

# MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

## Lista 2 – 04/09/2022

### Parte 1 - Curvas

1. Parametrize as curvas pelo comprimento de arco:
  - (a)  $c(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$
  - (b)  $c(t) = (\cos t, \ln(\cos t), \sin t)$
2. Determine a curvatura das seguintes curvas:
  - (a)  $c(t) = (at, bt^2)$
  - (b)  $c(t) = (t, t + 1/t)$
  - (c)  $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$
  - (d)  $c(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$
  - (e)  $c(t) = (a \cos t, b \cos t, c \sin t)$
  - (f)  $c(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$
3. Uma curva  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem curvatura nula se e somente se a curva é uma reta.
4. Determine as curvas planas que tem curvatura constante.
5. Determine o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:
  - (a) (Cardioide)  $r = a(1 - \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (b) (Espiral de Arquimedes)  $r = a\theta$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (c) (Espiral de Logarítmica)  $r = e^{-\theta}$  onde  $0 \leq \theta$
6. Represente graficamente as curvas dadas em coordenadas polares e calcule a área limitada por elas:
  - (a) (Cardióide)  $r = a(1 - \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (b) (Rosa de quatro folhas)  $r = \sin 2\theta$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (c) (Limaçon ou Caracol)  $r = a(2 + \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

## Parte 2 - Funções de várias variáveis

1. Encontre o domínio das seguintes funções e represente-os graficamente:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

(c)  $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

(d)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

(e)  $\arctan\left(\frac{x - y}{1 + x^2 y^2}\right)$

(f)  $f(x, y, z) = \arcsen x + \arcsen y + \arcsen z$

2. Esboce o gráfico e desenhe as curvas de nível das funções:

(a)  $f(x, y) = 4 - x^2 + y^2$

(b)  $f(x, y) = ye^x$

(c)  $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

(d)  $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

(e)  $f(x, y) = y/x^2$

(f)  $f(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$

3. Calcule os seguintes limites caso existam ou mostrem que não existe:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right)$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{y^2-x^2}$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

4. Determine o conjunto dos pontos onde as seguintes funções são contínuas:

$$(a) f(x, y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \ln\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Determine  $a$  para que a função  $f$  seja contínua:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *Homogênea de grau  $m$*  se  $f(tx) = t^m f(x)$  para todo  $t > 0$ . Verifique se as seguintes funções são homogêneas determinando o grau de homogeneidade:

(a)  $f(x, y) = \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$

(b)  $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$

(c)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

7. Determine os pontos de máximo e de mínimo, caso existam, das seguintes funções no domínio  $D$  indicado:

(a)  $f(x, y) = 2x + y + 3$  onde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$

(b)  $f(x, y) = x - y + 4$  onde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y + 4 \geq 0, 3x + y + 1 \geq 0, x \leq 1\}$

(c)  $f(x, y) = x + y$  onde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

(d)  $f(x, y) = xy$  onde  $D = \mathbb{R}^2$

8. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função homogênea de grau 2 e suponha que  $f(\cos \theta, \sin \theta) = \sin 2\theta$  para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calcule

(a)  $f(4\sqrt{3}, 4)$

(b)  $f(0, 3)$

(c)  $f(x, y)$

9. Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função homogênea que se anula na circunferência de raio 1 então  $f$  é identicamente nula no plano exceto eventualmente na origem.

10. Um ponto descreve uma curva sobre a superfície  $z = xy$  de modo que sua projeção no plano  $xy$  descreve a curva  $x = 5 - t, y = t^2 + 3$ . Determine a máxima e a mínima altura atingida pelo ponto quando  $t$  percorre o intervalo  $[0, 4]$ .

11. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função homogênea de grau  $n$ . Considere o plano  $\pi$  determinado pelo eixo  $z$  e pela reta  $x = at, y = bt, z = 0$ . Descreva a curva obtida pela intersecção do plano com o gráfico de  $f$ . Utilize isto para esboçar o gráfico da função homogênea  $f(x, y) = x^2y$ .

12. Uma função do tipo  $f(x, y) = g(x) + h(y)$  é chamada de superfície de translação.
- Justifique o nome determinando as secções do gráfico de  $f$  com os planos  $y = \text{constante}$  (ou  $x = \text{constante}$ ).
  - Se  $g$  ou  $h$  é nula o gráfico de  $f$  é chamado de *superfície cilíndrica*. Justifique este nome.
13. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Verifique se são verdadeiras ou falsas seguintes sentenças:
- $A = \{x : f(x) > 0\}$  é aberto.
  - $\{x : f(x) = 0\}$  é fechado.
  - $\partial A = \{x : f(x) = 0\}$
  - $\partial A \subset \{x : f(x) = 0\}$
  - $\text{Ext}A = \{x : f(x) < 0\}$
  - $\text{Ext}A \supset \{x : f(x) < 0\}$
14. (*Conservação do sinal*) Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $p \in A$  e  $f(p) > 0$  mostre que existe  $r > 0$  tal que para todo  $x \in A$  com  $\|x - p\| < r$  tem-se que  $f(x) > 0$ .
15. Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $p$  e  $f(p) > 0$  mostre que existe um número  $r > 0$  tal que  $f(q) > 0$  para todo  $q \in B_p(r)$ .
16. Seja  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se para todos  $p, q \in D$  existe uma curva contínua  $c : [0, 1] \rightarrow D$  tal que  $c(0) = p$  e  $c(1) = q$  mostre que para todo número  $k$  tal que  $f(p) \leq k \leq f(q)$  existe um ponto  $c \in D$  tal que  $f(c) = k$ . Conclua disto que a imagem da função  $f$  é um intervalo.

### Parte 3 - Diferenciabilidade

1. Calcule a diferencial e os gradientes das seguintes funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

(a)  $f(x) = \langle a, x \rangle$

(b)  $g(x) = \langle x, x \rangle$

(c)  $r(x) = \|x\|$

2. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável com a propriedade  $f(tx) = tf(x)$  para todo  $t > 0$ . Mostre que  $f$  é linear.

3. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que  $f$  tem todas derivadas direcionais na origem mas não é diferenciável.

4. É possível  $\frac{\partial f}{\partial v}(0) > 0$  para todo vetor  $v \neq 0$  ?

5. Calcule as derivadas parciais das funções:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

(b)  $f(x, y) = \ln \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$

(c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

(d)  $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$

(e)  $f(x, y) = \arctan \left( \frac{x - y}{1 + x^2 y^2} \right)$

6. Mostre que a função  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  não é diferenciável na origem.

7. Utilize a diferencial para calcular um valor aproximado de  $\sqrt{(2, 8)^2 + 2(2, 1)^3}$ .

8. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2-2}$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

9. O altura de uma montanha é dada por  $h(x, y) = 2500 - 3x^2 - 4y^2$  em metros.
- Qual o formato da base?
  - Qual a altura da montanha?
  - Em que pontos do chão a altura é 900 metros?
  - Qual é a inclinação da montanha no ponto  $(20, 10, 900)$  que faz com o horizonte na direção  $\vec{u} = \sqrt{2}/2 \vec{i} + \sqrt{2}/2 \vec{j}$  ?
  - Encontre o vetor tangente à curva de nível  $C_{900}$  no ponto  $(20, 10)$ . Qual a inclinação nesta direção?
  - Determine  $\nabla f$  no ponto  $(20, 10)$ . Qual o valor da derivada direcional nesta direção?
10. Encontre a equação da reta normal ao gráfico de  $z = 5 + x^2 + y^2$  no ponto  $(1, 1, 7)$ .
11. As curvas de nível de uma função  $f$  são elipses  $x^2 + 2y^2 = a^2$ . Sabendo-se que  $|\nabla f| = e^{(x^2+2y^2)}$  determine  $\nabla f$ .
12. A equação de uma montanha e dada por  $z = 1800 - 3x^2 - 2y^2$  onde a distância é medida em metros e o eixo  $x$  aponta no sentido leste. Um alpinista encontra-se no ponto com coordenadas  $(-10, 10, 1300)$ .
- Qual é a direção a partir do alpinista que tem maior inclinação?
  - Se o alpinista andar na direção leste estará descendo ou subindo?
  - Se o alpinista andar na direção sudoeste estará descendo ou subindo?
  - Em que direção o alpinista estará percorrendo um caminho plano?
13. Mostre que  $z = x\phi(y/x) + \psi(y/x)$ , onde  $\phi, \psi$  são funções de uma variável deriváveis até segunda ordem, satisfaz a equação diferencial:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

14. Sejam  $S_1, S_2$  as superfícies dadas respectivamente pelas equações

$$z = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$$

- (a) Determine a equação do plano tangente a  $S_1$  no ponto  $(1, 1, 1/3)$ .
- (b) Determine os pontos de  $S_2$  tais que os planos tangentes nestes pontos sejam paralelos ao plano determinado na parte a.

15. Mostre que as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 = 4a(y + a)\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 = 4b(y + b)\}$$

onde  $a > 0$  e  $b < 0$  cortam-se ortogonalmente.

16. Seja  $f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  e interprete geometricamente.

17. Seja  $z = f(x, y)$  onde  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ .

(a) Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta$$

(b) Se  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  mostre que

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

18. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla f(x) = g(x)x$ . Prove que  $f$  é constante em qualquer esfera de raio  $r$  centrada na origem.



19. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *Homogênea de grau  $m$*  se  $f(tx) = t^m f(x)$  para todo  $t > 0$ . Sendo  $f$  diferenciável prove a relação de Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = m f(x)$$

ou seja  $\langle x, \nabla f(x) \rangle = m f(x)$ .

20. Determine a equação do plano tangente e da reta normal das seguintes superfícies no ponto especificado:

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  em  $p = (6, 2, 3)$
- (b)  $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$  em  $p = (2, -3, 4)$
- (c)  $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$  em  $p = (1, \pi/2, 0)$

21. Sejam  $f(x, y, z) = z - e^x \sin y$  e  $p = (\ln 3, 3\pi/2, -3)$ . Determine:

- (a)  $\nabla f(p)$ .
- (b) A reta normal em  $p$  à superfície de nível que passa por  $p$ .
- (c) O plano tangente em  $p$  à superfície do item b.

22. Dada uma curva  $c(t) \in \mathbb{R}^3$  definida num intervalo aberto dê a fórmula da distância de  $P$  a  $c(t)$ . Suponha que esta distância assume um mínimo em  $t_0$ . Mostre que a reta que liga  $P$  a  $c(t_0)$  é perpendicular à curva no ponto  $c(t_0)$ .

23. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície definida implicitamente por  $f(x) = 0$  e  $P$  um ponto fora de  $S$ . Seja  $d(x)$  a distância do ponto  $P$  a um ponto  $x$  da superfície  $S$ . Se  $X_0$  é um ponto de mínimo de  $d(x)$  mostre que a reta  $PX_0$  é perpendicular à superfície  $S$ . Para isto considere as curvas da superfície que passam por  $X_0$  e do exercício anterior conclua que  $PX_0$  é um múltiplo do gradiente da função  $f$ .

24. As curvas de nível de uma função  $z = f(x, y)$  são: Para  $a < 0$  a curva de nível  $C_{e^a}$  é a reta vertical  $x = a$ , A curva de nível 0 é o ponto  $(0, 0)$ , Para  $a > 0$  a curva de nível  $C_{a^2}$  é o semi-círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  onde  $x \geq 0$ .
- (a) A partir de um ponto  $p = (x, y)$  com  $x > 0$  qual a direção de maior crescimento da função? E a partir de um ponto  $q = (x, y)$  com  $x < 0$ ?
- (b) A função é contínua na origem?
- (c) Você consegue descrever analiticamente a função?
25. Mostre que a área de uma esfera de raio  $r$  é igual a área de um cilindro circunscrito a esta esfera.
26. Determine as funções positivas  $y = f(x)$  definida num intervalo  $[a, b]$  tais que  $\frac{dA}{dx}$  é constante onde  $A(x)$  é a área da superfície de revolução obtida girando em torno do eixo  $x$  o gráfico da função  $y = f(x)$  no intervalo  $[a, x]$ .
27. Determine uma função positiva  $y = f(x)$  definida num intervalo  $[a, b]$  tal que o volume do sólido de revolução obtido girando-se o gráfico de  $f$  em torno do eixo  $x$  seja igual a área de seu bordo.

#### Parte 4 - Máximos e Mínimos

- Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $\langle \nabla_x f, x \rangle > 0$  para  $x \neq 0$  então 0 é um mínimo de  $f$ .
- Se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $\langle \nabla_x f, x \rangle > 0$  para todo  $x$  tal que  $\|x\| = 1$  então existe um ponto  $p$  tal que  $\nabla_p f = 0$ .
- É possível  $\frac{\partial f}{\partial v}(0) > 0$  para todo vetor  $v \neq 0$  ?
- Classifique os pontos críticos das seguintes funções:
  - $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$
  - $f(x, y) = x^2y^2$
  - $f(x, y) = x^4 + y^4$
  - $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + x^2}$
  - $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
  - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - 2z$

5. Uma montanha tem a forma do gráfico da função

$$h(x, y) = 800y^2(2 - y^2) - 300x^2$$

- (a) Determine o formato da base da montanha.
- (b) Mostre que ela tem dois picos e uma depressão entre eles e determine suas alturas.

6. Determine os pontos e os respectivos valores de máximo e mínimo das seguintes funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  :

- (a)  $f(x, y) = xy$   $D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$   $D = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$
- (c)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - 2y + 1$   $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$
- (d)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$   $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -1 \leq y \leq 2\}$
- (e)  
 $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \text{sen}(x + y)$   $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\}$

7. Determine os extremos condicionados da função  $f$  nos seguintes casos:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 8x$  com a condição  $2x^2 + y^2 = 1$
- (b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  com a condição  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (c)  $f(x, y, z) = xyz$  com as condições  $x + y + z = 5$  e  $xy + yz + zx = 8$
- (d)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  quando  $13x^2 + 13y^2 - 10xy = 72$
- (e)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  quando  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$

8. Quais as dimensões de uma banheira retangular com uma capacidade de  $V$  litros de água de modo que sua superfície seja a menor possível?

9. Determine a menor distância entre um ponto da elipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$  e um ponto da reta  $2y - x + 16 = 0$ .

10. Uma distribuição de temperatura é dada pela função

$$T(x, y, z) = 100(3x^2 + 2y^2 + z^3 - z)$$

Determine os pontos mais quentes e os mais frios que estão sobre o elipsóide  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ .

11. Se  $f$  é uma função homogênea de grau  $k$  diferenciável e  $p$  um ponto crítico então  $f(p) = 0$ .