f,P_n)$ para $n = 4,5,6,7$;
   $b)$ Dê uma expressão para $s(f,P_n)$ e $S(f,P_n)$ para $n = 2k$ e $n = 2k+1$ (n par ou ímpar);
   $c)$ Calcule $lim_{n\to\infty} S(f,P_n)$ e $lim_{n\to\infty} s(f,P_n)$.

3. Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Seja $f : [a,b] \to I\!R$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   é uma função crescente.

5. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

   (1) Faça um gráfico de f;
   (2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, $t \in [0, 2]$;
   (3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

   $a)$ $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   $b)$ $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   $c)$ $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a área da região

   $a)$ limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;
   $b)$ limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;
   $c)$ limitada pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ e por $x = 2$;
   $d)$ limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

7. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

8. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

9. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

10. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

    $a)$ Se f e g são contínuas, então

    $$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

    $b)$ $\displaystyle\int_1^e \frac{1+ln(x)}{x}dx = \frac{3}{2}$

    $c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

11. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_0^{1+x^2} 1/(2+\operatorname{sen} t)dt$$

12. $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde f é contínua, determine $f(4)$.

13. Ache uma função continua f tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - x^2/2$$

14. Seja f uma função derivável e inversível definida no intervalo $[a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

15. Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1+t^2)dt$$

16. Se $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ use integração por partes para exprimir a integral $\int_0^x f(x)dx$ em termos de f. Calcule $\int_0^1 f(x)dx$.

17. Se $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x \operatorname{sen} t^2 dt$ exprima a integral $\int_0^x f(x)dx$ em termos de f. Calcule $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x)dx$.

18. Seja $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \ , \ 0 \leq x \leq \ a\}$ e S o sólido que com base B e cuja secção transversal ao eixo y passando por y é um retângulo cuja altura é $h(y)$.

    (a) Mostre que o volume de S é dado por

    $$V = \int_0^a (a - y)h(y)dy$$

    (b) Mostre a área da secção transversal ao eixo x é dada por $A(x) = \int_0^x h(y)dy$ e portanto o volume também é dado por

    $$V = \int_0^a A(x)dx$$

    (c) Conclua a igualdade

    $$\int_0^a (a - y)h(y)dy = \int_0^a \left(\int_0^x h(y)dy \right) dx$$

19. Interprete os exercícios 16 e 17 de forma análoga ao exercício 18.

20. Encontre a derivada da função

    $$f(x) = \int_{x^3}^{\pi} \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$$

    e determine $f^{-1}(0)$.

21. Derive as seguintes funções:

    (a) $g(x = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$

(b) $h(x) = \operatorname{sen}\left(\int_0^{2x} \operatorname{sen}\left(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\right) dy\right)$.

22. Seja $f : [0,b] \twoheadrightarrow [0,d]$ uma função contínua e inversível e $h : [0,d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

    (a) Mostre através de uma integração por partes que

    $$\int_0^b \left(\int_0^{f(x)} h(y)dy\right) dx = \int_0^d (b - f^{-1}(y))h(y)dy$$

    (b) Interprete as integrais acima como volume de um sólido tendo como base o conjunto

    $$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } 0 \leq x \leq b\}$$

23. Respostas: $6a = 8\sqrt{2}/3$, $6b = 8/3$, $6c = 1/12$, $6d = 1$, $10a = F$, $10b = V$, $10c = V$, 11) $f'(x) = \dfrac{2x}{2 + \sin(1 + x^2)}$, 12) $f(4) = \pi/2$, 13) $f(x) = \sin x - 1$, 15) $x = -1/2$ ponto de máximo. Não tem ponto de mínimo. , 16) $1/2e - 1$, 17) 0 , 20) $f^{-1}(0) = \sqrt[3]{\pi}$

Parte 3 - Integrais Impróprias

1. Verifique se as seguintes integrais divergem ou convergem. Neste caso determine seu valor:

    (a) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$ onde $a > 1$

    (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ onde $p > 0$

    (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2 + 1} dx$

    (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$

    (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}} dx$

    (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

    (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3 - 5x^2} dx$

(h) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx$

2. Demonstrar que a integral de Euler de 1ª espécie

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

é convergente se $p > 0$ e $q > 0$.

3. Determine se as seguintes integrais convergem ou não usando integração por partes:

   (a) $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx$

   (b) $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(bx)dx$ onde $a > 0$

4. Respostas : $1a = \infty$, $1c = \pi^2/8$, $1e = \infty$, $1f = \pi$, $1g = -\infty$

Parte 4 - Aplicações do Cálculo

1. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo x a região limitada pelas funções $y = x^2 - 4x + 5$ e $y = -x^2 + 6x - 3$.

2. Gire a região do exercício 1 em torno do eixo y e encontre seu volume.

3. Um sólido tem como base a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e cada secção ortogonal ao semi eixo maior é um semi círculo. Ache seu volume.

4. Considere a região limitada pela hipérbole $y = 1/ax$ e pelas retas $x = 1/a$ e $x = a$ para $a \geq 1$. Para que valor de a o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x é máximo?

5. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo x a região limitada por $y = (x-2)^2$ e $y = (x-2)^2/2 + 2$.

6. Determine o comprimento das curvas:

   (a) $y = x^4/4 + 1/8x^2$ onde $1 \leq x \leq 3$

   (b) $y = \ln(\cos x)$ para $0 \leq x \leq \pi/4$

(c) $y = x^{n+1}/(n+1) \ + \ 1/4(n-1)x^{n-1}$ para $a \leq x \leq b$ onde $a > 0$

(d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7. Determine a área da superfície de revolução girando-se as curvas abaixo em torno do eixo indicado:

   (a) $y = x^3$ onde $0 \leq x \leq a$ e eixo x

   (b) $y = x^2$ onde $0 \leq x \leq 2$ e eixo y

   (c) $y = \sqrt{x}$ onde $1 \leq x \leq a$ e eixo x

   (d) $y = x^4/4 + 1/8x^2$ onde $1 \leq x \leq 2$ e eixo y

8. Sejam $a < b$. Calcule o centro de massa do semi-anel limitado pelas circunferências:

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad e \quad x^2 + y^2 = b^2$$

9. Mostre, usando centro de massa, que as medianas de um triângulo se interceptam num ponto e este divide cada uma delas na razão de 2 : 1.

10. Determine o centro de massa da região limitada pelas parábolas:

$$y = \frac{x^2}{4} \quad e \quad x = \frac{y^2}{4}$$

11. Determine o centro de massa do arco da parábola:

$$y = x^2; \quad -a \leq x \leq a$$

12. Determine o centro de massa de um setor circular de raio R e ângulo α.

13. Resolva as equações:

    $a)$ $y' \ = \ e^{x-2y}$ $\qquad$ $b)$ $(senx)y' + (cosx)y \ = \ 1$ $\qquad$ $c)$ $y' = x^3 - 2xy$

14. Encontre as soluções que verificam a condição inicial dada:

    $a)$ $y' = x + y; \quad y(0) = 1$ $\qquad$ $b)$ $y' = x(y+1); \quad y(0) = -1$

15. Determine as soluções constantes da equação

$$\frac{dx}{dt} = 9 - x^2$$

e faça um esboço das soluções.

16. A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente. Se um corpo está à temperatura de $120°C$ e após 40 minutos a sua temperatura é de $60°C$, estando o ambiente a $35°C$, qual a temperatura do corpo após 100 minutos (a partir de 120°C)?

17. A população de uma cidade é de 1.000.000 habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em 7 dias, esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos sãos e enfermos, sendo a taxa de variação na porcentagem de enfermos proporcional ao número de contatos e este, proporcional ao produto das porcentagens de sãos e enfermos. Supondo a população fixada, pergunta-se: após quanto tempo os enfermos serão 50% da população?

18. Considere um corpo de massa unitária sujeito à ação de uma mola com constante 5.

    (a) Escreva a equação diferencial do movimento e sua solução geral.

    (b) Determine a natureza do movimento.

    (c) Ache a solução particular que parte da posição de equilíbrio com velocidade inicial igual a 4. Esboce o gráfico da solução.

19. Suponha que uma sala contendo inicialmente $60m^3$ de ar esteja inicialmente livre de monóxido de carbono. Começa-se a fumar cigarros e o ar expelido a uma taxa de $0,003m^3/min$ contém 4% de monóxido de carbono. A mistura homogeneizada deixa a sala na mesma taxa.

    (a) Encontre a porcentagem em volume do monóxido de carbono em um instante qualquer t.

(b) Uma exposição prolongada ao monóxido de carbono à uma porcentagem de $0,012$ é prejudicial ao organismo humano. Depois de quanto tempo é atingida esta concentração na sala?

20. Um recipiente contém um volume V (em litros) de uma solução salina, sendo a massa de sal dissolvida igual a m_0 quilogramas no instante inicial. Uma outra solução de concentração k (em kg/l) penetra no recipiente a uma razão constante de r litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de r litros por minuto. Seja $x(t)$ a concentração da solução no recipiente no instante t.

    a) Determine a equação diferencial que admite $x(t)$ como solução.

    b) Resolva a equação obtida no item (a).

    c) Usando o item (b), determine em que condições $x(t)$ é crescente e em que condições $x(t)$ é

    decrescente. Interprete os resultados.

    d) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Interprete o resultado.

21. A velocidade de desintegração de um material radioativo é proporcional a quantidade de material em cada instante.

    (a) Escreva a equação diferencial que traduz a desintegração.

    (b) A meia-vida do urânio-235 é 713 milhões de anos. O que significa isso?

    (c) O urânio-235, ao se desintegrar, origina o chumbo-207. Uma certa amostra de rocha contém 1g de urânio-235 para cada 31g de chumbo-207. Supondo que inicialmente a rocha fosse de urânio-235 apenas, qual a sua idade?

    (d) Outra amostra contém 2g de urânio-235 para cada 28g de chumbo-207. Qual a sua idade?

22. Num circuito RC, carrega-se o capacitor com uma carga de 2 coulombs. Qual a corrente no circuito depois de ligada a chave, sabendo-se que $R = 20$ ohms e $C = 0,05$ farad?

23. Respostas : 1) 63π , 2) 45π , 3) $4\pi/3$, 4) $\sqrt{3}$, 5) $256\pi/15$, 8) $(x_c, y_c) = \frac{4\pi(b^3-a^3)}{3(b^2-a^2)}$, 10) $(x_c, y_c) = (9/5, 9/5)$, 11) $(x_c, y_c) = (\frac{4R\sin(\alpha/2)}{3\alpha}, 0)$, 16) $\simeq 39°C$, 17) $\simeq$ 19 dias , 18) $x(t) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)$, 19) $m(t) = \dfrac{12}{5}(1 - e^{-5t/10^6})$, 20) $x(t) = k - (k - m_0/V)e^{(-r/V)t}$, 21c) 3565 milhões de anos , 22) $I(t) = -2e^{-t}$.