MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Lista de exercícios 3

11/11/2022

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em torno de x_0 dado nos seguintes casos:

   $a)\ f(x) = senx; \quad x_0 = 0$
   $b)\ f(x) = cosx; \quad x_0 = 0$
   $c)\ f(x) = lnx; \quad x_0 = 1$
   $d)\ f(x) = \sqrt[3]{x}; \quad x_0 = 1$
   $e)\ f(x) = (1+x)^\alpha; \quad x_0 = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um número real dado.

2. $a)$ Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = e^x$, de ordem n, em torno de $x_0 = 0$;

   $b)$ Mostre que, para todo x em $[0,1]$,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

   $c)$ Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

3. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = senx$. Mostre que, para todo x,

$$\left| senx - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

4. Avalie $sen1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}. (Sugestão o Exercício 3)

5. Mostre que, para todo x,

$$senx = \lim_{n\to\infty}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

   ou

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

6. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   $a)$ Utilize a fórmula da progressão geométrica para mostrar que $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ é o polinômio de Taylor, de ordem 10, de f em torno de $x_0 = 0$.

   $b)$ Observando o polinômio do item (a), calcule $f^{'}(0)$, $f^{''}(0)$, $f^{'''}(0)$, etc.

7. Se $P(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em c mostre que:

   (a) O polinômio de Taylor de ordem $n-1$ de f' em c é $P'(x)$.
   (b) O polinômio de Taylor de ordem $n+1$ de $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ em c é $Q(x) = \int_c^x P(t)dt$.

8. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 nos pontos indicados :

   (a) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y}$ $\quad p_0 = (0, 0)$
   (b) $f(x, y) = e^{x+y+xy}$ $\quad p_0 = (0, 0)$
   (c) $f(x, y) = x \sin y$ $\quad p_0 = (0, 0)$
   (d) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ $\quad p_0 = (0, 0)$
   (e) $f(x, y) = x \ln y$ $\quad p_0 = (1, 1)$

9. Seja $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 1$.

   (a) Determine os pontos críticos de f.
   (b) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 nos pontos encontrados no item (a) e o respectivo resto de ordem 2.
   (c) O que você conclui dos resultados encontrados?

10. Seja $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + x^3 + xy^2 - y^4$.

    Use a fórmula de Taylor de ordem 2 para mostrar que a origem é um ponto de mínimo local de f.

11. Se $f(x, y) = g(x) + h(y)$ onde g, h são diferenciáveis com derivadas segunda ordem contínuas relacione os pontos críticos de g, h com os pontos críticos de f e classifique-os.

12. Mostre que o polinômio de Taylor da derivada f' é a derivada do polinômio de Taylor de f.

13. Se $P_{n,c}$ o polinômio de Taylor de ordem n de f então o polinônio de Taylor de ordem $n + 1$ de $g(x) = \int_c^x f(t)dt$ é a integral $\int_c^x P_{n,c}(t)dt$.

14. Mostre que

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1 + x}$$

    e use este resultado para determinar o polinômio de Taylor de ordem n de $\ln(1 + x)$.

15. Se $g(x) = f(x - c)$ e $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de f na origem então $P_n(x - c)$ é o polinômio de g com centro em c .