

# Cálculo Diferencial e Integral e Aplicações

Jose Antonio Verderesi



## Sumário

Introdução	1
Capítulo 1. Números Reais	8
1. As operações	8
2. A Ordem	10
3. Números Naturais	12
4. Sequências de Números Reais	15
5. Representação decimal de um Número Real	15
6. A completude dos Números Reais	17
7. Exercícios	21
Capítulo 2. Noções de Geometria Analítica	26
1. O Plano Cartesiano	26
2. As cônicas	29
3. Exercícios	35
Capítulo 3. Funções	37
1. Definição de Função	37
2. Exemplos	40
3. Construção de Funções	42
4. Usando gráficos para resolver inequações	45
5. Exercícios	49
Capítulo 4. Limites e Continuidade	51
1. Limites	51
2. Funções contínuas	63
3. Exercícios	66
Capítulo 5. Derivadas	71
1. Derivada	71
2. Derivada da Função inversa	76

3. Derivada da função implícita	79
4. Variação de Funções	79
5. Regras de L'Hôpital	81
6. Exponencial e Logaritmos	85
7. Funções trigonométricas e sua Inversas	96
8. Funções trigonométricas hiperbólicas	104
9. Exercícios	117
Capítulo 6. Integral	129
1. A noção de Integral	129
2. Condições de Integrabilidade	136
3. Classes de Funções Integráveis	138
4. Propriedades da Integral	140
5. TFC- Teorema Fundamental do Cálculo	143
6. Técnicas de Integração	146
7. Frações Parciais	148
8. Integrais Impróprias	154
9. Aplicações do Cálculo Integral	162
10. Exercícios	194
Capítulo 7. Curvas	204
1. Curvas	204
2. Exercícios	226
Capítulo 8. Fórmula de Taylor	230
1. Funções Polinomiais	230
2. Polinômio de Taylor	231
3. Formas do Resto	235
4. Exercícios	239
Capítulo 9. Rudimentos de Equações Diferenciais	241
1. Noções de Equações Diferenciais	241
2. Equações Especiais	243
3. Equações de 2ª Ordem Redutíveis	252
4. EDO nas Ciências Naturais	254
5. Exercícios	269
Capítulo 10. Funções de Várias Variáveis	272



1. Funções de Duas ou três Variáveis	272
2. Regra da Cadeia I	280
3. Gradiente, Conjuntos de Nivel	280
4. Campos de Vetores	282
5. Sistemas de Coordenadas	283
6. Regra da Cadeia II	286
7. Teorema das Funções Implícitas	287
8. Teorema da Função Inversa	295
9. Expressão de Funções num Sistema de Coordenadas	296
10. Exercícios	300
Capítulo 11. Aplicações do Cálculo	305
1. A equação de ondas	305
2. Solução da equação de ondas	309
3. Equações a Derivadas Parciais Lineares com Coeficientes Constantes	311
4. Equações autônomas e Campos Gradientes	319

## Introdução

Um campo de vetores no  $\mathbb{R}^3$  é uma função diferenciável  $e : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Sua diferencial em  $p \in \mathbb{R}^3$  é uma aplicação linear  $de_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Se

$$e(p) = (a_1(p), a_2(p), a_3(p))$$

então

$$de_p = (da_1)_p e_1 + (da_2)_p e_2 + (da_3)_p e_3$$

onde  $(e_1, e_2, e_3)$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

Considere agora três campos de vetores

$$e_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad i = 1, 2, 3$$

tais que, para cada ponto  $p$ ,  $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$  seja uma base do  $\mathbb{R}^3$ . A terna  $(e_1, e_2, e_3)$  é chamada um *referencial movel* no  $\mathbb{R}^3$ .

Seja  $(\theta_p^1, \theta_p^2, \theta_p^3)$  a base dual, isto é

$$\theta_p^i(e_j(p)) = \delta_j^i$$

Se  $v \in \mathbb{R}^3$ , então

$$v = \theta_p^1(v)e_1(p) + \theta_p^2(v)e_2(p) + \theta_p^3(v)e_3(p)$$

Assim, para cada  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $(\theta_p^1(v), \theta_p^2(v), \theta_p^3(v))$  são as coordenadas de  $v$  na base  $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ .

Diferenciando os campos  $e_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  temos

$$(de_i)_p = \omega_i^1(p)e_1(p) + \omega_i^2(p)e_2(p) + \omega_i^3(p)e_3(p)$$

Desta forma, obtemos uma matriz de 1-formas  $(\omega_j^i(p))$  para cada  $p \in \mathbb{R}^3$ . Estas são chamadas de *formas de conexão relativas ao referencial*  $(e_1, e_2, e_3)$ .

Suponhamos, agora, que para cada  $p$ ,  $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$  seja ortonormal (isto é, que  $\langle e_i(p), e_j(p) \rangle = \delta_{ij}$ ). Então, para  $v \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\|v\|_p^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2 + \theta_p^3(v)^2$$

e o produto interno de  $u$  por  $v$  é dado por

$$\langle u, v \rangle_p = \theta_p^1(u)\theta_p^1(v) + \theta_p^2(u)\theta_p^2(v) + \theta_p^3(u)\theta_p^3(v)$$

ou abreviadamente

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p = (\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2 + (\theta_p^3)^2$$

Diferenciando  $\langle e_i(p), e_j(p) \rangle = \delta_{ij}$  obtemos

$$\langle de_i(p), e_j(p) \rangle + \langle e_i(p), de_j(p) \rangle = 0$$

Substituindo  $de_i(p)$ , obtemos

$$\omega_j^i(p) + \omega_i^j(p) = 0$$

Assim, a matriz  $(\omega_j^i(p))$  é anti-simétrica.

Se  $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um novo campo de vetores, podemos decompô-lo no referencial  $(e_1(p), e_2(p), e_3(p))$ :

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p) + X^3(p)e_3(p)$$

Sua diferencial é dada por

$$dX_p = (dX^1)_p e_1(p) + (dX^2)_p e_2(p) + (dX^3)_p e_3(p) + X_p^1 (de_1)_p + X_p^2 (de_2)_p + X_p^3 (de_3)_p$$

Substituindo  $(de_i)_p$ , obtemos

$$dX_p = \sum_{i=1}^3 \left( (dX^i)_p + \sum_{j=1}^3 \omega_j^i(p) X_p^j \right) e_i(p)$$

Concluimos que para calcularmos  $dX_p$  basta conhecer as formas de conexão.

Nos cursos de cálculo, utilizamos em geral os campos constantes

$$\begin{cases} e_1(p) & = & e_1 \\ e_2(p) & = & e_2 \\ e_3(p) & = & e_3 \end{cases}$$

Para estes, as formas de conexão são nulas (isto é,  $\omega_j^i = 0$ ). Dizemos então que o referencial é *paralelo*.

Num referencial paralelo, a diferencial do campo  $X$  é a fórmula familiar

$$dX_p = (dX^1)_p e_1 + (dX^2)_p e_2 + (dX^3)_p e_3$$

Vejamos o que acontece quando trabalhamos com coordenadas cilíndricas no  $\mathbb{R}^3$ . Para cada ponto  $p$ , associamos os números  $(r(p), \theta(p), z(p))$  que se relacionam com as coordenadas

cartesianas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Os campos cilíndricos são

$$\begin{cases} e_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ e_2 = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{cases} de_1 = ((-\sin \theta)d\theta, (\cos \theta)d\theta, 0) = d\theta e_2 \\ de_2 = ((-\cos \theta)d\theta, (-\sin \theta)d\theta, 0) = -d\theta e_1 \\ de_3 = 0 \end{cases}$$

Então  $\omega_1^2(p) = d\theta_p$  e  $\omega_2^1 = -d\theta_p$ , as outras sendo nulas.

Considere agora uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  e um referencial ortonormal  $(e_1, e_2, e_3)$  tal que  $e_1(p)$  e  $e_2(p)$  são tangentes a  $S$  no ponto  $p$ . Claramente,  $e_3(p)$  é um vetor normal a  $S$  no ponto  $p$ .

Observe que se o referencial é paralelo, então a superfície  $S$  é um plano. Assim, para a geometria, é necessário trabalhar com referenciais não paralelos, ou seja, com campos  $e_i(p)$  que variam com  $p$ .

Se  $T_p S$  é o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ , então

$$v \in T_p S \Leftrightarrow \theta_p^3(v) = 0$$

A equação geral do plano  $T_p S$  é  $\theta_p^3 = 0$ .

Como o referencial é ortonormal, se  $v \in T_p S$ , então

$$\|v\|^2 = \theta_p^1(v)^2 + \theta_p^2(v)^2$$

Assim, para calcularmos comprimentos sobre  $S$ , basta conhecermos

$$(\theta_p^1)^2 + (\theta_p^2)^2$$

Toda a geometria de  $S$  está contida nas formas  $(\theta^1, \theta^2)$  e nas formas  $(\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3)$  obtidas diferenciando o referencial “adaptado” a  $S$ :

$$\begin{cases} de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases}$$

(Lembre-se de que  $(\omega_j^i)$  é anti-simétrica!)

$$(\omega_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2^1 & \omega_3^1 \\ \omega_1^2 & 0 & \omega_3^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_j^i = -\omega_i^j$$

Seja  $X$  um campo de vetores tal que  $X(p) \in T_p S$  para todo  $p \in S$ . Então

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Diferenciando, obtemos

$$dX_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + X^1(p)(de_1)_p(v) + X^2(p)(de_2)_p(v)$$

Substituindo  $(de_i)_p(v)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} dX_p(v) &= (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega_1^2)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)) + \\ &+ ((\omega_1^3)_p(v)X^1(p) + (\omega_2^3)_p(v)X^2(p))e_3(p) \end{aligned}$$

Em geral, vemos que  $dX_p(v)$  não é tangente a  $S$  no ponto  $p$ . A componente tangencial de  $dX_p(v)$  é chamada a *derivada covariante* de  $X$  em  $p$  e é denotada por  $\nabla_p X$ . Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p) + (\omega_1^2)_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

Portanto,  $(\nabla X)_p(v)$  pode ser calculada a partir da forma  $\omega = \omega_1^2 = -\omega_2^1$ , a qual é denominada a *forma de conexão* de  $S$ .

É comum denotar a derivada covariante de  $X$  em  $p$  na direção  $v$  por  $(\nabla_v X)_p$ . Assim,

$$(\nabla X)_p(v) = (\nabla_v X)_p$$

Isto é análogo a

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

$(\nabla X)_p(v)$  tem duas componentes, a saber

$$T = (dX_1)_p(v)e_1(p) + (dX_2)_p(v)e_2(p)$$

$$R = \omega_p(v)(-X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p))$$

A componente  $T$  é obtida diferenciando o campo  $X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$  como se  $e_1(p)$  e  $e_2(p)$  fossem constantes. Assim,  $T$  mede a taxa de variação “translacional” do campo  $X$  na direção  $v$  a partir do ponto  $p$ . A componente  $R$  é obtida diferenciando  $X$  como se suas componentes  $X^1(p)$  e  $X^2(p)$  fossem constantes. Observe que o vetor

$$X(p)^\perp = -X^2(p)e_1(p) + X^1(p)e_2(p)$$

é ortogonal ao vetor

$$X(p) = X^1(p)e_1(p) + X^2(p)e_2(p)$$

Assim,  $R = \omega_p(v)X(p)^\perp$  e, portanto,  $\omega$  é a velocidade de rotação do referencial no ponto  $p$  na direção  $v$ . Em particular, se tomarmos  $X(p) = e_1(p)$  ou  $X(p) = e_2(p)$ , obtemos

$$\begin{cases} (\nabla e_1)_p(v) = \omega_p(v)e_2(v) \\ (\nabla e_2)_p(v) = -\omega_p(v)e_1(p) \end{cases}$$

Abreviadamente,

$$\nabla(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$\nabla e = e\omega$$

$\omega$  é a velocidade angular do referencial  $e = (e_1, e_2)$  sobre a superfície.

A partir da derivada covariante, definimos paralelismo e geodésicas:

- um campo  $X$  é *paralelo* se  $\nabla X = 0$ ;
- uma curva  $c : I \rightarrow S$  é uma geodésica se  $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ .

Vamos, a seguir, interpretar as formas  $\omega_1^3$  e  $\omega_2^3$ .

O campo  $e_3$  é normal a  $S$ . Assim, a variação deste campo diz como a superfície se curva. Se  $e_3$  for constante, a superfície  $S$  é um plano. Portanto,  $(de_3)_p(v)$  deve, de alguma forma, medir como  $S$  se curva na direção  $v$ :

$$(de_3)_p(v) = \omega_3^1(v)e_1(p) + \omega_3^2(v)e_2(p)$$

Se designarmos por  $A_p(v) = -(de_3)_p(v)$ , então  $A_p : T_pS \rightarrow T_pS$  é uma aplicação linear. Por exemplo, se  $S$  é um plano, então  $e_3(p) = n$  é constante. Logo,  $A_p(v) = -(de_3)_p(v) = 0$ .

Se  $S$  é a esfera de raio  $R$ , então

$$e_3(p) = \frac{p}{\|p\|} = \frac{p}{R}$$

Segue que  $(de_3)_p(v) = v/R$  e, portanto,

$$A_p(v) = -\frac{v}{R}$$

Como veremos, a aplicação linear  $A_p : T_pS \rightarrow T_pS$  é simétrica, isto é,

$$\langle A_p(u), v \rangle = \langle u, A_p(v) \rangle$$

A *segunda forma fundamental* de  $S$  em  $p$  é definida por

$$b_p(u, v) = \langle A_p(u), v \rangle = \langle u, A_p(v) \rangle$$

que é bilinear e simétrica. Lembrando que

$$u = \theta_p^1(u)e_1(p) + \theta_p^2(u)e_2(p)$$

e

$$A_p(v) = \omega_1^3(v)e_1(p) + \omega_2^3(v)e_2(p)$$

temos

$$b(u, v) = \omega_1^3(u)\theta^1(v) + \omega_2^3(u)\theta^2(v)$$

A *primeira forma fundamental* é o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \theta^1(u)\theta^1(v) + \theta^2(u)\theta^2(v)$$

O teorema fundamental das superfícies no  $\mathbb{R}^3$  diz que a primeira e a segunda formas fundamentais determinam  $S$  a menos de uma isometria do  $\mathbb{R}^3$ .

A primeira forma fundamental permite calcular o comprimento de curvas sobre a superfície  $S$ . Já a segunda forma fundamental estabelece a forma da superfície dentro do  $\mathbb{R}^3$ .

Os aspectos geométricos que dependem apenas da primeira forma são denominados *intrínsecos*. Aqueles que dependem também da segunda forma são chamados *extrínsecos*.

Por exemplo, o elemento de área

$$dA = \theta^1 \wedge \theta^2$$

é intrínseco à superfície  $S$ .

Um outro exemplo é a forma de conexão  $\omega$ . A forma  $\omega$  só depende da primeira forma fundamental.

A aplicação linear  $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$  é simétrica e, portanto, diagonalizável. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  seus valores próprios. A *curvatura gaussiana* é definida por

$$K_p = \det A_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

e a *curvatura média* é definida por

$$H_p = \frac{\text{tr } A_p}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

O seguinte teorema relaciona a curvatura gaussiana e a forma de conexão. Ele diz que

$$d\omega = KdA$$

Como  $d\omega$  só depende da primeira forma fundamental, assim como  $dA$ , segue que  $K$  também só depende da primeira forma fundamental. Isto foi provado primeiramente por Gauss e deu origem ao que hoje conhecemos como Geometria Diferencial.

Por outro lado, a curvatura média é um invariante extrínseco da superfície  $S$ . Por exemplo, um pedaço de um plano e de um cilindro são isométricos e, portanto, suas curvaturas

gaussianas são nulas, mas suas curvaturas médias são diferentes. Para o plano,  $A_p = 0$ . Logo,  $K_p = \det A_p = 0$  e  $H_p = (\text{tr } A_p)/2 = 0$ . Para o cilindro,  $A_p$  tem valores próprios  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ . Logo,  $K_p = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$  e  $H_p = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 = \lambda_2/2 \neq 0$ .



## CAPÍTULO 1

# Números Reais

Neste capítulo deprecamos as propriedades que caracterizam o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais e deduzimos algumas de suas consequências. Esperamos que os leitores tenham familiaridade com os diversos conjuntos numéricos tais como os Números Naturais, inteiros e Racionais que serão usados para ilustrar as diversas estruturas algébricas dos Números Reais.

### 1. As operações

No conjunto dos Números Reais estão definidas duas operações a Adição que associa a dois números  $a$  e  $b$  sua soma  $a + b$  e a Multiplicação que associa o seu produto  $a.b$ .

A adição goza das seguintes propriedades:

$$A_1: \text{(Associatividade)} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$A_2: \text{(Comutatividade)} \quad a + b = b + c$$

$$A_3: \text{(Elemento Neutro)} \quad \text{Existe um número real } 0 \text{ com a propriedade } a + 0 = a$$

$$A_4: \text{(Elemento Oposto)} \quad \text{Todo número } a \text{ possui um oposto } -a \text{ com a propriedade } a + (-a) = 0$$

A multiplicação por sua vez obedece propriedades semelhantes:

$$M_1: \text{(Associatividade)} \quad (a.b).c = a.(b.c)$$

$$M_2: \text{(Comutatividade)} \quad a.b = b.c$$

$$M_3: \text{(Elemento Neutro)} \quad \text{Existe um número real } 1 \text{ com a propriedade } a.1 = a$$

$$M_4: \text{(Elemento Inverso)} \quad \text{Todo número } a \neq 0 \text{ possui um inverso } a^{-1} \text{ com a propriedade } a.a^{-1} = 1$$

Um leitor atento poderia se perguntar porque o 0 não tem inverso. Como veremos mais adiante existem estruturas multiplicativas em que todos os elemento tem inversos. O que distingue a adição da multiplicação é a propriedade seguinte que mostra a relação entre elas.

$$D: \text{(Distributividade)} \quad a.(b + c) = a.b + a.c$$

A Subtração é a operação que associa aos elementos  $a, b \in \mathbb{R}$  a diferença  $a - b = a + (-b)$ . Já divisão associa o quociente  $a/b = a.b^{-1}$  desde que seja  $b \neq 0$ .

Vamos a seguir deduzir algumas propriedades envolvendo as operações.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Se  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  então*

(1)  $a \cdot 0 = 0$

(2)  $a \cdot b = 0$  então  $a = 0$  ou  $b = 0$

(3)  $-(-a) = a$

(4)  $(a^{-1})^{-1} = a$

(5) (Regras dos sinais)  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$  e  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(6) (Cancelamento)  $a \cdot c / bc = a / b$

(7) (Produto de frações)  $(a/b) \cdot (c/d) = a \cdot c / b \cdot d$

(8) (Soma de frações)  $a/b + c/d = (a \cdot d + b \cdot c) / b \cdot d$

DEMONSTRAÇÃO. Observe que da propriedade distributiva  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ . Somando-se  $- (a \cdot 0)$  nos dois lados da igualdade  $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$  obtemos  $a \cdot 0 = 0$ . Agora se  $a \cdot b = 0$  e  $a \neq 0$  então multiplicando ambos os lados por  $a^{-1}$  e obtemos  $a^{-1}(a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$  de onde concluímos  $1 \cdot b = b = 0$ . Sabemos que  $-(-a) + (-a) = 0$  somando-se  $a$  teremos  $-(-a) + (-a) + a = 0 + a$ . Como  $(-a) + a = 0$  vem que  $-(-a) = a$ . Para mostramos  $(a^{-1})^{-1} = a$  fazemos o mesmo raciocínio trocando soma e opostos por produto e inverso. Notando que  $(-a) \cdot b + (a \cdot b) = (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$  somando-se  $-a \cdot b$  a ambos os lados obtemos  $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ . Segue disto que  $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$ . Para o cancelamento basta observar que  $a \cdot c / bc = a \cdot c (b \cdot c)^{-1} = a \cdot c (c^{-1} \cdot b^{-1}) = a \cdot b^{-1} = a / b$ . Deixamos as outras propriedades como exercício.

□

Podemos neste momento justificar porque o número 0 não tem inverso pois se existisse  $0^{-1}$  então multiplicando ambos os lados da igualdade  $0 \cdot a = 0$  por  $0^{-1}$  vem  $a = 1$  ou seja somente existiria o número 1!

EXEMPLO 1.2. *No conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  também estão definidas as operações de adição e multiplicação. Mas estas não verificam as propriedades  $A_4$  e  $M_4$ .*

EXEMPLO 1.3. *No conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  a operação de adição verifica todas as propriedades mas a multiplicação não verifica  $M_4$ .*

EXEMPLO 1.4. *Vejamos um exemplo menos popular de sistema numérico, O Relógio de doze horas. Neste aparecem somente doze números sendo  $12 = 0$ . Vamos designá-lo por  $\mathbb{Z}_{12}$ . Operamos nele assim  $1 + 2 = 3$ ,  $3 + 5 = 8$ ,  $7 + 8 = 15 = 3$ ,  $11 + 2 = 1$  e assim por diante. Com relação à multiplicação observe que  $2 \cdot 6 = 12 = 0$ . Disto segue 2 não tem inverso pois se tivesse teríamos  $2^{-1} \cdot 2 \cdot 6 = 2^{-1} \cdot 0 = 0$  e concluímos que  $6 = 0$  o que é claramente falso no relógio. Por outro lado  $5 \cdot 5 = 25 = 1$  ou seja  $5^{-1} = 5$ ! Assim em  $\mathbb{Z}_{12}$  alguns elementos tem inverso e outro não e a propriedade  $M_4$  não está verificada.*

EXEMPLO 1.5. *Considere agora um relógio imaginário com cinco números designado por  $\mathbb{Z}_5$ . As operações neste relógio são dadas na tabela abaixo.*

+	0	1	2	3	4		·	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4		0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0		1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	4	1		2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2		3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3		4	0	4	3	2	1

*O leitor pode verificar que todas as propriedades da adição e multiplicação estão verificadas.*

## 2. A Ordem

No conjunto dos números reais está definida uma relação de ordem que relaciona dois elementos  $a$  e  $b$  indicada por  $a < b$  onde lê-se  $a$  menor que  $b$ . Esta obedece os seguintes axiomas:

$O_1$ : (Transitividade) Se  $a < b$  e  $b < c$  então  $a < c$

$O_2$ : (Tricotomia) Uma e somente uma das condições ocorre  $a < b$ ,  $a = b$  ou  $b < a$ .

$OA$ : (compatibilidade com a adição) Se  $a < b$  então  $a + c < b + c$

$OM$ : (compatibilidade com a multiplicação) Se  $a < b$  e  $0 < c$  então  $a \cdot c < b \cdot c$

Se  $a < b$  escrevemos também  $b > a$  e dizemos  $b$  maior que  $a$ . Da mesma forma escrevemos  $a \leq b$  se  $a < b$  ou  $a = b$ .

EXEMPLO 1.6. *O relógio  $\mathbb{Z}_5$  não admite uma ordem com as propriedades listadas acima, pois digamos  $0 < 1$  então da propriedade  $OA$  teríamos  $1 < 2$ ,  $2 < 3$ ,  $3 < 4$ ,  $4 < 0$  mas da transitividade vem que  $0 < 4$ . O que contradiz a propriedade  $O_2$ .*

EXEMPLO 1.7. *O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  verifica todas as propriedades das operações e da ordem.*

Um número  $a$  é dito Positivo se  $a > 0$ . O conjunto do números positivos será indicado por  $\mathbb{R}^+$ . Assim

$$a \in \mathbb{R}^+ \iff a > 0$$

PROPOSIÇÃO 1.8. Se  $a, b \in \mathbb{R}$  então

- (1) Se  $a > 0$  então  $-a < 0$
- (2)  $1 > 0$
- (3) Se  $a > 0$  e  $b > 0$  então  $a.b > 0$
- (4) Se  $a > 0$  e  $b < 0$  então  $a.b < 0$
- (5) Se  $a < 0$  e  $b < 0$  então  $a.b > 0$
- (6) Se  $a > 0$  então  $\frac{1}{a} > 0$
- (7) Se  $a > 1$  então  $0 < \frac{1}{a} < 1$
- (8) Se  $0 < a < 1$  então  $\frac{1}{a} > 1$

DEMONSTRAÇÃO. Se  $a > 0$  somando-se  $-a$  em ambos os lados da desigualdade tem-se  $-a + a > -a + 0$ . Assim  $0 > -a$  e portanto  $-a < 0$ . Se  $1 < 0$  então pela propriedade anterior  $-1 > 0$ . Multiplicando ambos os lados por  $-1$  pela propriedade *OM* tem-se  $(-1).(-1) > (-1).0$ . Ou seja  $1 > 0$  o que contradiz nossa hipótese. Logo  $1 > 0$ . Se  $a > 0$  e  $b > 0$  multiplicando ambos os lados da desigualdade  $a > 0$  por  $b$  segue da propriedade *OM* que  $b.a > b.0$  e  $b.a > 0$ . Se  $a > 0$  e  $b < 0$  então  $-b > 0$ . Multiplicando a primeira desigualdade por  $-b$  vem  $-ba > 0$ . Da primeira parte tem-se  $ba < 0$ . A última proposição é deixada como exercício.  $\square$

Através da ordem define-se Módulo ou Valor Absoluto de um número real.

DEFINIÇÃO 1.9.

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

Assim se  $a \geq 0$   $|a| = a$  e se  $a < 0$   $|a| = -a$ . Em todos os casos  $|a| \geq 0$ .

Da definição segue que  $|a| \geq a$  e  $|a| \geq -a$ . Como  $|a|^2 = |a||a| = a.a = (-a)(-a) = a^2$  tem-se  $|a|^2 = a^2$ . Assim  $|a| = \sqrt{a^2}$  pois  $|a| \geq 0$ .

TEOREMA 1.10. Se  $a$  e  $b$  são números reais então

- (1)  $|a.b| = |a||b|$
- (2) (Desigualdade Triangular)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

DEMONSTRAÇÃO.  $|a.b|^2 = (a.b)^2 = a^2.b^2$ . Extraíndo a raiz quadrada de ambos os lados e observando que todos os termos são positivos tem-se  $|a.b| = \sqrt{a^2.b^2} = \sqrt{a^2}.\sqrt{b^2} = |a|.|b|$ . Para a segunda parte levando em consideração que  $a.b \leq |a.b|$  segue  $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2a.b \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a|.|b| = (|a| + |b|)^2$  Novamente tirando a raiz obtem-se  $|a + b| \leq |a| + |b|$   $\square$

DEFINIÇÃO 1.11. Um intervalo é um subconjunto  $I \subset \mathbb{R}$  que verifica a seguinte condição: para todos  $x_1, x_2 \in I$  se  $x_1 < x < x_2$  então  $x \in I$ .

Mostra-se que um intervalo é igual a  $\mathbb{R}$  ou a um dos conjuntos:

- $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$     $[a, \infty[ = \{x : a \leq x\}$
- $[a, b[ = \{x : a \leq x < b\}$     $]a, \infty[ = \{x : a < x\}$
- $]a, b] = \{x : a < x \leq b\}$     $] - \infty, b] = \{x : x \leq b\}$
- $]a, b[ = \{x : a < x < b\}$     $] - \infty, b[ = \{x : x < b\}$

PROPOSIÇÃO 1.12. *Seja  $r > 0$  e  $c$  um número qualquer. Então,*  
 $|x - c| < r$  *se e somente se*  $c - r < x < c + r$

DEMONSTRAÇÃO.

$$|x - c| < r \iff \max\{(x - c), -(x - c)\} < r \iff$$

$$(x - c) < r \quad \text{e} \quad -(x - c) < r \iff$$

$$(x - c) < r \quad \text{e} \quad -r < (x - c) \iff$$

$$-r < (x - c) < r \iff c - r < x < c + r$$

□

### 3. Números Naturais

Nesta seção vamos caracterizar o conjunto dos números naturais como um subconjunto dos números reais.

DEFINIÇÃO 1.13. *Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  diz-se Indutivo se*

(1)  $0 \in A$

(2) *Se  $n \in A$  então  $n + 1 \in A$*

Claramente os seguintes conjuntos são indutivos:  $\mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ .

DEFINIÇÃO 1.14. *Um número real  $a \in \mathbb{R}$  diz-se Natural se ele pertence a todo subconjunto indutivo. Desta forma o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é o menor subconjunto indutivo dos números reais. Reformulando: Se  $A$  é um conjunto indutivo então  $\mathbb{N} \subset A$ .*

A seguinte proposição é uma consequência imediata da definição acima mas é fundamental para demonstrações de proposições a respeito de números naturais.

PROPOSIÇÃO 1.15. *Princípio de Indução Finita (PIF)*

*Se  $A \subset \mathbb{N}$  verifica  $0 \in A$  e  $n \in A \implies n + 1 \in A$  então  $A = \mathbb{N}$ .*

Se desejamos mostrar que todo número natural verifica uma propriedade  $P(n)$  basta mostrarmos que  $P(0)$  é verdadeira e que  $P(n) \implies P(n+1)$ . Pois se consideramos o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$  este é indutivo e da proposição acima ele coincide com  $\mathbb{N}$ .

EXEMPLO 1.16. *Vamos provar por indução que*

$$0 + 1 + 2 + 3 \dots n = n.(n+1)/2$$

Chamemos de  $P(n)$  esta igualdade, e vamos mostrar que o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$  é igual a  $\mathbb{N}$ .  $P(0)$  é a sentença  $0 = 0$  que é válida. Logo  $0 \in A$ . Agora suponha  $P(n)$  verdadeira. Então  $n \in A$  e vale que  $0+1+2+3 \dots n = n.(n+1)/2$ . Somando-se  $n+1$  em ambos os lados da igualdade obtem-se  $0+1+2+3 \dots n+(n+1) = n.(n+1)/2+(n+1) = (n+1)(n+2)/2$ . Assim  $P(n+1)$  é verdadeira e portanto  $n+1 \in A$ . Da proposição conclui-se que  $A = \mathbb{N}$ . Segue que para todo natural  $n$   $0+1+2+3 \dots n = n.(n+1)/2$ .

PROPOSIÇÃO 1.17. *Se  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$  então existe  $m$  tal que  $n = m+1$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ e existe } m \text{ tal que } n = m+1\}$$

Mostremos que  $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ .  $1 \in A$  pois como  $1 = 0+1$  basta tomar  $m=0$ . Se  $n \in A$  então existe  $m$  tal que  $n = m+1$ . Segue que  $n+1 = (m+1)+1$ . Logo  $n+1 \in A$ .  $\square$

O número  $m$  será indicado por  $n-1$ .

PROPOSIÇÃO 1.18. *Se  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $n \geq m$  então existe  $d$  tal que  $n = m+d$ . O número  $d$  chama-se a diferença entre  $n$  e  $m$  e será indicado por  $d = n-m$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o conjunto

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \text{para todo } n \geq m \text{ existe } d \text{ tal que } n = m+d\}$$

$0 \in A$  pois como  $n = 0+n$  basta tomar  $d=n$ .

Agora se  $m \in A$  então para todo  $n$  existe  $d$  tal que  $n = m+d$ . Se  $n \geq m+1$  então  $n-1 \geq m$ .

Por hipótese existe  $d$  tal que  $n-1 = m+d$ . Segue que  $n = (m+1)+d$ . Logo  $m+1 \in A$ .

Como  $A$  é indutivo segue que  $A = \mathbb{N}$ .  $\square$

PROPOSIÇÃO 1.19. *Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Não existe um número natural  $a$  tal que  $k < a < k+1$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Considere o conjunto

$$A = \{0, 1, 2, \dots, k\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq k+1\}$$

Mostremos que  $A$  é indutivo.

Claramente  $0 \in A$ .

Se  $n < k - 1$  então  $n + 1 \leq k$  e  $n \in A$ . Se  $n = k$  então  $n + 1 = k + 1 \in \{n \in \mathbb{N} : n \geq k + 1\}$ . Portanto  $n + 1 \in A$ .

Se  $n \geq k + 1$  então  $n + 1 \geq k + 1$  e portanto  $n + 1 \in A$ . Segue que  $A$  é indutivo. Logo  $A = \mathbb{N}$ . Como não existe  $a \in A$  tal que  $k < a < k + 1$  então não existe  $a \in \mathbb{N}$  tal que  $k < a < k + 1$ .  $\square$

A seguir vamos demonstrar uma das mais importantes propriedades dos números naturais.

PROPOSIÇÃO 1.20. (*Princípio da Boa Ordem*)

Se  $S \subset \mathbb{N}$  é um subconjunto não vazio então existe um elemento  $m \in S$  tal que para todo  $a \in S$  tem-se que  $m \leq a$ , ou seja  $S$  tem um elemento mínimo ( $m = \min S$ ).

DEMONSTRAÇÃO. Se  $0 \in S$  então  $m = 0$  é o menor elemento de  $S$ . Caso contrário considere o conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n < a \text{ para todo } a \in S\}$$

Como  $0$  não pertence a  $S$  então  $0 \in A$ . Como  $A \neq \emptyset$  então  $A \neq \mathbb{N}$ .

Então deve existir  $n \in A$  tal que  $n + 1 \notin A$  pois caso contrário  $A$  seria indutivo e teríamos  $A = \mathbb{N}$ .

Como  $n \in A$  então para todo  $a \in S$  tem-se  $n < a$  e como  $n + 1 \notin A$  existe  $a \in S$  tal que  $a \leq n + 1$ . Este  $a$  está entre  $n$  e  $n + 1$ . Como  $a$  é um número natural só resta a possibilidade  $a = n + 1$ . Se  $m = a = n + 1$  então para todo  $a \in S$  tem-se  $m \leq a$ .  $\square$

A seguinte proposição é uma aplicação do princípio da boa ordem.

PROPOSIÇÃO 1.21. (*Algoritmo da Divisão*)

Dados dois números  $m, n \in \mathbb{N}$  com  $m \leq n$  existem únicos números  $q$  e  $r$  tais que

$$n = qm + r$$

onde  $0 \leq r < m$ .

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos  $n, m$  e seja

$$A = \{n - qm : q \in \mathbb{N} \text{ e } n - qm \geq 0\}$$

Como  $n = n - 0m$  então  $n \in A$  e  $A \neq \emptyset$ .

Pelo princípio da boa ordem  $A$  tem um menor elemento  $r$ .

Como  $r$  está em  $A$  existe  $q$  tal que  $r = n - qm$ .

Falta mostrar que  $r < m$ .

Se  $r \geq m$  então  $r = m + r_1$  e teríamos

$$n - qm = r = m + r_1$$

$$n - (q + 1)m = r_1$$

com  $r_1 < r$ .

contradizendo a minimalidade de  $r$ .

□

#### 4. Sequências de Números Reais

Uma *Sequência* de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  naturais e cuja imagem é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  designada por  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . O valor da sequência no número  $n$  será indicado por  $s_n$ . É comum escrever  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ . usa-se também a notação abreviada  $(s_n)$  subentendendo que o domínio é o conjunto dos naturais.

São exemplos de sequências  $s_n = n$ ,  $s_n = 1/n$ ,  $s_n = 1$  sendo a última uma sequência constante.

**DEFINIÇÃO 1.22.** *Uma sequência  $(s_n)$  diz-se Limitada Superiormente se existe uma constante  $M$  tal que  $s_n \leq M$ . Neste caso diz-se que  $M$  é um majorante da sequência. Claro que qualquer número maior que  $M$  também é um majorante da sequência. Da mesma forma define-se Limitada Inferiormente se existe uma constante  $m$  tal que  $s_n \geq m$ .  $m$  é um minorante da sequência.*

*Uma sequência  $(s_n)$  diz-se sequência crescente se para todo  $n$  tem-se que  $s_n \leq s_{n+1}$  e decrescente se  $s_n \geq s_{n+1}$ . Define-se também sequência estritamente crescente se  $s_n < s_{n+1}$  e estritamente decrescente  $s_n > s_{n+1}$ .*

**EXEMPLO 1.23.** *A sequência  $(n^2)$  é estritamente crescente pois  $n^2 < (n + 1)^2$  mas não é limitada superiormente. Já a sequência  $(1/n)$  é estritamente decrescente pois  $n < n + 1$  donde  $1/(n + 1) < 1/n$  e limitada inferiormente por 0 ou qualquer outro número negativo.*

**DEFINIÇÃO 1.24.** *Um número  $l$  é Limite da sequência  $(s_n)$  se para cada  $r > 0$  podemos encontrar  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  tem-se  $|s_n - l| < r$ . quando isto acontecer escreveremos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = l$$

*ou simplesmente  $\lim s_n = l$ .*

#### 5. Representação decimal de um Número Real

As propriedades das operações e da ordem não distinguem  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$ . Sabemos que existem números reais que não são racionais como  $\sqrt{2}$  e mais geralmente  $\sqrt{p}$  onde  $p$  é um número primo.



Além das raízes que são números algébricos existem números como o  $\pi$  e o  $e$  que também não são racionais. Para compreendermos a propriedade que permite descrever todos os números reais além dos racionais vamos analisar o que significa a representação decimal de um número real.

Quando escrevemos por exemplo o número 517,328 a parte inteira é 517 e a parte decimal 0,328. Este número pode ser escrito

$$517,328 = 517 + 3/10 + 2/100 + 8/10^3$$

Seja  $L$  um número real positivo. Começamos escolhendo  $n$  o maior número natural menor que  $L$ . Então  $n \leq L < n+1$ . Este é chamado a parte inteira de  $L$ . Subtraindo  $n$  na desigualdade  $0 \leq L - n < 1$ . Assim  $d = L - n$  é um número entre 0 e 1 chamado de parte decimal de  $L$ . Dividimos o intervalo  $[0, 1]$  em dez partes. Como  $0 \leq d < 1$  existe um número  $d_1$  tal que

$$(1) d_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$(2) d_1/10 \leq d < (d_1 + 1)/10$$

Assim

$$0 \leq d - d_1/10 < 1/10$$

A seguir escolhemos  $d_2$  tal que

$$(1) d_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$(2) d_2/10^2 \leq d < (d_2 + 1)/10^2 \text{ Então}$$

$$0 \leq d - d_1/10 - d_2/10^2 < 1/10^2$$

Repetindo o processo obtem-se  $d_1, d_2, \dots, d_k$  tais que

$$0 \leq d - d_1/10 - d_2/10^2 - \dots - d_k/10^k < 1/10^k$$

Se para algum  $k$  obtemos a igualdade

$$d = d_1/10 + d_2/10^2 + \dots + d_k/10^k$$

então a representação decimal de  $L$  será

$$L = n, d_1 d_2 \dots d_k$$

Caso contrário  $L$  será representado por uma sequência infinita

$$L = n, d_1 d_2 \dots d_k \dots$$

A sequência

$$s_k = n, d_1 d_2 \dots d_k = n + d_1/10 + d_2/10^2 + \dots + d_k/10^k$$

- (1) é crescente  $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_k \leq \dots$
- (2) limitada superiormente para todo  $k$  tem-se  $s_k \leq n + 1$
- (3)  $\lim s_k = L$  pois dado um número real  $r > 0$  por menor que seja podemos encontrar um natural  $n_0$  tal que  $1/10^{n_0} < r$  e da construção da sequência tem-se para todo  $k > n_0$   $|s_k - L| < 1/10^{n_0} < r$ .

Assim todo número real é limite de uma sequência de números racionais. A recíproca, isto é, toda sequência de racionais admite um limite é o axioma que distingue  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$ .

*OBSERVAÇÃO 1.25. A propriedade que dado um número  $L$  existe o menor natural  $n$  maior  $L$  é chamado o O princípio da boa Ordem e foi utilizado indiretamente na construção da representação decimal. Vamos demonstrá-lo na próxima seção.*

*Na expansão decimal os números racionais são representados pelas dízimas periódicas. Por exemplo o número  $7,13131313\dots$  é racional como mostra o seguinte cálculo.*

$$7,13131313\dots = 7 + 13/100 + 13/100^2 + \dots + 13/100^n + \dots$$

*Agora  $S = 1/100 + 1/100^2 + \dots + 1/100^n + \dots$  é a soma de uma progressão geométrica de razão  $1/100$  cujo valor é  $S = 1/99$ .*

$$\text{De onde } 7,13131313\dots = 7 + 13/99 \text{ um racional.}$$

*As outras expansões decimais representam os números irracionais como por exemplo*

$$a = 0,1011011101111\dots$$

Como vimos todo número real é limite de uma sequência de números racionais. A recíproca, isto é, toda sequência de racionais admite um limite é consequência do axioma enunciado a seguir e que distingue  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$ .

## 6. A completude dos Números Reais

Enunciamos abaixo a última propriedade dos números reais. Propriedade esta que os números racionais não tem. Além disto ela torna os números reais completo no sentido que um outro conjunto com a mesma estrutura algébrica que  $\mathbb{R}$  e satisfazendo a propriedade  $C$  abaixo é essencialmente  $\mathbb{R}$ .

**$C$ : Toda sequência crescente e limitada superiormente possui um limite.**

Assim se  $(s_n)$  é uma sequência crescente e limitada superiormente existe  $l = \lim s_n$ .

Claramente toda sequência decrescente  $(s_n)$  e limitada inferiormente possui um limite. Basta considerar o limite  $l = \lim(-s_n)$  e concluir que  $\lim s_n = -l$ .

A seguir enunciamos e demostramos algumas propriedades consequente do axioma da completude.

TEOREMA 1.26. (*Propriedade Arquimediana*)

*O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais não é limitado superiormente.*

DEMONSTRAÇÃO. A sequência  $s_n = n$  é crescente. Se  $\mathbb{N}$  for limitado superiormente então do axioma  $C$  existe  $l = \lim n$ . Como a sequência é crescente  $n < l$  qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . tomando-se  $r = 1/2$  da definição de limite podemos encontrar  $n_0$  tal que para  $n > n_0$  tem-se  $l - n < 1/2$  ou seja  $l < n + 1/2 < n + 1$  o que é uma contradição.  $\square$

TEOREMA 1.27. (*Intervalos Encaixados*)

*Dada uma sequência de intervalos fechados e encaixados  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$  existe um número real  $c$  que pertence a todos os intervalos, isto é,  $c \in [a_k, b_k]$  para todo  $k$ .*

DEMONSTRAÇÃO. A sequência  $(a_n)$  é crescente e limitada superiormente por  $b_k$  qualquer que seja  $k$ . Da Propriedade  $C$  segue que existe o limite  $c = \lim a_n$ . Como  $a_n \leq b_k$  para todo  $n$  fixado um  $b_k$  então  $c \leq b_k$  ou seja  $c \in [a_k, b_k]$  para qualquer  $k$ .  $\square$

Vamos enunciar algumas definições que serão importantes para a definição da Integral que será dada num capítulo posterior.

Seja  $A \subset \mathbb{R}$  subconjunto qualquer  $A \neq \phi$ .

DEFINIÇÃO 1.28.

*$M$  diz-se o Máximo de  $A$  e escreve-se  $M = \max A$  se  $M \in A$  e  $a \leq M$  qualquer que seja  $a \in A$ .*

*$m$  diz-se o Mínimo de  $A$  e escreve-se  $M = \min A$  se  $m \in A$  e  $a \geq m$  qualquer que seja  $a \in A$ .*

*$A$  diz-se limitado superiormente se existe  $L$  tal que  $a \leq L$  para todo  $a \in A$ . Diremos então que  $L$  é um Majorante de  $A$ .*

*$A$  diz-se limitado inferiormente se existe  $l$  tal que  $a \geq l$  para todo  $a \in A$ . Diremos então que  $l$  é um Minorante de  $A$ .*

Seja  $L(A)$  o conjunto dos majorantes de  $A$  e  $l(A)$  o conjunto dos minorantes de  $A$ . Se  $L \in L(A)$  e  $L_1 \geq L$  então claramente  $L_1 \in L(A)$ . Segue que  $[L, \infty[ \subset L(A)$ . Conclui-se disto que para algum número  $S$

$$L(A) = [S, \infty[ \text{ ou } L(A) = ]S, \infty[$$

Semelhantemente

$$l(A) = [-\infty, s[ \text{ ou } l(A) = ]-\infty, s[$$

A proposição abaixo exclui as segundas possibilidades.

DEFINIÇÃO 1.29. *O Supremo de  $A$  denotado por  $\sup A$  é o menor majorante de  $A$ , isto é,  $\sup A = \min L(A)$ .*

O *Ínfimo* de  $A$  denotado por  $\inf A$  é o maior minorante de  $A$ , isto é,  $\inf A = \max L(A)$ .

A existência do supremo e do ínfimo é uma consequência do axioma da completude.

PROPOSIÇÃO 1.30. *Todo subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio e limitado superiormente admite um supremo, isto é, existe  $\sup A$ .*

Segue que  $L(A) = [S, \infty[$  onde  $S = \sup A$ .

DEMONSTRAÇÃO.  $A \neq \emptyset$ . Escolhemos  $a_0 \in A$ . Como  $L(A) \neq \emptyset$  tomemos  $b_0 \in L(A)$ . Se  $c_1 = (b_0 + a_0)/2$ , ponto médio de  $[a_0, b_0]$ , temos duas possibilidades para  $c_1$ :

- (1)  $c_1 \in L(A)$ , isto é  $c_1$  é um majorante de  $A$ . Neste caso toma-se  $a_1 = a_0$  e  $b_1 = c_1$  e tem-se  $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$
- (2)  $c_1 \notin L(A)$ . Logo existe  $a_1 \in A$  tal que  $c_1 < a_1$  e escolhemos  $b_1 = b_0$  e tem-se  $b_1 - a_1 \leq (b_0 - a_0)/2$ .

Repetindo o processo para o intervalo  $[a_1, b_1]$  onde  $c_2 = (b_1 + a_1)/2$  obtem-se  $a_2, b_2$  tais que  $a_0 \leq a_1 \leq a_2, b_2 \leq b_1 \leq b_0$  e  $b_2 - a_2 \leq b_1 - a_1 \leq (b_0 - a_0)/4$ .

Indutivamente obtem-se duas sequências

- (1)  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n \leq \dots$  de elementos de  $A$
- (2)  $\dots b_n \leq \dots b_2 \leq b_1 \leq b_0$  de elementos de  $L(A)$

tais que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots a_n \leq \dots b_n \leq \dots b_2 \leq b_1 \leq b_0$$

e

$$b_n - a_n \leq (b_0 - a_0)/2^n$$

A sequência  $(a_n)$  é crescente e limitada superiormente e  $(b_n)$  é decrescente e limitada inferiormente. Do axioma (C) da completude elas possuem limites. Como  $\lim(b_n - a_n) = 0$  estes limites são iguais. Assim

$$\lim b_n = \lim a_n = S$$

$S$  é um majorante de  $A$  pois caso contrário existe  $a \in A$  tal que  $S < a$  o que contradiz o fato que  $\lim b_n = S$ .

$S$  é o menor majorante de  $A$  senão existe  $M \in L(A)$  tal que  $M < S$  contradizendo  $\lim a_n = S$ . Isto conclui a demonstração.

□

como consequência temos o seguinte

COROLÁRIO 1.31. *Todo subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  não vazio e limitado inferiormente admite um ínfimo, isto é, existe  $\inf A$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Se  $A$  é limitado inferiormente por  $l$  então o conjunto  $-A = \{-x : x \in A\}$  é limitado superiormente por  $-l$  e se  $S$  é o  $\sup -A$  então  $-S$  é o  $\inf A$ .  $\square$

EXEMPLO 1.32.

$$(1) A = \{-2, 0, \pi, 7, 5\} \quad \max A = 7, \min A = -2, \sup A = 7, \inf A = -2$$

$$(2) A = [1, 3] \quad \max A = 3, \min A = 1, \sup A = 3, \inf A = 1$$

$$(3) A = ]1, 3[ \quad \text{Não existem } \max A \text{ e } \min A, \quad \sup A = 3, \inf A = 1$$

$$(4) A = \{x : x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \text{ e } 0 \leq x \leq 1\} \quad \text{Não existem } \max A \text{ e } \min A, \quad \sup A = 1, \inf A = 0$$

$$(5) A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \text{ e } x^2 \leq 2\} \quad \text{Não existe } \max A, \min A = 0, \sup A = \sqrt{2}, \inf A = 0$$

A seguinte proposição caracteriza o supremo.

PROPOSIÇÃO 1.33. *Um número  $S$  é o  $\sup A$  se, e somente se estiver verificadas as seguintes condições:*

$$(1) a \leq S \text{ para todo } a \in A$$

$$(2) \text{ Se } b < S \text{ então existe } a \in A \text{ tal que } b < a.$$

Esta proposição é uma releitura da definição de supremo pois a primeira parte diz que  $S$  é um majorante de  $A$  e a segunda que  $S$  é o menor majorante.

Deixamos para o leitor enunciar e demonstrar a proposição equivalente para o  $\inf A$ .

## 7. Exercícios

## Parte 1 - Operações.

(1) Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a)  $1 = 2 \implies 2 = 3$

(b) Se  $a, b \in \mathbb{Z}_5$  então  $(a^2 + b^2 = 0 \implies a = 0 \text{ e } b = 0)$

(c)  $ax = a \implies x = 1$

Obs:  $\mathbb{Z}_5$  é o nome matemático para o relógio de cinco horas.

(2) Se  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  prove que  $(a/b)^{-1} = b/a$ .

(3) Prove que

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para  $r \neq 1$ .

(4) No exercício 3, faça  $r = a/b$  e conclua que

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots + a^n$$

(5) Se  $n + 1$  é ímpar mostre que

$$b^{n+1} + a^{n+1} = (b + a)(b^n - b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \dots - a^n)$$

## Parte 2 - Ordem.

(1)  $a < b$  e  $c < d \implies a + c < b + d$

(2)  $a < b \implies -b < -a$

(3)  $a > 0$  e  $b > 0 \implies ab > 0$

(4)  $a > 1 \implies a^2 > a$

(5)  $0 < a < 1 \implies a^2 < a$

(6)  $b > a > 0 \implies b^2 > a^2$

(7) Se  $a, b, c, d > 0$ ,  $a < b$  e  $c < d$  então  $ac < bd$

(8)  $a < b \implies a^3 < b^3$

(9) Se  $a, b > 0$  mostre que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

(10) Se  $ab \neq 0$  mostre que  $b^2 + ab + a^2 > 0$

(11)  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 \implies a = 0$  ou  $b = 0$

(12)  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 \implies a = 0$  ou  $b = 0$  ou  $a = -b$

(13) Se  $a, b > 0$  e  $a^2 < b^2$  então  $a < b$

(14) Considere a equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  onde  $a > 0$ . Ela é equivalente a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Complete o quadrado somando  $(b/2a)^2$  dos dois lados e mostre que

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Conclua disto que se  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  então

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(15) Se  $a_1, a_2, b_1, b_2$  são números reais, encontre os coeficientes do trinômio de segundo grau

$$ax^2 + bx + c = (a_1 + b_1x)^2 + (a_2 + b_2x)^2$$

Use o fato que  $ax^2 + bx + c \geq 0$  para mostrar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

(16) Verifique se o conjunto

$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de  $\mathbb{R}$  verifica todos os axiomas dos números reais.

(17) Verifique se o conjunto

$$K = \{a + b\pi : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

com as operações de adição e produto e a relação de ordem induzidas de  $\mathbb{R}$  verifica todos os axiomas dos números reais.

### Parte 3 - Completude.

(1) Verifique quais das sequências abaixo são crescentes e limitadas superiormente ou decrescentes e limitadas inferiormente. Nestes casos determine seu limite:

(a)  $s_n = (1 + n)/n$

(b)  $s_n = (n - 1)/n$

(c)  $s_n = (1 + n)/n^2$

(d)  $s_n = \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}$

(e)  $s_n = (-1)^n/(n + 1)$

(f)  $s_n = n^2/(n + 1)$

(g)  $s_n = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \dots + \frac{?}{2^n}$

(h)  $s_n = n/(n^2 + 1)$

(i)  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$  ou indutivamente

$$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$$

(j)  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$  ou indutivamente

$$s_0 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad s_{n+1} = \sqrt{2s_n}$$

(2) Se  $a > 0$  mostre que a sequência

$$x_0 = a \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{(x_n + \frac{a}{x_n})}{2}$$

é decrescente e limitada inferiormente. Determine seu limite.

(3) Mostre que a sequência

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

é crescente e use o fato que  $1/n! < 1/2^{n-1}$  para mostrar que  $s_n < 3$ . Do axioma da completude conclua que existe o número

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

(4) Seja  $p_n$  o perímetro do polígono regular com  $2^n$  lados inscrito na circunferência de raio unitário. Se  $l_n$  é seu lado então,  $p_n = 2^n l_n$ . Mostre que  $(p_n)$  é uma sequência crescente a partir de  $p_2 = 4\sqrt{2}$  e limitada superiormente. Do axioma da completude conclua que existe o número  $\pi$  tal que

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

(5) Para os conjuntos  $A$  abaixo determine, quando houver,  $\max A$ ,  $\min A$ ,  $\sup A$ ,  $\inf A$ :

(a)  $A = [a, b]$  onde  $a < b$

(b)  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n \leq 1011, 13\}$

(c)  $A = ]a, b[$  onde  $a < b$

(d)  $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid , 0 < p < q, \text{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < 1011, 13 \right\}$

(e)  $A = \left\{ \frac{p}{q} \mid , 0 < p < q, \text{mdc}(p, q) = 1 \text{ e } q < n \right\}$

(f)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$

(g)  $A = \left\{ e^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

(h)  $A = \left\{ \cos \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$

(i)  $A = \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \neq 0 \right\}$  onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função crescente

(j)  $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função crescente



**Parte 4 - Números Naturais.**

(1) Prove por indução:

(a)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

(b)  $1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

(2) Se  $m, n$  são naturais mostre que  $m + n$  é natural.

(3) Se  $m, n$  são naturais mostre que  $m.n$  é natural.

(4) Se  $m, n$  são naturais com  $n \geq m$ , então existe  $d$  natural tal que  $n = m + d$  (isto é,  $d = n - m$  é a diferença entre  $n$  e  $m$ ).

(5) Considere o conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 2)n\}$$

Mostre que  $n \in A \implies (n + 1) \in A$ . É verdade que  $A = \mathbb{N}$ ?

(6) Considere o conjunto

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(2n + 1)^2}{8}\right\}$$

Mostre que  $n \in A \implies (n + 1) \in A$ . Podemos concluir que  $A = \mathbb{N}$ ?

(7) O “coeficiente binomial” é o número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! k!} \quad n, k \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad k \leq n$$

Este é também o número de combinações de  $n$  elementos  $k$  a  $k$ .

(a) Mostre que:

(i)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$

(ii)  $\binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1}$

(b) Prove por indução o teorema binomial

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

(c) Mostre que:

(i)  $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$

$$(ii) 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots (-1)^n \binom{n}{n}$$

(d) Utilize a fórmula do binômio de Newton para mostrar que

$$(1 + 1/n)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - 1/n) + \frac{1}{3!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) + \dots + \frac{1}{n!}(1 - 1/n)(1 - 2/n) \dots (1 - (n - 1)/n)$$

e conclua que

$$(1 + 1/n)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

(8) Do teorema binomial temos

$$\begin{aligned} (1+1)^3 &= 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\ (2+1)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ (3+1)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\ \vdots &= \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ (n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Somando membro a membro os dois lados das igualdades, encontre uma fórmula para

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

(9) Encontre fórmulas para

$$(a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

$$(b) \frac{3}{1 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$$

(10) Sabendo-se que  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , determine uma fórmula para

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2$$

## CAPÍTULO 2

# Noções de Geometria Analítica

Neste capítulo revemos a definição do plano cartesiano e alguns de seus subconjuntos tais como retas, círculos, elipses e parábolas.

### 1. O Plano Cartesiano

O *Produto Cartesiano* de um conjunto  $A$  por um conjunto  $B$  é o conjunto  $A \times B$  formado dos pares ordenados  $(a, b)$  com  $a \in A$  e  $b \in B$ .

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Quando  $A = B$  escrevemos  $A^2 = A \times A$

EXEMPLO 2.1. Se  $A = \{1, 7, 3\}$  e  $B = \{1, 2, \pi\}$  então

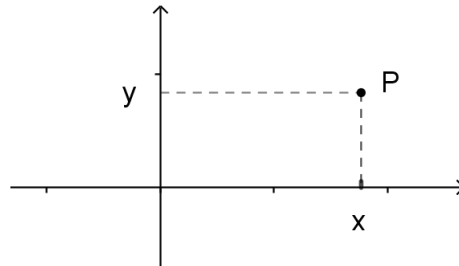
$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, \pi), (7, 1), (7, 2), (7, \pi), (3, 1), (3, 2), (3, \pi)\}$$

O produto cartesiano

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

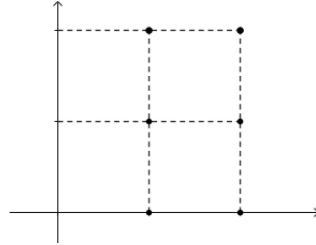
é chamado de *Plano Cartesiano*.

Representamos geometricamente o plano cartesiano como na figura:

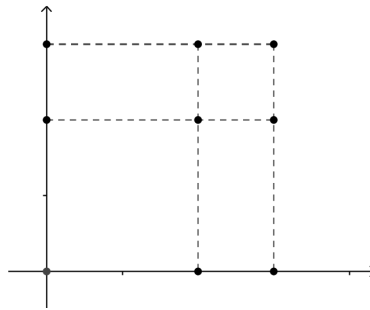


Vejamos a seguir alguns subconjuntos do plano e suas representações gráficas.

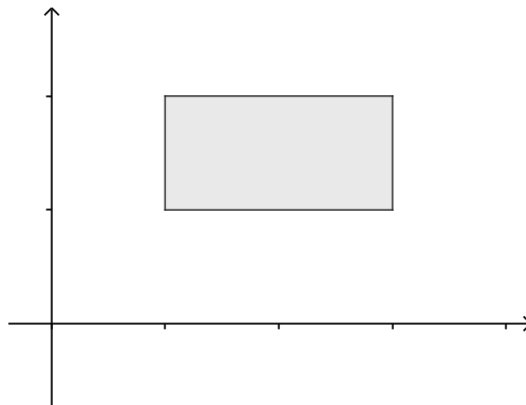
Se  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{0, 2, 3\}$  então  $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3)\}$  e sua representação gráfica é



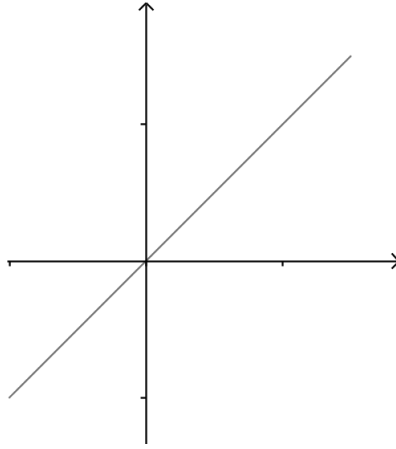
e a representação de  $B^2$  é



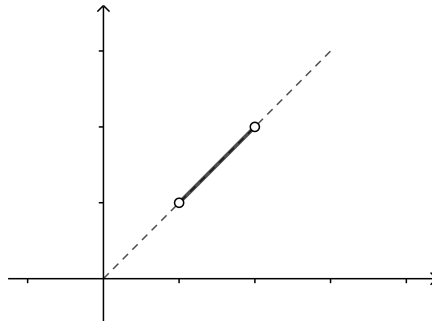
$A = [2, 4]$  e  $B = [1, 2]$   $A \times B = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$



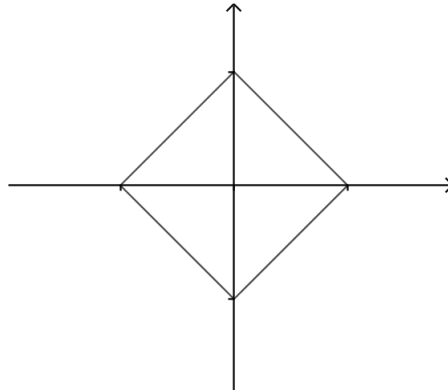
$$R = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$$



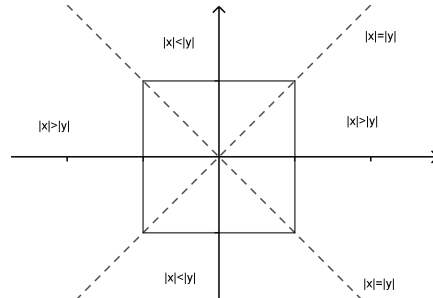
$$R = \{(x, x) : x \in \mathbb{R} \text{ e } 1 < x < 2\}$$



$$R = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$$



$$R = \{(x, y) : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$

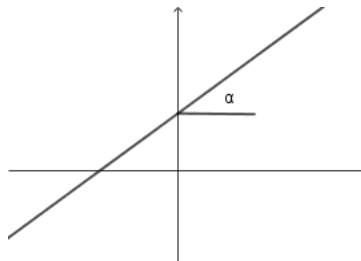


## 2. As cônicas

O conjunto dos pontos do plano que verifica uma equação do tipo  $y = a.x + b$  é chamado de *Reta*.

$$r = \{(x, y) : y = a.x + b\}$$

$a = \tan(\alpha) = (y - b)/x$  é chamado de coeficiente angular da reta.



Alem destas retas temos as retas verticais com equações  $x = a$  onde  $a$  é uma constante.

Lembremos a seguir a fórmula da distância no plano.

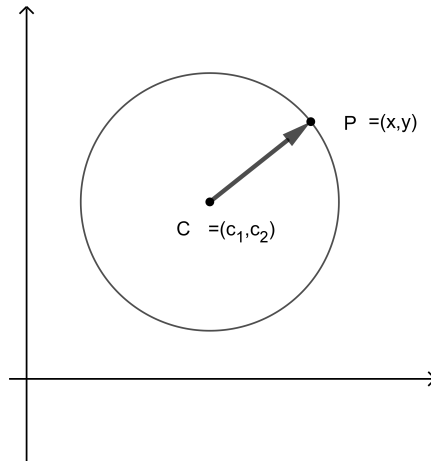
Se  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  são pontos do  $\mathbb{R}^2$  a distância entre eles é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Através da distância define-se as cônicas.

**DEFINIÇÃO 2.2.** A *Circunferência com centro*  $C = (c_1, c_2)$  e *raio*  $r > 0$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que  $d(P, C) = r$ . Portanto a sua equação é

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$



DEFINIÇÃO 2.3. Fixada uma reta  $\delta$  e um ponto  $F$  não pertencente à reta chama-se *Parábola* com foco  $F$  e diretriz  $\delta$  ao conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que a distância de  $P$  ao foco é igual a distância de  $P$  à reta  $\delta$ , em símbolo  $d(P, F) = d(P, \delta)$ .

Fixamos um sistema de coordenadas tal que o eixo  $y$  passa pelo foco de maneira que  $F = (0, p)$  e a diretriz é a reta  $y = -p$ . Neste sistema o eixo  $y$  é um eixo de simetria e o vértice da parábola é a origem. Então

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = d(P, \delta) = y + p$$

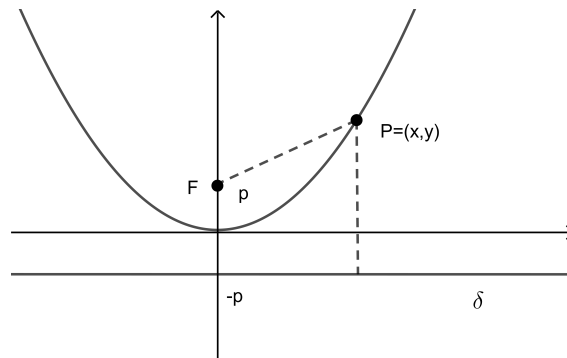
elevando ao quadrado e igualando

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

Disto concluímos que

$$y = x^2/4p$$

Esta é a equação da parábola no sistema acima.



EXEMPLO 2.4. Considere a parábola  $y = x^2$ . Para encontrarmos o foco e a diretriz façamos  $\frac{1}{4p} = 1$ . Assim  $p = \frac{1}{4}$ . Assim  $F = (0, \frac{1}{4})$  e a diretriz é a reta  $y = -\frac{1}{4}$ .

Em geral uma equação do tipo  $y = a.x^2 + b.x + c$  onde  $a \neq 0$  é a equação de uma parábola obtida da anterior por uma translação. Para mostramos isto comecemos observando que existem constantes  $c_1, c_2$  tais que  $y = a.x^2 + b.x + c = a(x - c_1)^2 + c_2$ . Então

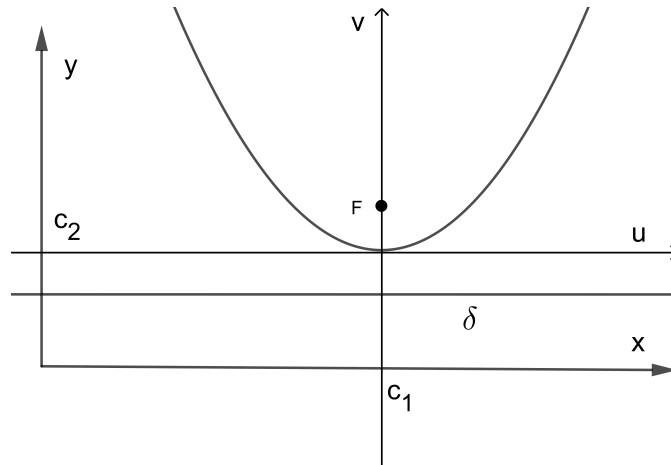
$$y - c_2 = a(x - c_1)^2$$

Fazendo a mudança de variável  $u = x - c_1$  e  $v = y - c_2$  obtemos

$$v = au^2$$

que é a equação de uma parábola onde  $p = \frac{1}{4a}$ .

Geometricamente a parábola acima é obtida da parábola  $y = ax^2$  fazendo uma translação horizontal de  $c_1$  e uma translação vertical de  $c_2$ .



EXEMPLO 2.5. Vamos encontrar as coordenadas do foco e a equação da diretriz da parábola  $y = 2x^2 - 8x + 9$ .

$$y = 2x^2 - 8x + 9 = 2(x^2 - 4x) + 9 = 2(x^2 - 4x + 4) + 1 = 2(x - 2)^2 + 1$$

$$y - 1 = 2(x - 2)^2$$

Fazendo  $u = x - 2$  e  $v = y - 1$ . Então  $v = 2u^2$

$$1/(4p) = 2 \text{ então } p = 1/8$$

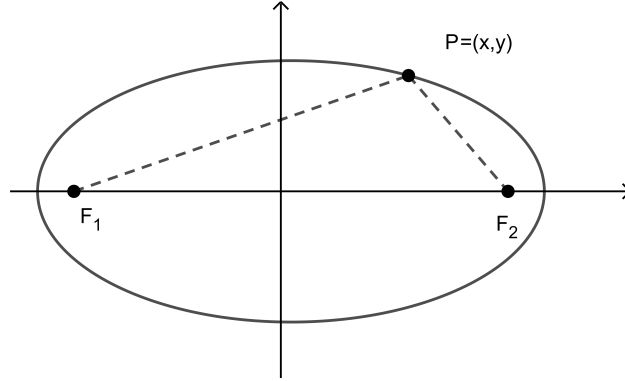
As coordenadas do foco são  $u = x - 2 = 0$  e  $v = y - 1 = p = 1/8$ . Disto  $F = (2, 9/8)$ .

A diretriz tem equação  $v = y - 1 = -p = -1/8$  ou seja  $y = 7/8$ .



DEFINIÇÃO 2.6. A *Elipse* com focos  $F_1$  e  $F_2$  e semi-eixo maior  $a > 0$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ .

Fixemos um sistema de coordenadas tal que o eixo  $x$  passa pelos dois focos e o eixo  $y$  é a mediatriz do segmento determinado por eles. Neste sistema os focos são dados por  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ .



Da definição

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Elevando ao quadrado novamente e simplificando obtém-se

$$(a^2 - c^2).x^2 + a^2.y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Fazendo  $b^2 = a^2 - c^2$  obtemos finalmente a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXEMPLO 2.7. A *elipse*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

tem como semi-eixo maior  $a = 2$  e semi-eixo menor  $b = 1$ . Os focos são dados por  $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$  pois  $c = \sqrt{4-1}$ .

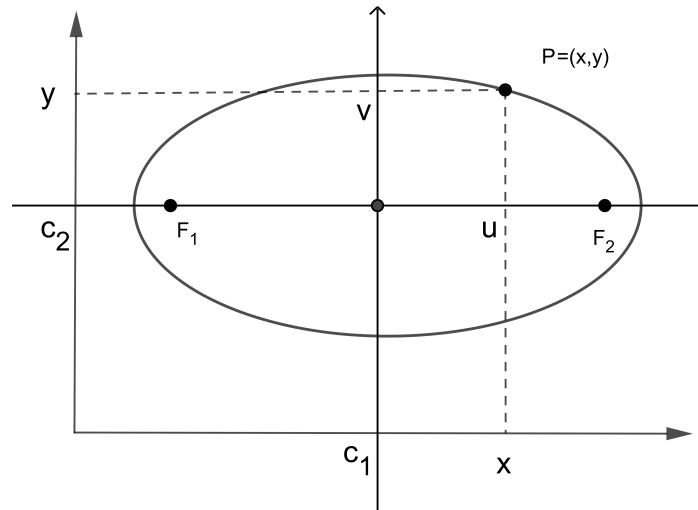
Uma Elipse com centro no ponto  $(c_1, c_2)$  tem equação

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = x - c_1$  e  $v = y - c_2$  obtemos

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse no sistema de coordenadas  $(u, v)$ .



Como no caso da parábola uma equação do tipo

$$a_1x^2 + a_2y^2 + 2b_1x + 2b_2y + k = 0$$

onde  $a_1, a_2$  são ambos positivos ou ambos negativos é a equação de uma elipse da forma acima.

EXEMPLO 2.8. Considere a equação

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4y^2 - 16y + 13 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4(y^2 - 4y) + 13 = 0$$

$$(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 - 1 - 16 + 13 = 0$$

$$\frac{(x - 1)^2}{4} + (y - 2)^2 = 1$$

Fazendo  $u = x - 1$  e  $v = y - 2$

$$\frac{u^2}{4} + v^2 = 1$$

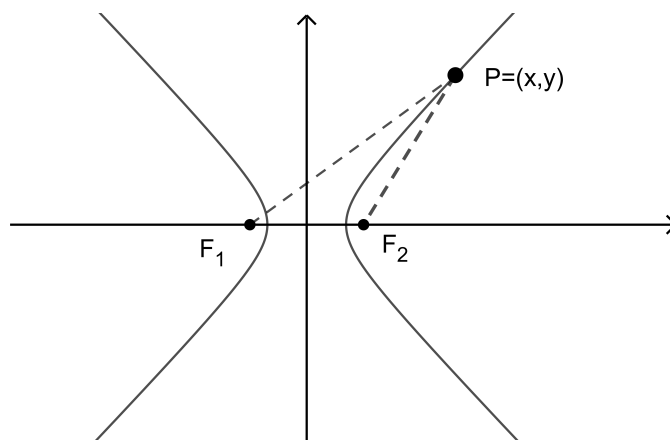
Esta é a elipse acima no sistema  $(u, v)$ . Seu centro é o ponto com coordenadas  $u = x - 1 = 0$  e  $v = y - 2 = 0$ . Portanto  $x = 1$  e  $y = 2$ .

DEFINIÇÃO 2.9. A Hipérbole com focos  $F_1$  e  $F_2$  e semi-eixo maior  $a > 0$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano tais que  $|d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 2a$ .

No sistema de coordenadas como na elipse a equação da hipérbole é

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1$$

O cálculo para se chegar a esta equação é análogo ao da elipse e deixamos de fazê-lo.

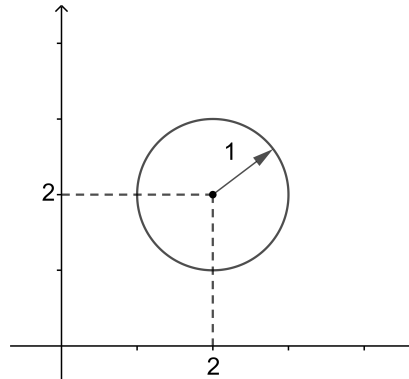


Uma Hipérbole com centro no ponto  $(c_1, c_2)$  como no caso da elipse tem equação

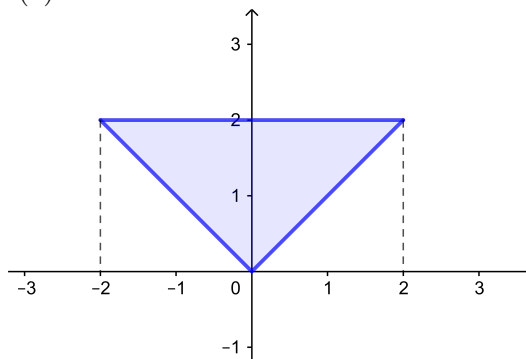
$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} - \frac{(y - c_2)^2}{b^2} = \pm 1$$

**3. Exercícios**

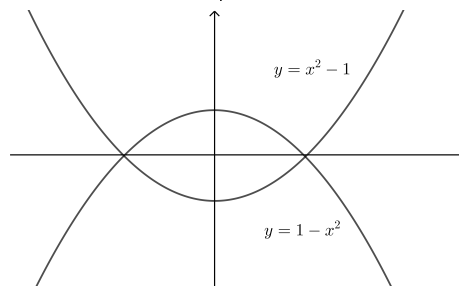
(1) Descreva analiticamente os seguintes subconjuntos do plano:



(a)



(b)



(c)

(2) Represente graficamente os seguintes subconjuntos do plano:

- (a)  $A = \{(x, y) : |y| = |x|\}$
- (b)  $B = \{(x, y) : |y| < |x|\}$
- (c)  $C = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x + 2\}$

- (d)  $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2 \text{ e } y = x + 2\}$   
(e)  $E = \{(x, y) : x^2 \leq y \text{ e } y = x + 2\}$
- (3) Determine o centro e o raio das circunferências e faça uma representação gráfica:
- (a)  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$   
(b)  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$
- (4) Determine o centro, os focos e os semi-eixos das elipses e represente-as:
- (a)  $x^2 + 4y^2 - 6x - 32y + 69 = 0$   
(b)  $4x^2 + y^2 - 24x - 6y + 41 = 0$
- (5) Determine o centro, os focos e os semi-eixos das hipérboles e represente-as:
- (a)  $4x^2 - 9y^2 = 36$   
(b)  $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$

## CAPÍTULO 3

# Funções

As funções são os objetos fundamentais estudados no cálculo. Neste capítulo descreveremos as noções relativas a elas assim como a construção de novas funções a partir outras.

### 1. Definição de Função

DEFINIÇÃO 3.1. *Uma função é uma correspondência  $f : D \rightarrow C$  que a cada elemento  $x \in D$  associa um elemento  $f(x) \in C$  chamado de valor de  $f$  em  $x$ . O conjunto  $D$  é chamado de Domínio de  $f$  e escreve-se  $D = \text{Dom}(f)$ . O conjunto  $C$  será chamado de contradomínio de  $f$ . Mais importante que o contradomínio é a imagem de  $f$  definida por*

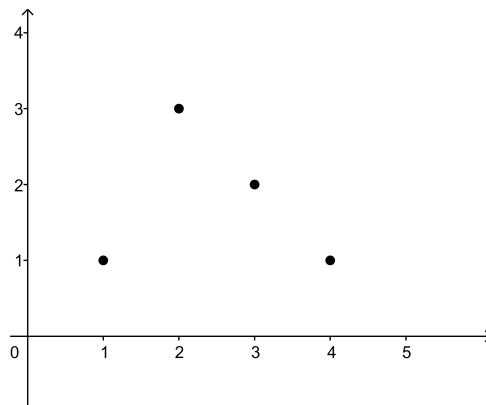
$$\text{Im}(f) = \{y : y = f(x), x \in D\}$$

O Gráfico de  $f$  é o subconjunto do plano

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

EXEMPLO 3.2.

$$f\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$
$$f(1) = 1 \quad f(2) = 3 \quad f(3) = 2 \quad f(4) = 1$$

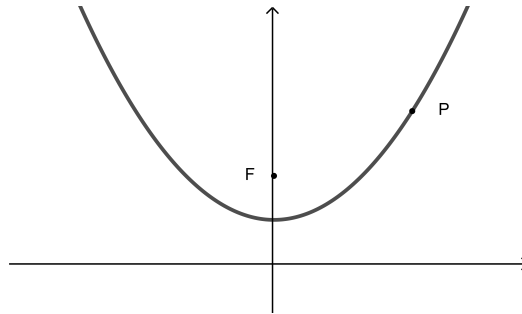


EXEMPLO 3.3.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

O gráfico de  $f$  é a parábola  $y = x^2$



Um subconjunto  $S$  do plano é gráfico de uma função se uma reta vertical  $x = a$  intersepta  $S$  no máximo em um ponto. Se a reta de fato intersepta então o número  $a \in \text{Dom} f$ . O domínio de  $f$  é a projeção do gráfico no eixo  $x$  e a imagem é a projeção no eixo  $y$ .

Uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de uma *função em uma variável real com valores reais*. Caso  $D \subset \mathbb{R}^2$  diremos que  $f$  é uma *função de duas variáveis*.

EXEMPLO 3.4.

(1)  $f(x) = \sqrt{x}$  é uma função de uma variável pois  $D = \{x : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ .

(2)  $f(x, y) = \sqrt{y-x}$  é uma função de duas variáveis pois  $D = \{(x, y) : y - x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Observe que  $D$  é um dos semiplano determinado pela reta  $y = x$ .

DEFINIÇÃO 3.5.

Uma Equação em uma incógnita é do tipo  $f(x) = 0$  onde  $f$  é uma função de uma variável. O conjunto solução de tal equação é o conjunto

$$S = \{x \in D : f(x) = 0\} \subset D$$

Por sua vez  $f(x) \leq 0$  é chamada de inequação em uma incógnita cujo conjunto solução é

$$S = \{x \in D : f(x) \leq 0\} \subset D$$

Uma Equação em duas incógnitas é do tipo  $f(x, y) = 0$  onde  $f$  é uma função de duas variáveis. O seu conjunto solução é o subconjunto do plano

$$S = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Define-se também uma inequação em duas variáveis por  $f(x, y) \leq 0$  cujo conjunto solução é

$$S = \{(x, y) \in D : f(x, y) \leq 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

EXEMPLO 3.6. Vamos resolver a equação

$$|2x - 1| = 1$$

$|2x - 1| = 1$  se e somente se  $2x - 1 = 1$  ou  $2x - 1 = -1$  isto é  $x = 0$  ou  $x = 1$ .

O conjunto solução é  $S = \{0, 1\}$ .

EXEMPLO 3.7. Vamos encontrar o conjunto solução da inequação

$$|2x - 1| \leq 1$$

$|2x - 1| \leq 1$  se e somente se  $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$  ou seja  $0 \leq x \leq 1$ .

O conjunto solução é o intervalo  $S = [0, 1]$ .

EXEMPLO 3.8. O conjunto solução da inequação

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0$$

é o círculo com centro na origem e raio 1

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

O gráfico de uma função é o conjunto solução da equação  $f(x) - y = 0$ .

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff y - f(x) = 0$$

Assume-se, em geral que o domínio de uma função é o maior subconjunto para o qual a expressão que a determina faz sentido. Assim o domínio de  $f(x) = 1/x$  é o conjunto dos reais diferentes de 0. Por outro lado a imagem é mais difícil de determinar.

Um número  $a \in \text{Im}f$  se e somente se existe  $x \in \text{Dom}f$  talque  $f(x) = a$ . Dito de outro modo se a equação  $f(x) = a$  tem pelo menos uma solução. Assim para decidirmos se  $a$  está na imagem é necessário resolver a equação  $f(x) = a$  ou ao menos decidir se ela tem solução.

EXEMPLO 3.9. Considere a função  $f(x) = x/(x^2 + 1)$ . Claramente  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$ . Agora se  $a \in \text{Im}f$  então para algum  $x \in \mathbb{R}$  devemos ter  $x/(x^2 + 1) = a$ . Se  $a = 0$  então  $x = 0$ . Caso  $a \neq 0$  então  $a.x^2 - x + a = 0$  para esta equação ter solução devemos ter  $\Delta = 1 - a^2 \geq 0$  de onde  $-1/2 \leq a \leq 1/2$ . Conclui-se que  $\text{Im}f = [-1/2, 1/2]$ .



DEFINIÇÃO 3.10. O máximo de uma função  $f$  ou valor máximo de  $f$  é por definição o máximo da imagem de  $f$  quando este existir. Em símbolos

$$\max f = \max \text{Im}f$$

O mínimo de  $f$  é definido por

$$\min f = \min \text{Im}f$$

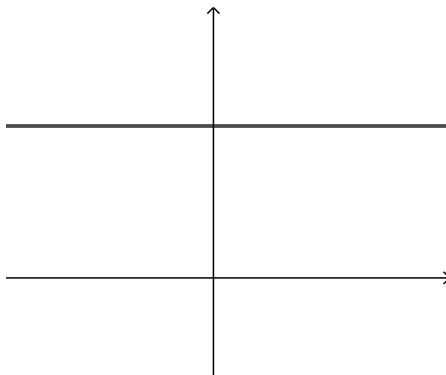
Um número  $x \in \text{dom}f$  tal que  $f(x) = \max f$  é chamado um ponto de máximo de  $f$ . Se  $f(x) = \min f$  diremos que  $x$  é um ponto de mínimo de  $f$ . Observe que o máximo é único se existir mas uma função pode ter vários pontos de máximo.

EXEMPLO 3.11. No exemplo anterior  $\max f = 1/2$  e  $\min f = -1/2$ .

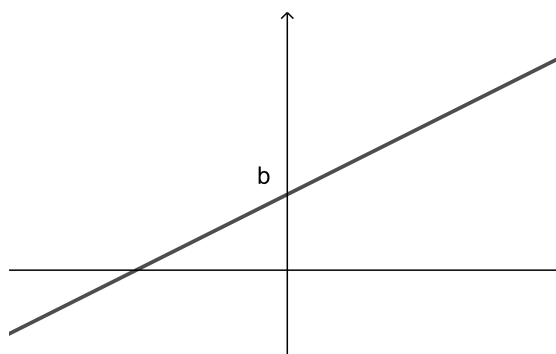
Se  $f(x) = (x - 1)^2$  então  $\min f = 0$  mas não existe  $\max f$ .

## 2. Exemplos

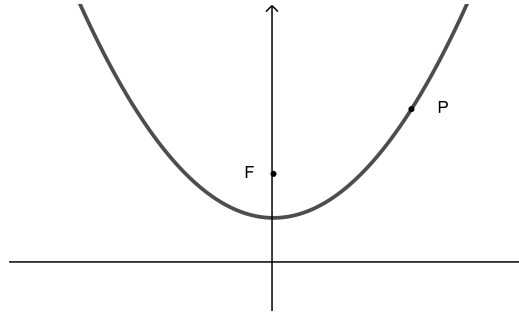
(1) (Função constante)  $f(x) = k$  ,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  ,  $\text{Im}f = \{k\}$  ,  $\text{graf}(f) = \{(x, y) : y = k\}$



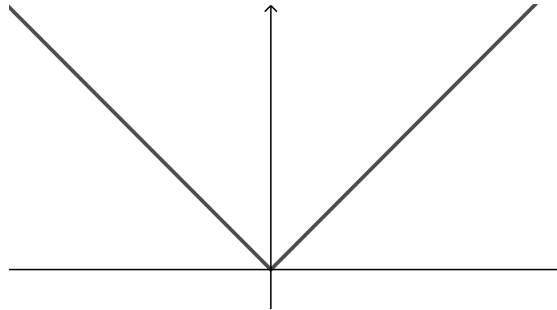
(2) (Linear)  $a \neq 0$   $f(x) = a.x + b$  ,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  ,  $\text{Im}f = \mathbb{R}$  ,  
 $\text{graf}(f) = \{(x, y) : y = a.x + b\}$



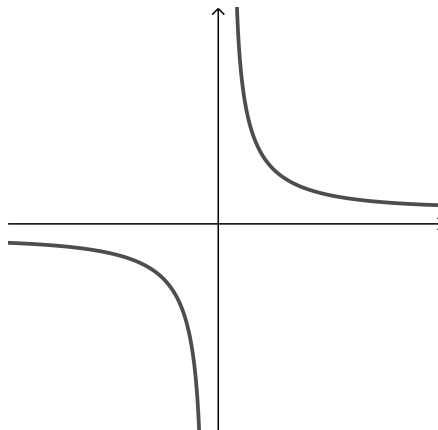
- (3) (Parábola)  $f(x) = x^2/4p + p$  ,  $Dom(f) = \mathbb{R}$  ,  $Imf = \{x : x \geq p\}$  ,  
 $graf(f) = \{(x, y) : y = x^2/4p + p\}$



- (4) (Modular)  $f(x) = |x|$  ,  $Dom(f) = \mathbb{R}$  ,  $Imf = \{x : x \geq 0\}$  ,  
 $graf(f) = \{(x, y) : y = |x|\}$



- (5) (Hipérbola)  $f(x) = 1/x$  ,  $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  ,  $Imf = \mathbb{R} - \{0\}$  ,  
 $graf(f) = \{(x, y) : y = 1/x\}$

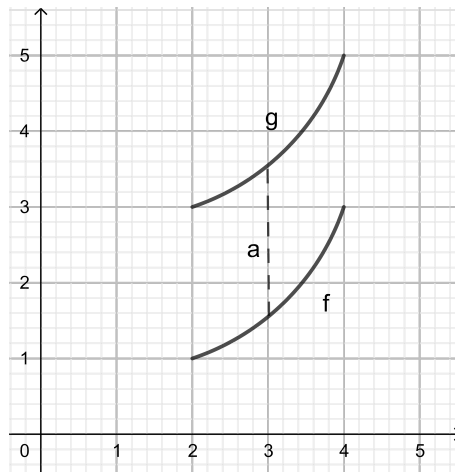


### 3. Construção de Funções

Nesta seção veremos como construir novas funções a partir de uma função  $f : D \rightarrow C$  conhecida.

(1) Translação vertical.

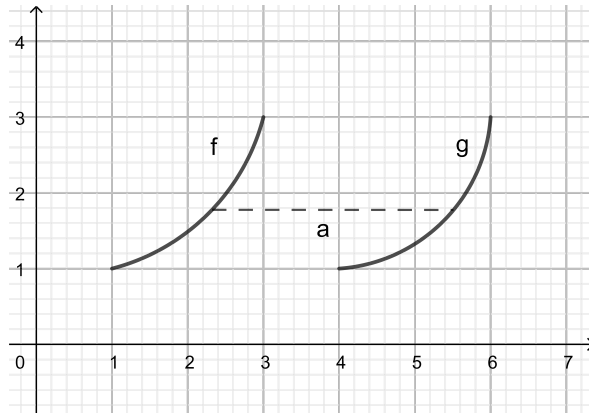
$g(x) = f(x) + a$  é obtida de  $f$  fazendo uma translação vertical. Note que  $Dom\,g = Dom\,f$  e  $Im\,g = Im\,f + \{a\}$ . Obtem-se o gráfico de  $g$  transladando de  $a$  o gráfico de  $f$  na direção vertical.



EXEMPLO 3.12. A função  $g(x) = x^2 + 1$  é obtida de  $f(x) = x^2$  fazendo uma translação vertical de uma unidade.

(2) Translação horizontal

$g(x) = f(x - a)$  é obtida de  $f$  fazendo uma translação horizontal. Note que  $Dom\,g = Dom\,f + \{a\}$  e  $Im\,g = Im\,f$ . Obtem-se o gráfico de  $g$  transladando de  $a$  o gráfico de  $f$  na direção horizontal.

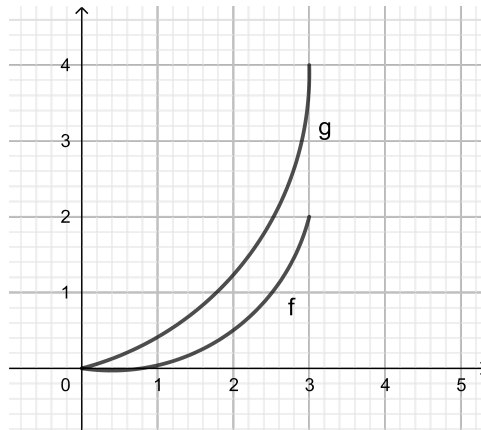


EXEMPLO 3.13. A função  $g(x) = |x - 2|$  é obtida de  $f(x) = |x|$  fazendo uma translação horizontal de duas unidades.

(3) Homotetia vertical

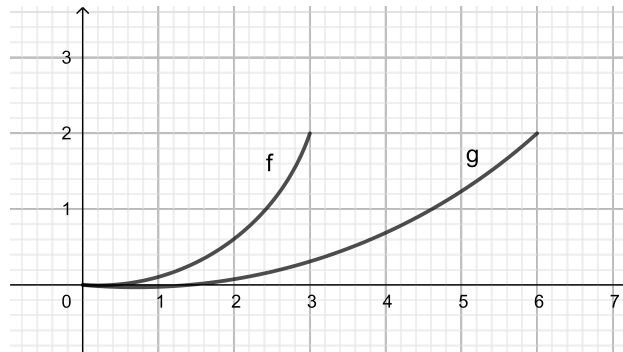
Seja  $\lambda > 0$

$g(x) = \lambda \cdot f(x)$  é a homotetia vertical de  $f$ . Neste caso  $Domg = Domf$  e  $Img = \lambda \cdot Imf$ . Se  $\lambda > 1$  é chamada de dilatação vertical e se  $0 < \lambda < 1$  contração vertical.

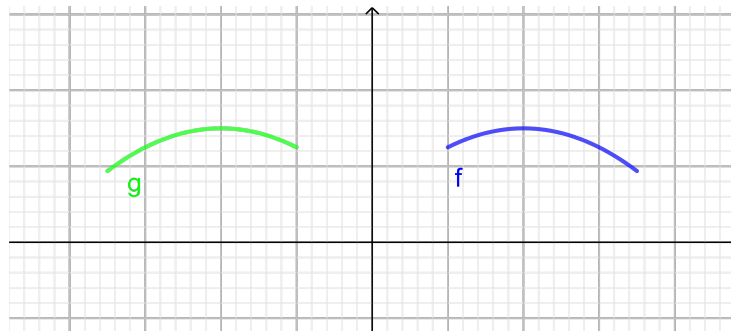


## (4) Homotetia horizontal

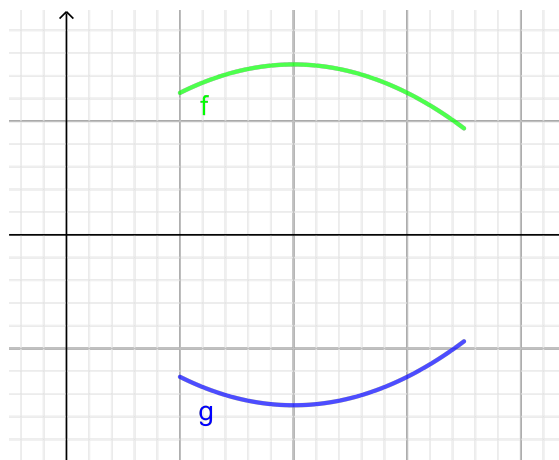
$g(x) = f(\lambda \cdot x)$  é a homotetia horizontal de  $f$ . Neste caso  $Dom g = 1/\lambda \cdot Dom f$  e  $Img = Img f$ . Vale as mesmas nomenclaturas como no caso anterior.

(5) Reflexão no eixo  $y$ 

$g(x) = f(-x)$  é obtida de  $f$  fazendo uma reflexão no eixo  $y$ . Note que  $Dom g = -Dom f$  e  $Img = Img f$ . Obtem-se o gráfico de  $g$  refletindo o gráfico de  $f$  no eixo  $y$ .

(6) Reflexão no eixo  $x$ 

$g(x) = -f(x)$  é obtida de  $f$  fazendo uma reflexão no eixo  $x$ . Note que  $Dom g = Dom f$  e  $Img = -Img f$ . Obtem-se o gráfico de  $g$  refletindo o gráfico de  $f$  no eixo  $x$ .



EXEMPLO 3.14. *Identificar a função*

$$g(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

Observe que

$$g(x) = \frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$$

Então  $g(x)$  é obtida de  $f(x) = 1/x$  fazendo uma translação horizontal de 2, em seguida uma dilatação de 4 e finalmente uma translação vertical de 1.

Genericamente uma função fracionária linear  $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  é obtida de  $f(x) = 1/x$  por translações, homotetias e reflexões.

#### 4. Usando gráficos para resolver inequações

Considere uma inequação do tipo

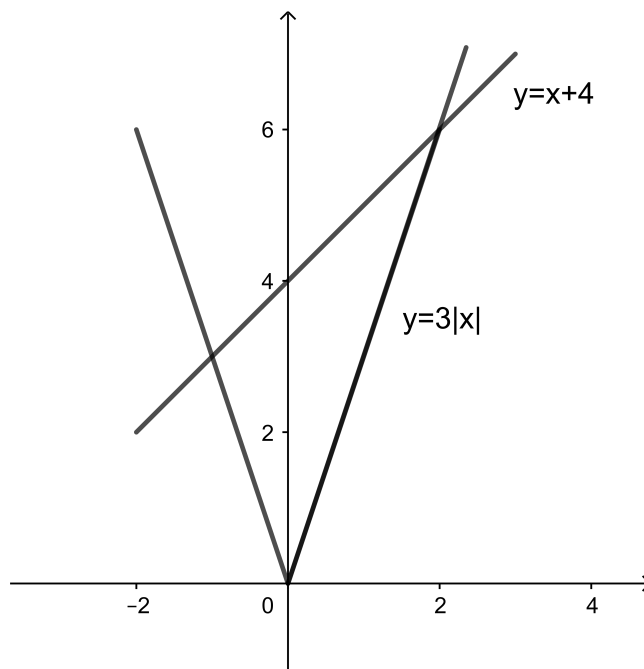
$$f(x) - g(x) \leq 0$$

Esta é equivalente a  $f(x) \leq g(x)$ . Observando nos gráficos de  $f$  e  $g$  os valores de  $x$  para os quais  $f(x) \leq g(x)$  encontramos o conjunto solução da inequação.

EXEMPLO 3.15. *Resolver a inequação*

$$3|x| \leq x + 4$$

observe no gráfico abaixo.



As funções encontram-se em  $x = -1$  e  $x = 2$ . No intervalo  $[-1, 2]$  a função  $g(x) = x + 4$  é maior ou igual a  $f(x) = 3|x|$ . Portanto o conjunto solução  $S = [-1, 2]$ .

EXEMPLO 3.16. *Vamos resolver a inequação*

$$x^2 - 3|x| + 2 \leq 3/4$$

*de dois modos diferentes.*

*1ª solução:*

$$x^2 - 3|x| + 2 = |x|^2 - 3|x| + 2$$

*Fazendo a substituição  $u = |x|$  temos*

$$u^2 - 3u + 2 \leq 3/4$$

$$u^2 - 3u + 5/4 \leq 0$$

*De onde tiramos  $1/2 \leq u \leq 5/2$*

$$1/2 \leq |x| \leq 5/2$$

*ou seja*

$$1/2 \leq x \leq 5/2 \text{ ou } -5/2 \leq x \leq -1/2.$$

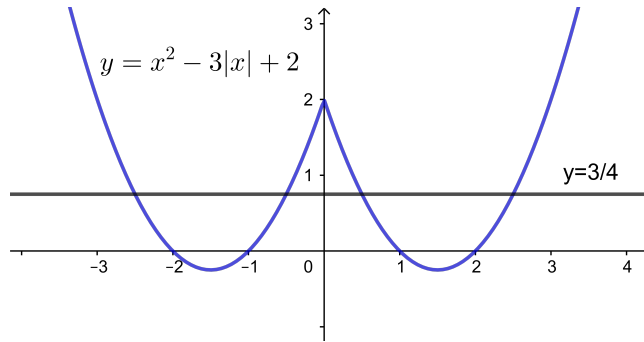
*O conjunto solução é  $S = [-5/2, -1/2] \cup [1/2, 5/2]$ .*

2ª solução:

Observe no gráfico abaixo: a parábola  $y = x^2 - 3|x| + 2$  encontra a reta  $y = 3/4$  em  $x = 1/2$  e  $x = 5/2$ .

Usando a simetria da figura concluímos que o conjunto solução é

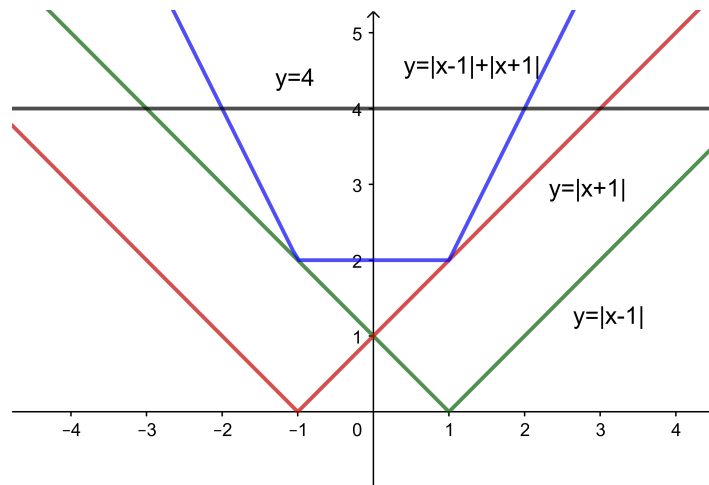
$$S = [-5/2, -1/2] \cup [1/2, 5/2]$$



EXEMPLO 3.17. Resolver a inequação

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 4$$

Observando o gráfico concluímos que  $S = [-2, 2]$ .

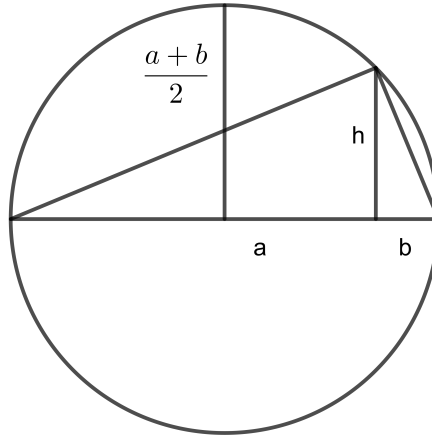


EXEMPLO 3.18. Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos vamos dar uma prova geométrica de que a média aritmética é maior que a média geométrica:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



Considere uma circunferência cujo diâmetro é  $a + b$  como na figura abaixo



Então  $h^2 = ab$  e  $h \leq \frac{a+b}{2}$ . Observe que vale a igualdade se e somente se  $a = b$ .

**5. Exercícios**

- (1) Seja  $a > 0$  mostre que  $a + 1/a \geq 2$ .
- (2) Determine o valor máximo e o valor mínimo, quando houver, das seguintes funções:
- $f(x) = |x - 1| + 3$
  - $f(x) = x^2 - 4x + 1$
  - $f(x) = x^2 - 4|x| + 1$
  - $f(x) = \frac{|x + 1|}{|x| + 1}$
  - $f(x) = |x| + |x - 1|$
  - $f(x) = x + \frac{1}{x}$  onde  $x > 0$
- (3) Dentre os retângulos cuja área é  $a^2$ , determine aquele que tem perímetro mínimo.
- (4) Use o fato que  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt[3]{2}$  são irracionais para mostrar que não existem números racionais  $a$  e  $b$  tais que  $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2}$ . Deduza disto que  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$  é irracional.
- (5) Dentre os retângulos cujo perímetro é 40, determine aquele que tem área máxima.
- (6) Encontre o conjunto solução e represente-o sobre a reta real:
- $|x - 2| = |x - 7|$
  - $|x - 1| < 3$
  - $|x - 2| < |x - 7|$
  - $x^2 - 2x + 1 > 1$
  - $|x| < |x + 1|$
- (7) Esboce o gráfico das seguintes funções :
- $f(x) = (x - 3)^2$
  - $f(x) = 2 - (x - 3)^2$
  - $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$
  - $f(x) = \left| \frac{1}{x - 2} \right|$
- (8) Resolva, utilizando eventualmente gráficos:
- $|x - 5| < 5$
  - $|x + 2||x - 1| > 3$
  - $|x - 4||x + 4| = 8$
  - $|x + 2| < 1 + |2x - 1|$
  - $|2x - 1| < \left| \frac{1}{x - 2} \right|$
  - $|x^2 - 2x| > 2|x| + 1$
  - $\left| \frac{2x + 1}{3x - 4} \right| > 2$
  - $(2x - 1)(x + 3)(1 - 2x) > 0$

(9) Represente graficamente os seguintes subconjuntos do plano:

(a)  $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$

(b)  $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 0\}$

(c)  $\{(x, y) \mid |x - 1| + |y| = 1\}$

(d)  $\{(x, y) \mid |x - 1| + y = 1\}$

(e)  $\{(x, y) \mid ax^2 - by^2 = 0\}$

(f)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\}$

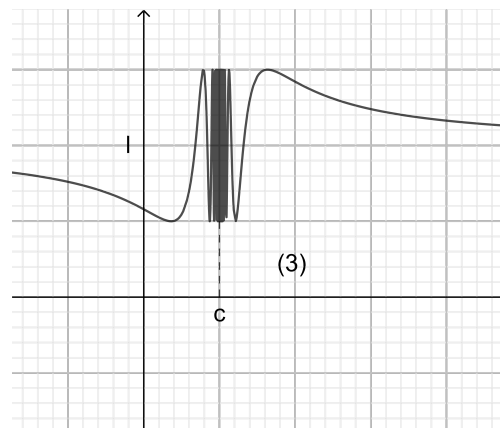
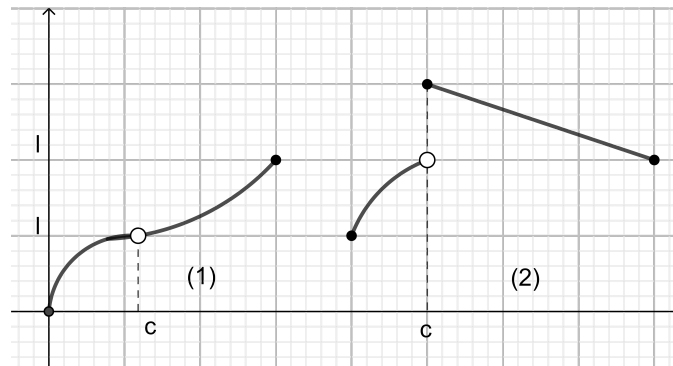
## CAPÍTULO 4

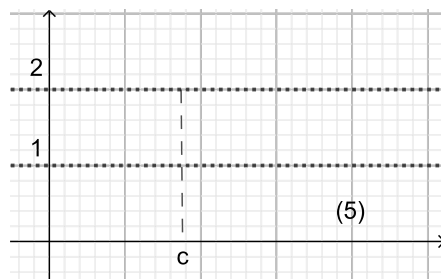
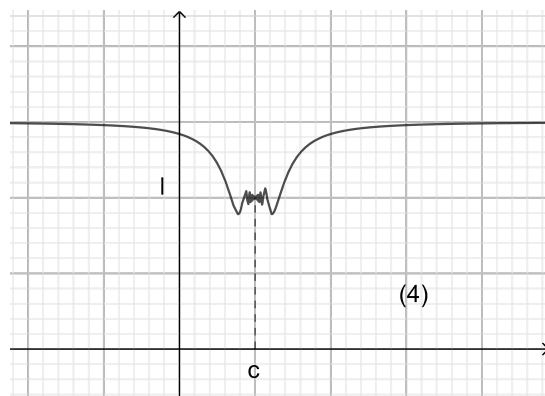
# Limites e Continuidade

Apresentamos a noção de limite e suas propriedades básicas e a partir desta definimos função contínua e derivada de uma função, que será o nosso principal objeto de estudo.

### 1. Limites

**1.1. A ideia de limite.** Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $I$  um intervalo aberto e  $c \in I$  tais que  $I - \{c\} \subseteq D$ . Diremos que  $l$  é limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $c$  se para  $x$  próximo de  $c$  então  $f(x)$  está próximo de  $l$ . Observe as figuras:





Para quais das funções cujos gráficos estão acima  $f(x)$  está próximo de  $l$  quando  $x$  está próximo de  $c$ ? Parece intuitivo que em (1) e em (4) isto acontece. Não é o caso em (2),(3),(5).

As funções seguintes tem gráficos semelhantes a estes.

$$(1) f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1) \quad c = 1$$

$$(2) f(x) = x + |x - 1|/(x - 1) \quad c = 1$$

$$(3) f(x) = \text{sen}(1/x) \quad c = 0$$

$$(4) f(x) = x \cdot \text{sen}(1/x) \quad c = 0$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO 4.1. Note que  $c$  pode estar ou não no domínio de  $f$ .

Vejam os dois exemplos.

EXEMPLO 4.2. Seja  $f(x) = x^2$  e  $c = 1$ .

$$\text{Se } x = 1 + \frac{1}{10}, \text{ então } f(x) = f\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2}.$$

$$\text{Se } x = 1 + \frac{1}{100}, \text{ então } f(x) = f\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{100^2}.$$

Em geral, se dermos um pequeno acréscimo  $\delta$  em  $c = 1$  então

$$f(c + \delta) = 1 + 2\delta + \delta^2$$

ou seja,  $f(x)$  fica próximo de 1.

Observe que se  $\delta$  vai diminuindo, a diferença  $f(c + \delta) - 1$  também vai diminuindo.

EXEMPLO 4.3. Considere agora  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  e  $c = 1$ . Note que 1 não está no domínio de  $f$ . Então

$$f(1 + \delta) = \frac{(1 + \delta)^2 - 1}{\delta} = 2 + \delta$$

Assim se  $\delta$  for pequeno,  $f(x)$  fica próximo de 2.

Formalmente a definição de limite é a seguinte:

DEFINIÇÃO 4.4. Diremos que  $l$  é limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $c$  se para todo  $\epsilon > 0$  (por menor que seja), existe  $\delta > 0$  tal que

se

$$0 < |x - c| < \delta \text{ então } |f(x) - l| < \epsilon$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Equivalentemente  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  se para todo  $\epsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que se

$$0 < |h| < \delta \text{ então } |f(c + h) - l| < \epsilon$$

Neste caso podemos escrever  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = l$ .

EXEMPLO 4.5. Mostremos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x + 1 = 3$$

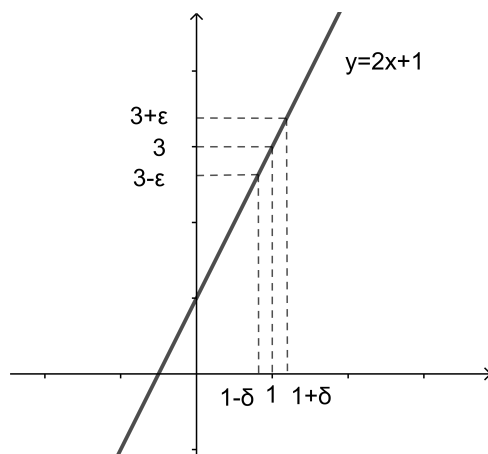
$$|2x + 1 - 3| = |2(x - 1)| = 2|x - 1|$$

Então dado  $\epsilon > 0$  se tomarmos  $\delta = \epsilon/2$  vem que:

$$|x - 1| < \delta = \epsilon/2$$

$$|2x + 1 - 3| = |2(x - 1)| = 2|x - 1| < \epsilon$$

Veja figura abaixo.



EXEMPLO 4.6. Vejamos um exemplo menos imediato de limite:  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

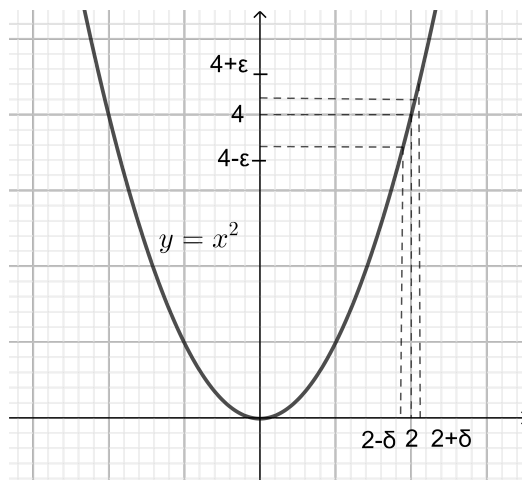
$$|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)|$$

Queremos comparar a expressão acima com  $|(x - 2)|$ . Para fazermos isto precisamos dar uma limitação para  $|(x + 2)|$ . Começemos impondo  $|(x - 2)| < 1$ . Da desigualdade triangular temos  $|x| - 2 \leq |(x - 2)| < 1$ . Assim  $|x| < 3$ . Então  $|(x + 2)| \leq |x| + 2 < 5$ .

Tomemos  $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ .

Se  $|(x - 2)| < \delta$  então  $|(x - 2)| < 1$  e

$$|x^2 - 4| = |(x + 2)(x - 2)| < 5|x - 2| < \epsilon$$



## 1.2. Funções arbitrariamente pequenas.

DEFINIÇÃO 4.7. Uma função  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde  $m > 0$  diz-se Arbitariamente Pequena (FAP) se

- (1) for crescente, isto é, se  $\delta_1 < \delta_2$  então  $p(\delta_1) \leq p(\delta_2)$  e
- (2) para todo  $\epsilon > 0$ , a inequação  $p(x) < \epsilon$  tem pelo menos uma solução  $\delta \in ]0, m[$ .

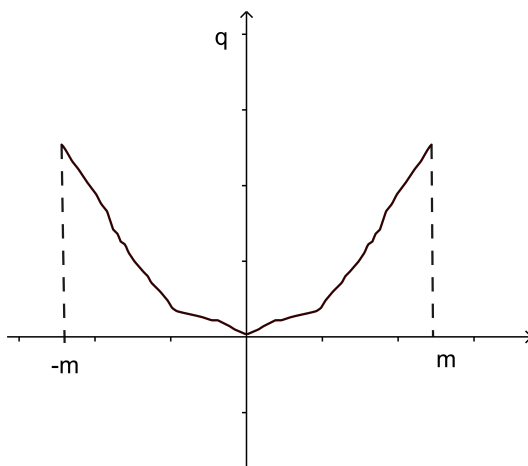
Exemplos de tais funções são:

- (1)  $p(x) = 0$
- (2)  $p(x) = x$
- (3)  $p(x) = x^2$
- (4)  $p(x) = \sqrt{x}$

As funções acima estão definidas para  $x \in ]0, m[$  sendo  $m > 0$ .

Observe que se  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma FAP e  $0 < n < m$  restringindo o domínio da função  $p$  ao intervalo  $]0, n[$  obtemos uma nova FAP. Se  $p$  e  $q$  são FAPs com domínios  $]0, m_1[$  e  $]0, m_2[$  respectivamente podemos tomar  $m = \min\{m_1, m_2\}$  e considerar  $p$  e  $q$  com domínio comum  $]0, m[$ . A seguir faremos isto sem menção explícita.

Notemos também que se  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma FAP, então a função  $q : ]-m, m[ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $q(\delta) = p(|\delta|)$  é simétrica em relação ao “eixo  $y$ ”



O teorema seguinte permite uma definição alternativa de limite de função, substituindo o  $\epsilon$  e o  $\delta$  por uma FAP, o que dará um método eficaz para demonstrar e calcular o valor do limite de uma função.



TEOREMA 4.8. *Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $I$  um intervalo aberto e  $c \in I$  tais que  $I - \{c\} \subseteq D$ . Então*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \text{ se e somente se } |f(c+h) - l| \leq p(|h|)$$

para todo  $h$  tal que  $0 < |h| < m$  e  $(c+h) \in D$ , onde  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma FAP.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\epsilon > 0$ .

Se  $|f(c+h) - l| \leq p(|h|)$ , da definição de FAP podemos escolher  $\delta > 0$  tal que  $p(\delta) < \epsilon$ .

Desta forma se  $0 < |h| < \delta$ , então como  $p$  é crescente,  $p(|h|) \leq p(\delta)$  e concluímos que  $|f(c+h) - l| \leq p(|h|) \leq p(\delta) < \epsilon$ .

A recíproca é mais difícil, pois precisamos construir uma FAP.

Da definição de limite, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < |h| < \delta$ , então  $|f(c+h) - l| < \epsilon$ .

Assim se  $\epsilon = 1$  existe  $m > 0$  tal que se  $0 < |h| < m$  então  $|f(c+h) - l| < 1$ .

Vamos construir uma FAP  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Seja  $\delta_1 = m$ .

Escolhemos  $\delta_2 < \frac{1}{2}m$  tal que  $|f(c+h) - l| < \frac{1}{2}$  desde que  $0 < |h| < \delta_2$ .

Indutivamente escolhemos  $\delta_{n+1} < \frac{1}{n+1}\delta_n$  tal que  $|f(c+h) - l| < \frac{1}{n+1}$  para todo  $h$  tal que  $0 < |h| < \delta_{n+1}$ .

Desta forma obtemos uma sequência  $(\delta_n)$  decrescente com  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  e tal que

$$0 < |h| < \delta_n \rightarrow |f(c+h) - l| < \frac{1}{n}$$

Definimos então  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  colocando:

$$p(\delta) = \frac{1}{n} \text{ se } \delta_{n+1} \leq \delta < \delta_n$$

Claramente  $p$  é uma FAP e se  $0 < |h| < m$  existe um natural  $n$  tal que  $\delta_{n+1} \leq |h| < \delta_n$ .

Então,

$$|f(c+h) - l| < \frac{1}{n} = p(|h|)$$

□

OBSERVAÇÃO 4.9. *Do Teorema 4.8 temos  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \iff |f(c+h) - l| < p(|h|)$ . Se  $g(h) = f(c+h) - l$  então  $g$  é uma translação de  $f$  e  $|g(0+h) - 0| < p(|h|)$ . Assim  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .*

### 1.3. A álgebra das FAPs.

TEOREMA 4.10. *Sejam  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $q : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  FAPs. Então:*

(1)  $p + q$  e  $p \cdot q$  são FAPs;

(2) Se  $f : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função crescente e limitada, então  $f \cdot p$  é uma FAP.

(3) Se  $f : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função crescente e  $0 \leq f(x) \leq p(x)$  para  $0 < x < m$ , então  $f$  é uma FAP.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Como  $p$  e  $q$  são crescentes e positivas então  $p + q$  e  $p \cdot q$  são crescentes e positivas. Por hipótese, dado  $\epsilon > 0$  as inequações  $p(\delta) < \frac{\epsilon}{2}$  e  $q(\delta) < \frac{\epsilon}{2}$  tem respectivas soluções  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Tomemos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Do fato que  $p$  e  $q$  são crescentes, vem que  $p(\delta) + q(\delta) \leq p(\delta_1) + q(\delta_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Para o produto basta escolhermos soluções das inequações  $p(\delta) < \sqrt{\epsilon}$  e  $q(\delta) < \sqrt{\epsilon}$ .

(2) Sendo  $f$  e  $p$  crescentes e positivas então  $f \cdot p$  é crescente e positiva. Como  $f$  é limitada seja  $k$  tal que  $0 \leq f(x) < k$ . Se  $\delta$  é uma solução de  $p(\delta) < \frac{\epsilon}{k}$ , então  $\delta$  é solução  $f(\delta) \cdot p(\delta) < \epsilon$ .

(3) Deixamos a demonstração a cargo do leitor.  $\square$

TEOREMA 4.11.

(1) Se  $p : ]0, m[ \rightarrow ]0, n[$  e  $q : ]0, n[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  são FAP, então  $q \circ p$  é uma FAP.

(2) Se  $p : ]0, m[ \rightarrow ]0, n[$  é uma FAP inversível, então  $p^{-1}$  é uma FAP.

DEMONSTRAÇÃO. (1) Sendo  $p$  e  $q$  crescentes e positivas então  $q \circ p$  é crescente e positiva. Dado  $\epsilon > 0$ , por hipótese, existe  $\delta_1$  tal que  $q(\delta_1) < \epsilon$  e existe  $\delta$  tal que  $p(\delta) < \delta_1$ . Como  $q$  é crescente,  $q(p(\delta)) < q(\delta_1) < \epsilon$ .

(2) Como o domínio de  $p$  é positivo, a inversa de  $p$  é positiva e claramente crescente. Dado  $\epsilon > 0$  no intervalo  $]0, m[$  então  $p(\epsilon)$  está no intervalo  $]0, n[$ . Escolhemos  $\delta$  tal que  $0 < \delta < p(\epsilon)$ . Desde que  $p^{-1}$  é crescente temos  $p(\delta) < p^{-1}(p(\epsilon)) = \epsilon$ .  $\square$

EXEMPLO 4.12. A única função constante que é uma FAP é a função nula.

EXEMPLO 4.13.  $p(x) = x$  para  $x > 0$  é claramente uma FAP. Segue do Teorema 4.10 que  $p(x) = x^2$ ,  $p(x) = x^3$  e, indutivamente,  $p(x) = x^n$  são FAPs. Também do Teorema 4.10 segue que toda função polinomial  $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  com os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  todos positivos é uma FAP.

EXEMPLO 4.14. Como consequência do Teorema 4.11,  $p(x) = \sqrt{x}$ ,  $p(x) = \sqrt[3]{x}$  e, em geral,  $p(x) = \sqrt[n]{x}$  com  $x > 0$  são FAPs.

EXEMPLO 4.15. Se  $P(x)$  é um polinômio então  $P(c + h) = P(c) + Q(h)$  onde  $Q(h)$  é um polinômio na variável  $h$  sem termo constante. Designemos por  $|Q|$  o polinômio obtido de  $Q$  colocando-se módulo nos seus coeficientes. Então  $|P(c + h) - P(c)| \leq |Q|(|h|)$ . Do Exemplo 4.13 conclui-se que  $\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c)$ .

EXEMPLO 4.16. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Mostremos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Supondo  $l$  o limite, temos  $l - p(|h|) < f(h) < l + p(|h|)$ . Assim para  $h > 0$  temos  $1 - l < p(h)$  e como  $p$  é uma FAP,  $1 - l \leq 0$ . Logo  $l \geq 1$ . Para  $h < 0$  temos  $l + 1 < p(|h|)$  e teremos  $l + 1 \leq 0$ , ou seja  $l \leq -1$ , o que é impossível.

TEOREMA 4.17. Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$  então:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow c} 1/g(x) = 1/l_2$  desde que  $l_2 \neq 0$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = l_1/l_2$  desde que  $l_2 \neq 0$ .

DEMONSTRAÇÃO. Da hipótese e do Teorema 4.8 existem FAP  $p : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  e  $q : ]0, m[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tais que  $|f(c+h) - l_1| < p(|h|)$  e  $|g(c+h) - l_2| < q(|h|)$  então

(1)

$$\begin{aligned} |f(c+h) + g(c+h) - l_1 - l_2| &= |f(c+h) - l_1 + g(c+h) - l_2| \\ &\leq |f(c+h) - l_1| + |g(c+h) - l_2| < p(|h|) + q(|h|) \end{aligned}$$

Como  $p + q$  é uma FAP, isto demonstra (1).

(2)

$$\begin{aligned} |f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| &= |f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot g(c+h) + l_1 \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| \\ &= |(f(c+h) - l_1) \cdot g(c+h) + l_1 \cdot (g(c+h) - l_2)| \\ &\leq |(f(c+h) - l_1)| \cdot |g(c+h)| + |l_1| \cdot |(g(c+h) - l_2)| \end{aligned}$$

Da desigualdade  $|g(c+h) - l_2| < q(|h|) < q(m)$

concluimos que  $|g(c+h)| < |l_2| + q(m)$ .

Substituindo obtemos  $|f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| \leq (|l_2| + q(m)) \cdot p(|h|) + |l_1| \cdot q(|h|)$ .

Do teorema 1.8 esta última função é uma FAP o que demonstra (2).

(3) Observe que

$$\left| \frac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|}$$

Para limitarmos  $\frac{1}{|g(c+h)|}$  podemos escolher  $m$  de forma que  $q(m) < |l_2|/2$ . Assim,  $|g(c+h) - l_2| < q(|h|) < q(m) < |l_2|/2$ . De onde concluímos que  $|l_2| - |g(c+h)| < |l_2|/2$  ou seja  $|g(c+h)| > |l_2|/2$ . Assim temos

$$\left| \frac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|} < \frac{2q(h)}{l_2^2}$$

Esta última sendo uma FAP concluímos (3).

(4) Consequência dos itens anteriores. □

**TEOREMA 4.18. (*Unicidade do limite*)** Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$  e  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_2$  então  $l_1 = l_2$

**DEMONSTRAÇÃO.** Por hipótese,  $|f(c+h) - l_1| < p_1(|h|)$  e  $|f(c+h) - l_2| < p_2(|h|)$ , onde  $p_1$  e  $p_2$  são FAPs. Tomando-se  $p = \max\{p_1, p_2\}$ , da desigualdade triangular tem-se que  $|l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(c+h)| + |f(c+h) - l_1| \leq 2 \cdot p(|h|)$ . Como  $p$  é arbitrariamente pequena,  $l_2 = l_1$ . □

**TEOREMA 4.19. (*Conservação do sinal*)** Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  e  $l > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para  $0 < |x - c| < \delta$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Do Teorema 4.8,  $l - p(|h|) < f(c+h) < l + p(|h|)$ . Escolhemos  $\delta > 0$  tal que  $p(\delta) < l/2$ . Assim para  $0 < |h| < \delta$  temos  $l/2 = l - l/2 < l - p(|h|) < f(c+h)$ . Portanto, para  $0 < |x - c| < \delta$  tem-se que  $f(x) > l/2 > 0$ . □

**COROLÁRIO 4.20.** Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  e  $l < 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) < 0$  para  $0 < |x - c| < \delta$ .

**COROLÁRIO 4.21.** Se  $f(x) > 0$  para  $0 < |x - c| < \delta$  e  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ , então  $l \geq 0$ .

**TEOREMA 4.22. (*Teorema do confronto*)** Sejam  $I$  é um intervalo e  $f, g, h$  funções definidas em  $I - \{c\}$  tais que  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  para todo  $x \in I - \{c\}$ .

Se  $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$ , então  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta \implies |g(x) - l| < \epsilon \text{ e } |h(x) - l| < \epsilon$$

Agora

$$g(x) - l < f(x) - l < h(x) - l$$

Como

$$-\epsilon < g(x) - l \text{ e } h(x) - l < \epsilon$$

vem que

$$-\epsilon < f(x) - l < \epsilon$$

o que é equivalente à

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

□

#### 1.4. Limites Laterais.

DEFINIÇÃO 4.23.

$l_1 = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  é *Limite a Direita* de  $f$  em  $c$  se para cada  $\epsilon > 0$  podemos encontrar um  $\delta > 0$  tal que se  $0 < x - c < \delta$  então  $|f(x) - l_1| < \epsilon$ .

$l_2 = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  é *Limite a Esquerda* de  $f$  em  $c$  se para cada  $\epsilon > 0$  podemos encontrar um  $\delta > 0$  tal que se  $0 < c - x < \delta$  então  $|f(x) - l_2| < \epsilon$ .

A seguinte proposição é uma consequência imediata das definições mas é útil para o cálculo de alguns limites como no exemplo abaixo.

PROPOSIÇÃO 4.24.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  existe se e somente se os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  existem e tem o mesmo valor  $l$ . Neste caso  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$

EXEMPLO 4.25. Vamos determinar o valor da constante  $a$  para que exista  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  onde

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ a.x & x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a.x = a$ . De acordo com a proposição devemos ter  $a = 2$ .

A proposição seguinte prova que toda função crescente ou decrescente admite os limites laterais.

Uma função  $f$  diz-se *Crescente* se para  $x_1, x_2 \in \text{Dom} f$  com  $x_1 \leq x_2$  tem-se  $f(x_1) \leq f(x_2)$  e diz-se *Decrescente* se  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

PROPOSIÇÃO 4.26. Seja  $f(x)$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ , crescente e  $c$  tal que  $a < c < b$ . Então existem os limites laterais  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Começemos considerando uma sequência estritamente crescente  $(x_n)$  em  $]a, b[$  tal que  $\lim x_n = c$ . Como  $f$  é crescente então  $f(x_n)$  é crescente e limitada pois  $f(x_n) \leq f(b)$ . Seja  $l_2 = \lim f(x_n)$  e mostremos que  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = l_2$ . Dado  $\epsilon > 0$  seja  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  tenhamos  $l_2 - f(x_n) < \epsilon$ . Observe que  $l_2 \geq f(x_n)$  pois a sequência é crescente.

Seja  $\delta = c - x_{n_0} > 0$ . Se  $c - \delta < x < c$  então  $x_{n_0} < x < c$  e  $f(x_{n_0}) < f(x)$ . segue que  $0 < l_1 - f(x) < l_1 - f(x_{n_0}) < \epsilon$ . A demonstração do outro limite lateral segue a mesma linha e deixamos de fazelo.

□

### 1.5. Limites Impróprios.

DEFINIÇÃO 4.27. (*Limites no infinito*)

Seja  $f$  uma função tal que  $[a, \infty[ \subset \text{Dom} f$ .

Diz-se que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $\infty$     $l$  e escreve-se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  se para todo  $\epsilon > 0$  encontramos uma constante  $M > 0$

tal que  $x > M$  tem-se  $|f(x) - l| < \epsilon$ .

De forma semelhante definimos  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$  alterando  $M < 0$  tal que se  $x < M$ .

Escreve-se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  se para cada  $L > 0$  existe  $M > 0$  tal que se  $x > M$  então  $f(x) > L$ .

EXEMPLO 4.28. Se  $n \in \mathbb{N}$  então  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x^n = 0$  pois dado  $\epsilon > 0$  escolhamos  $M = 1/\sqrt[n]{\epsilon}$ . Assim se  $x > M = 1/\sqrt[n]{\epsilon}$ ,  $|1/x - 0| < \sqrt[n]{\epsilon}$  e daqui  $|1/x^n - 0| < \epsilon$ .

EXEMPLO 4.29.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1$$

EXEMPLO 4.30.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2(1+1/x^2)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(1+1/x^2)} = 0$$

No exemplo seguinte vamos estabelecer o valor do limite no infinito do quociente de dois polin omios.

EXEMPLO 4.31. Seja  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  e  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0$  polin omios com grau  $n$  e  $m$  respectivamente. Então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (P(x)/Q(x)) = \begin{cases} 0 & n < m \\ a_n/b_m & n = m \\ \infty & n > m \text{ e } a_n \cdot b_m > 0 \\ -\infty & n > m \text{ e } a_n \cdot b_m < 0 \end{cases}$$

De fato escrevendo

$$P(x)/Q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0}$$

$$P(x)/Q(x) = x^{(n-m)} \cdot \frac{a_n + a_{n-1} 1/x + \dots + a_1 1/x^{n-1} + a_0/x^n}{b_m + b_{m-1} 1/x + \dots + b_1 1/x^{m-1} + b_0/x^m}$$

Quando  $x$  tende para  $\infty$  todos os termos da fração tende a zero exceto  $a_n$  e  $b_m$ . Assim seu limite é  $a_n/b_m$ . Já  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m} = 1$  se  $n = m$ ,  $\infty$  se  $n > m$  e  $0$  se  $n < m$ . Disto concluímos a afirmação acima.

Deste exemplo conclui-se que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/Q(x+1)) = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x/x^2 + 1) = 0$

DEFINIÇÃO 4.32. (*Limite infinito*)

Diremos que limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a  $c$  é  $\infty$  se para todo  $M > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta \text{ então } f(x) > M$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

Da mesma forma definimos

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

se para todo  $M < 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta \text{ então } f(x) < M$$

EXEMPLO 4.33. Mostremos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Dado  $M > 0$  escolhemos  $\delta < 1/\sqrt{M}$ .

Então

$$0 < |x - 1| < \delta \implies 0 < |x - 1| < 1/\sqrt{M} \implies 0 < |x - 1|^2 < 1/M \implies \frac{1}{(x-1)^2} > M$$

Generalizando o exemplo acima tem-se

EXEMPLO 4.34.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x-1)^{2n}} = \infty$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ .

EXEMPLO 4.35. Não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Em geral,

EXEMPLO 4.36. *Não existe*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{(x - c)^{2n+1}}$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{1}{(x - c)^{2n+1}} = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{(x - c)^{2n+1}} = -\infty$$

PROPOSIÇÃO 4.37. *Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$  então  $\lim_{x \rightarrow c} 1/f(x) = 0$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Dado  $\epsilon > 0$  tomemos  $M > 1/\epsilon$ . Da hipótese existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - c| < \delta \implies f(x) > M$$

Como  $M > 0$  então  $|f(x)| > M$ . Segue que  $1/|f(x)| < 1/M < \epsilon$

□

PROPOSIÇÃO 4.38. *Seja  $f$  uma função que não se anula para  $x \neq c$ .*

*Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow c} |1/f(x)| = 0$ .*

A demonstração é deixada a cargo do leitor.

EXEMPLO 4.39. *Vamos analisar as possibilidades do limite*

$$\lim_{x \rightarrow c} (P(x)/Q(x))$$

onde  $P(x), Q(x)$  são polinômios e  $c$  é uma raiz de  $Q(x)$  isto é  $Q(c) = 0$ .

Pelo algoritmo da divisão  $Q(x) = (x - c)^s S(x)$  onde  $S(c) \neq 0$  e  $s \geq 1$ . Fatores também  $P(x) = (x - c)^r R(x)$  onde  $R(c) \neq 0$  e  $r \geq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow c} (P(x)/Q(x)) = \lim_{x \rightarrow c} (1/(x - c)^{s-r})(R(x)/S(x)) \begin{cases} 0 & r > s \\ (R(c)/S(c)) & r = s \\ \infty & r < s \text{ (s - r) par e } (R(c)/S(c)) > 0 \\ -\infty & r < s \text{ (s - r) par e } (R(c)/S(c)) < 0 \\ \nexists & r < s \text{ (s - r) impar} \end{cases}$$

## 2. Funções contínuas

DEFINIÇÃO 4.40. *Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se contínua em  $c \in D$  se*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

*Se  $f$  for contínua para todo  $c \in D$  diremos que  $f$  é contínua.*



Assim para que  $f$  seja contínua em  $c$  é necessário e suficiente que o limite exista em  $c$ ,  $c$  pertença ao domínio de  $f$  e além disto o valor do limite seja exatamente  $f(c)$ .

PROPOSIÇÃO 4.41. (*Relação entre limite e continuidade*)

Se  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$  então a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq c \\ l & \text{se } x = c \end{cases}$$

é contínua em  $c$ .

Quando vamos calcular um limite e chegamos numa expressão do tipo  $0/0$  dizemos que o limite é indeterminado como no caso

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Para encontrar o valor do limite precisamos eliminar a indeterminação. Isto significa encontrar uma função contínua  $f(x)$  tal que  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$  para  $x \neq 1$ . Pela proposição anterior

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = f(1)$$

No caso em questão a função  $f(x) = x^2 + x + 1$  e o limite é

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = f(1) = 3$$

Do teorema 4.17 segue imediatamente o seguinte:

TEOREMA 4.42. Se  $f$  e  $g$  são contínuas em  $c \in D$  então:

- (1)  $f + g$  é contínua em  $c$ .
- (2)  $f \cdot g$  é contínua em  $c$ .
- (3)  $1/g$  é contínua em  $c$ , desde que  $g(c) \neq 0$ .
- (4)  $f/g$  é contínua em  $c$ , desde que  $g(c) \neq 0$ .

EXEMPLO 4.43. (1) A função  $f(x) = x$  é contínua em todo número  $c \in \mathbb{R}$  pois  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = c = f(c)$ .

(2) Segue do Teorema 4.42 que  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$  e, indutivamente,  $f(x) = x^n$  são funções contínuas em todo seus domínios.

(3) Segue também do Teorema 4.42 que toda função polinomial  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  é contínua em todo seus domínios.

(4) Mais geralmente se  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  onde  $p, q$  são funções polinomiais é uma função contínua em  $c$  desde que  $q(c) \neq 0$ .

**2.1. Três Teoremas Importantes.** Os teoremas seguintes são importantes pois eles garantem a existência de pontos do domínio de uma função com propriedades específicas como pontos de máximo, pontos de mínimo e raízes de equações.

**TEOREMA 4.44.** (*Teorema do anulamento*)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$  então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $c_1 = (a + b)/2$  o ponto médio do intervalo  $[a, b]$ . Se  $f(c_1) = 0$  então  $c = c_1$ . Se  $f(c_1) > 0$  seja  $a_1 = c_1$  e  $b_1 = b$ . Caso  $f(c_1) < 0$  colocamos  $a_1 = a$  e  $b_1 = c_1$ .

Assim  $a \leq a_1, b_1 \leq b$  e  $b_1 - a_1 = (b - a)/2$  com  $f(a_1) > 0$  e  $f(b_1) < 0$ .

Indutivamente obtém-se

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots a_n \leq \dots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots b_n \geq \dots$$

onde  $a_i \geq b_j, f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$  e  $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ .

Como  $\lim(b_n - a_n) = 0$  temos  $\lim a_n = \lim b_n = c$ . Mostremos que  $f(c) = 0$ . Da continuidade de  $f$  vem que  $\lim f(a_n) = \lim f(b_n) = f(c)$ . Como  $f(a_n) > 0$  tem-se que  $\lim f(a_n) = f(c) \geq 0$  e como  $f(b_n) < 0$  conclui-se que  $\lim f(b_n) = f(c) \leq 0$  ou seja  $f(c) = 0$ .  $\square$

É evidente que o mesmo resultado se aplica para uma função  $f$  tal que  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ .

**COROLÁRIO 4.45.** (*TVI- Teorema do Valor Intermediario*)

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $f(a) < k < f(b)$  então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = k$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Se  $g(x) = f(x) - k$  então  $g(a) < 0$  e  $g(b) > 0$  pelo teorema anterior existe  $c$  tal que  $g(c) = 0$  ou seja  $f(c) = k$ .  $\square$

**COROLÁRIO 4.46.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua onde  $I$  é um intervalo qualquer então  $Imf$  é um intervalo.

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $k_1, k_2 \in Imf$  tais que  $k_1 < k_2$  e seja  $a, b \in I$  tais que  $f(a) = k_1$  e  $f(b) = k_2$ . Se  $f(a) < k < f(b)$  então pelo TVI existe  $c$  tal que  $f(c) = k$  isto é  $k \in Imf$ . Da definição de intervalo segue que  $Imf$ .  $\square$

**TEOREMA 4.47.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua então  $f$  é limitada, isto é,  $Imf$  é um conjunto limitado.

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que  $f$  seja ilimitada no intervalo  $[a, b]$ . Como na demonstração acima seja  $c = (a + b)/2$  o ponto médio do intervalo  $[a, b]$ . Temos dois casos:

(1)  $f$  é ilimitada no intervalo  $[a, c]$ . Neste caso tomamos  $a_1 = a$  e  $b_1 = c$ .

(2)  $f$  é ilimitada no intervalo  $[c, b]$ . Neste caso tomamos  $a_1 = c$  e  $b_1 = b$ .

Temos  $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ .

Repetindo o processo obtem-se duas sequências

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots a_n \leq \dots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots b_n \geq \dots$$

onde

$$b_n - a_n = (b - a)/2^n \text{ e}$$

$f$  é ilimitada no intervalo  $[a_n, b_n]$ .

Argumentando como antes  $\lim a_n = \lim b_n = c$  onde  $c \in [a, b]$ .

Como  $f$  é contínua em  $c$  existe  $r > 0$  tal que  $x \in [x - r, x + r]$  então  $f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1$  ou seja  $f$  é limitada no intervalo  $[x - r, x + r]$ . Como  $\lim a_n = c$  e  $\lim b_n = c$  existe um  $n$  tal que  $a_n \in [x - r, x + r]$  e  $b_n \in [x - r, x + r]$ ,  $f$  ilimitada em  $[a_n, b_n]$  o que é uma contradição.  $\square$

**TEOREMA 4.48. (Weierstrass)**

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua então  $f$  tem um valor máximo e um valor mínimo. isto quer dizer que existe  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Pelo teorema anterior  $Imf$  é um conjunto limitado superiormente. Seja  $S = \sup Imf$ . Se existe  $x_2 \in [a, b]$  tal que  $f(x_2) = S$  este é o valor máximo de  $f$ . Caso contrário definimos a função  $g(x) = 1/(S - f(x))$  definida e contínua em todo intervalo  $[a, b]$ . Novamente pelo teorema anterior  $g$  é limitada. Por outro lado, da definição de  $\sup$ , para cada natural  $n$  podemos encontrar  $x_n$  tal que  $S - 1/n < f(x_n)$ . Logo

$$g(x_n) = 1/(S - f(x_n)) > n$$

o que mostra que  $g$  é ilimitada. Logo uma contradição.  $\square$

**EXEMPLO 4.49.** Seja  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  um polinômio de grau ímpar. Como uma aplicação do teorema do anulamento mostraremos que  $P(x)$  tem uma raiz real. Considere  $a_n > 0$ . Neste caso  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty$ . Podemos escolher  $a, b$  tais que  $P(a) < 0$  e  $P(b) > 0$  do teorema do anulamento existe  $c \in [a, b]$  tal que  $P(c) = 0$ .

### 3. Exercícios

#### Parte 1 - Limites.

(1) (a) Se  $p$  é uma FAP e  $p(h) \geq l$  para  $0 < h < m$ , então  $l \leq 0$ .

(b) Se  $p_1$  e  $p_2$  são FAPs definidas num intervalo  $]0, m[$ , então  $p = \max\{p_1, p_2\}$  e  $q = \min\{p_1, p_2\}$  são FAPs.

(c)  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  se e só se  $|f(x) - l| < p(|x - c|)$ , onde  $p$  é uma FAP.

(d) Se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ , então  $f$  é limitada num intervalo  $]c - m, c + m[$ .

(e) Se  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$  onde  $L > l$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $g(x) > f(x)$  para  $0 < |x - c| < \delta$ .

(sugestão: Aplique o teorema da conservação do sinal para a função  $g - f$ )

(2) Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$j) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow h} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{h}}{x - h}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x - 1}$$

(3) Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $|g(x)| \leq M$ , para todo  $x \in \text{Dom}(g)$ , mostre que  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = 0$ .

(4) Seja  $f$  uma função tal que  $x^3 \leq f(x) \leq x^2$ , para todo  $x \leq 1$ . O que você pode dizer a respeito de:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(5) Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^h - 1}{x^m - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$

e)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

(6) Se  $|f(x) - 1| \leq (x - 1)^2$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . Você pode dizer algo sobre  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?

(7) Encontre, quando existir, os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

c)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|}{x + 2}$

(8) Seja  $g$  uma função tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$ . Mostre que existe  $\delta > 0$  tal que  $\forall x \in Dom g$ ,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} < g(x) < \frac{3}{2}.$$

(9) Seja  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  e tal que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

(10) Mostre que se  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  então  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) = l$ .

(11) Mostre que se  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = l$  então  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(1/x) = l$ .

(12) Verifique se os limites abaixo existem e calcule seus valores.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)^2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{(x - 1)}$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1}$$

(13) Verifique se os limites abaixo existem e calcule seus valores.

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x^2} - x$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x} - \sqrt{x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + x} - x$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(1/x)$$

(e)

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

### Parte 2 - Continuidade.

(1) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $|f(x)| \leq \frac{x^2}{x^4 + 1}$ . Mostre que  $f$  é contínua na origem.

(2) Se  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  e  $f$  é contínua na origem, mostre que  $f(0) = 0$ .

(3) Determine os valores das constantes  $a$  e  $b$  que tornam as funções contínuas para todo  $x$  real.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x + 7, & x \leq 4 \\ ax - 1, & x > 4 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ a^2x - a, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$$

(4) Considere a função  $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 2 \\ ax^2 - bx, & x \geq 2 \end{cases}$

a) Para que valores de  $a$  e  $b$   $f$  é contínua?

b) Seja  $m(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ . Encontre  $a$  e  $b$  para que exista  $\lim_{x \rightarrow 2} m(x)$ .

(5) Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & x \neq 5 \\ a, & x = 5 \end{cases}$ . Determine o valor de  $a$  para que  $f$  seja contínua em 5.

(6) Se  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$  e  $f$  é contínua na origem, mostre que  $f(0) = 0$ .

## CAPÍTULO 5

# Derivadas

A derivada de uma função  $f$  num ponto  $c$  do domínio é a taxa de variação da função a partir de  $c$  em relação à sua variável. Geometricamente é interpretada como o limite das retas secantes ao gráfico de  $f$  que passam por  $c$  sendo este limite considerado como a reta tangente ao gráfico de  $f$ . Neste capítulo damos a definição precisa da noção de derivada, estudamos suas consequências e suas importantes aplicações.

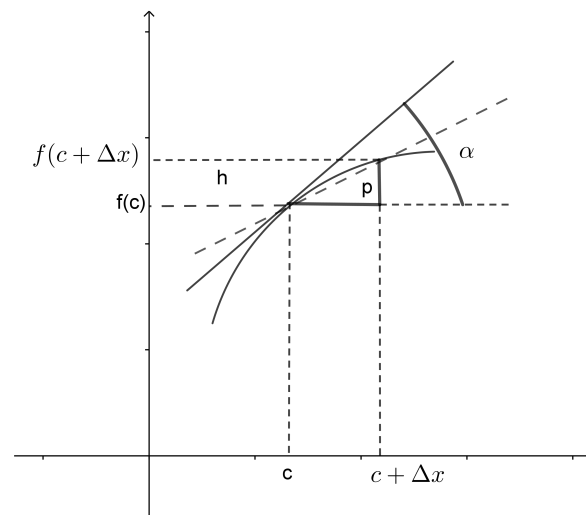
### 1. Derivada

DEFINIÇÃO 5.1. *Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $I$  um intervalo aberto e  $c \in I$  tais que  $I \subseteq D$ . Diremos que  $f$  é derivável em  $c$  quando existir o limite  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ .*

*O valor deste limite é chamado de derivada de  $f$  em  $c$  e designado por  $f'(c)$ .*

*Assim*

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$



Outra notação para a derivada bastante usada é  $\frac{df}{dx}$  criada por Leibniz sugere o limite do quociente entre a diferença da função e a diferença da variável.



Uma maneira equivalente de definir derivada é a seguinte:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

A vantagem da segunda maneira de se definir derivada é que encontramos a expressão na variável  $x$  da função derivada  $f'(x)$ .

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observe que o quociente  $\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$  é a inclinação da reta que passa pelos pontos  $(c, f(c))$  e  $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$  secante ao gráfico de  $f$ . O limite destas inclinações quando existir é o valor da derivada.

Quando a função  $f$  admite derivada em todo  $c \in D$  obtemos uma nova função

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}$$

chamada de função derivada de  $f$  ou simplesmente de derivada de  $f$ . Sendo esta função derivável sua derivada  $f'' = (f')'$  chama-se *derivada segunda* de  $f$ . Sucessivamente define-se

$$f'' = (f')', f''', f^{(4)} \dots f^{(n)}$$

derivada terceira, quarta, .....n-ésima. Na notação de Leibniz escreve-se

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f'', \quad \frac{d^3 f}{dx^3} = f'''$$

EXEMPLO 5.2. Considere a função  $f(x) = x^2$ . Então

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = 2c$$

$$f'(c) = 2c$$

O que é a mesma que  $f(x) = 2x$ .

Se utilizarmos a outra definição teremos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 2x$$

TEOREMA 5.3. (Continuidade da derivada)

Se uma função  $f$  é derivável em  $c$  ela é contínua em  $c$ .

DEMONSTRAÇÃO.  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0 \cdot f'(c) = 0$ .

Disto segue que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Assim  $f$  é contínua em  $c$ .  $\square$

Se  $f$  é derivável em  $c$  considere a função

$$r(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c)$$

então

$$f(c+h) - f(c) = f'(c) \cdot h + h \cdot r(h)$$

Segue imediatamente da definição de derivada que  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ . Fazendo a mudança de variável  $h = x - c$  então

$$(x - c) \cdot r(x - c) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c))$$

onde  $\lim_{x \rightarrow c} r(x - c) = 0$ . Assim a função  $y = f(x)$  fica aproximada pela função linear  $y = f(c) + f'(c)(x - c)$  no sentido que o "resto"  $(x - c) \cdot r(x - c)$  fica pequeno comparado com  $x - c$  quando este torna-se pequeno.

DEFINIÇÃO 5.4. A reta cuja equação é  $y = f(c) + f'(c)(x - c)$  chama-se Reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(c, f(c))$ . Note que esta reta passa pelo ponto  $(c, f(c))$  e tem coeficiente angular  $m = f'(c)$ .

EXEMPLO 5.5.

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  que passa pelo ponto  $(2, 4)$ .

Solução: O coeficiente angular  $m = f'(2) = 4$ . A equação da reta é  $y - 4 = 4(x - 2)$

Após estas considerações não é difícil demonstrar o seguinte:

TEOREMA 5.6. (Aproximação linear)

Uma condição necessária e suficiente para que uma função  $f$  seja derivável em  $c$  é que exista um número  $m$  tal que  $f(c+h) - f(c) = m \cdot h + h \cdot r(h)$  onde  $\lim_{h \rightarrow 0} r(h) = 0$ . Se este for o caso então  $m = f'(c)$ .

É comum usar as seguintes abreviações:  $\Delta f = f(c+h) - f(c)$ ,  $\Delta x = x - c$ . Assim  $\Delta f$  é a variação da função e  $\Delta x$  a variação da variável.

$df_c = f'(c) \cdot \Delta x$  é chamada diferencial de  $f$  em  $c$ . Esta é uma função linear da variável  $\Delta x$ . De acordo com o que vimos acima a diferença  $\Delta f$  é aproximada pela diferencial  $df_c$ .

**TEOREMA 5.7. (Regra de derivação)**

Sejam  $f, g$  funções deriváveis em  $c$ . Então  $f + g, f - g, f \cdot g, f/g$  desde que  $g(c) \neq 0$  são deriváveis em  $c$  e temos:

$$(1) (f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

$$(2) (f - g)'(c) = f'(c) - g'(c)$$

$$(3) (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

$$(4) \left(\frac{1}{g}\right)'(c) = \frac{-g'(c)}{g(c)^2}$$

$$(5) \left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

DEMONSTRAÇÃO. (1)  $(f + g)'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))}{x - c} =$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x) - f(c)) + (g(x) - g(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) = f'(c) + g'(c)$$

A última igualdade é uma consequência das propriedades de limites.

(2) A demonstração é semelhante a do item anterior.

(3) Observe que

$$\frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} =$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(x) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Usando o fato que  $g$  é contínua em  $c$  e que as funções são deriváveis em  $c$  obtemos o resultado da parte 3.

(4) Deixamos a demonstração como exercício.

(5) Esta parte segue da terceira observando que  $\frac{f}{g} = f \frac{1}{g}$ .

□

**EXEMPLO 5.8. (1) (Derivada de Polinômio)**

Começamos determinando a derivada do monômio  $p(x) = x^n$ .

$$p'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^n - c^n}{x - c}$$

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + c^{n-2}x + c^{n-1})$$

Segue que

$$p'(c) = \lim_{x \rightarrow c} (x^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + c^{n-2}x + c^{n-1}) = nc^{n-1}$$

Se  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  então pelo teorema anterior vem que

$$p'(c) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

(2) (Derivada de raízes)

Seja  $R(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ .

$$R'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}}{x - c}$$

$$(\sqrt[n]{x})^n - (\sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c})((\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{c})(\sqrt[n]{x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{c})^{n-2}(\sqrt[n]{x}) + (\sqrt[n]{c})^{n-1})$$

conclui-se que

$$\frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{c}}{x - c} = \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1} + (\sqrt[n]{c})(\sqrt[n]{x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{c})^{n-2}(\sqrt[n]{x}) + (\sqrt[n]{c})^{n-1}}$$

Tomando-se o limite tem-se

$$R'(c) = \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{c} = \frac{1}{n} \cdot c^{(\frac{1}{n}-1)}$$

(3) (Derivada de potências racionais)

Seja  $f(x) = x^{\frac{n}{m}}$  Observando que

$$x^n - c^n = (x^{\frac{n}{m}})^m - (c^{\frac{n}{m}})^m$$

e raciocinando como acima obtém-se

$$f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$$

Certamente a regra mais importante de derivação enunciada no próximo teorema é conhecida como Regra da cadeia. Ela nos diz como derivar uma função composta.

TEOREMA 5.9.

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $Im f \subset [\alpha, \beta]$ . Se  $f$  é derivável em  $c$  e  $g$  é derivável em  $f(c)$  então a função composta  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  é derivável em  $c$  e vale  $(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $g$  é derivável em  $f(c)$  então

$$g(f(c) + \Delta y) - g(f(c)) = g'(f(c)) \cdot \Delta y + \Delta y \cdot r(\Delta y)$$

onde  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} r(\Delta y) = 0$ .

Se  $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$  então

$$g(f(c + \Delta x)) - g(f(c)) = g(f(c) + \Delta y) - g(f(c)) = g'(f(c)) \cdot \Delta y + \Delta y \cdot r(\Delta y)$$

$$\frac{g(f(c + \Delta x)) - g(f(c))}{\Delta x} = g'(f(c)) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot r(\Delta y)$$

Observando que  $f'(c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  e tomando o limite em ambos os lados da igualdade acima vem

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c) + f'(c) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta y)$$

Como  $f$  é contínua em  $c$   $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

Na notação de Leibniz a regra da cadeia enuncia-se da seguinte forma. Se  $y$  é uma função de  $x$ ,  $y = f(x)$  e  $z$  é uma função de  $y$ ,  $z = g(y)$  então  $z$  é uma função de  $x$ ,  $z = g(f(x))$ . Pela regra da cadeia vem que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Observe onde as derivadas estão calculadas:  $\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dz}{dy}(f(x)) \cdot \frac{dy}{dx}(x)$

Se ainda  $x$  é uma função de  $t$  então  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$  o que justifica o nome de derivar em cadeia.

A expressão da derivada segunda é dada por

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

EXEMPLO 5.10. A função  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  é a composta de  $g(y) = \sqrt{y}$  com  $f(x) = x^2 + 1$ .

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = (1/2\sqrt{x^2 + 1})2x = x/\sqrt{x^2 + 1}$$

EXEMPLO 5.11.  $h(x) = (x^2 + 1)^7$  é uma função polinomial de grau 14. Podemos desenvolver pela fórmula do binômio e derivar pelas regras de derivação como fizemos anteriormente. É bem mais fácil usar a regra da cadeia.

$$h'(x) = 7(x^2 + 1)^6 2x = 14x(x^2 + 1)^6$$

## 2. Derivada da Função inversa

Seja  $f : I \rightarrow J$  uma função do intervalo  $I$  sobre o intervalo  $J$ , derivável com inversa derivável  $f^{-1} : J \rightarrow I$ . Assim  $(f \circ f^{-1})(y) = y$ . Aplicando a regra da cadeia  $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ . Se  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$  então obtemos uma fórmula para a derivada da inversa.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Na notação de Leibniz  $y = f(x)$ ,  $x = f^{-1}(y)$  então  $\frac{dy}{dx}(x) \frac{dx}{dy}(y) = 1$ .

$$\frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)}$$

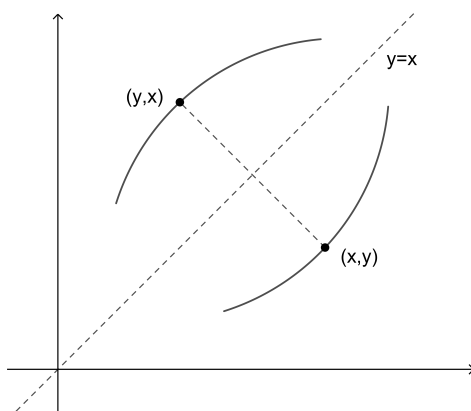
EXEMPLO 5.12. A inversa de  $f(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$  é a função  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$ . Pela fórmula anterior tem-se

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2y}$$

Derivando diretamente  $(f^{-1})'(y) = (1/2)y^{-(1/2)} = \frac{1}{2y}$  o que concorda com a resposta anterior.

Lembremos a relação entre o gráfico de uma função e de sua inversa. O gráfico de  $f$  tem como equação  $y = f(x)$  e de  $f^{-1}$   $x = f^{-1}(y)$ .

$$(x, y) \in \text{graf}(f) \iff (y, x) \in \text{graf}(f^{-1})$$



Segue que os gráficos são simétricos em relação à reta  $y = x$ . A equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  num ponto  $(c, f(c))$  é  $y = f'(c)(x - c) + f(c)$  e ao gráfico de  $f^{-1}$  no ponto  $(f(c), c)$  é  $x = 1/f'(c)(y - f(c)) + c$ .

PROPOSIÇÃO 5.13.

Se  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  é contínua e inversível então  $f$  é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que  $f(a) < f(b)$ . Mostremos que  $f$  é crescente. Caso contrário existem  $x_1 < x_2$  tais que  $f(x_1) > f(x_2)$ . Se  $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$  pelo TVI existe  $x \in [a, x_1]$  tal que  $f(x) = f(x_2)$  o que contradiz o fato da função  $f$  ser inversível. Agora se  $f(x_2) < f(a) < f(b)$  novamente pelo TVI existe  $x \in [x_2, b]$  tal que  $f(x) = f(a)$  o que contraria a inversibilidade de  $f$ . Isto esgota todas as possibilidades. Logo  $f$  é crescente. na mesma linha mostra-se que se  $f(a) > f(b)$  então  $f$  é decrescente.  $\square$

PROPOSIÇÃO 5.14.

Seja  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente tal que  $im f = [c, d]$ . Então  $f$  é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha  $f$  estritamente crescente e seja  $a < x_0 < b$ . Então  $c < f(x_0) < d$ . Escolhemos arbitrariamente  $\epsilon > 0$  tal que  $f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) \in [c, d]$ . Como a imagem de  $f$  é  $[c, d]$  existem  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tais que  $f(x_1) = f(x_0 - \epsilon)$  e  $f(x_2) = f(x_0 + \epsilon)$ . Se  $x_1 \leq x \leq x_2$ , como  $f$  é estritamente crescente  $f(x_0 - \epsilon) \leq f(x) \leq f(x_0 + \epsilon)$ . Assim  $f$  é contínua. Caso  $x_0 = a$  ou  $x_0 = b$  argumenta-se como acima para a continuidade a direita ou a esquerda. Caso  $f$  seja estritamente decrescente basta inverter as desigualdades.  $\square$

COROLÁRIO 5.15.

Se  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  é contínua e inversível então sua inversa é contínua.

DEMONSTRAÇÃO. Se, por exemplo  $f$  é estritamente crescente então claramente sua inversa também o será. Da última proposição ela é contínua.  $\square$

PROPOSIÇÃO 5.16.

Seja  $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$  inversível e derivável. Se  $f'(x_0) \neq 0$  então sua inversa  $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$  é derivável em  $y_0 = f(x_0)$  e

$$g'(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/f'(g(y_0))$$

DEMONSTRAÇÃO. Caso exista

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$$

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))}$$

Fazendo a mudança de variável  $x = g(y)$ , como  $g$  é contínua em  $y_0$ ,  $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = x_0$ .

Disto,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = 1/f'(x_0)$$

$\square$

### 3. Derivada da função implícita

Sob certas condições uma equação em duas variáveis  $\phi(x, y) = 0$  determina uma função  $y = f(x)$  tal que  $\phi(x, f(x)) = 0$ . Por exemplo a equação da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  define implicitamente a função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Esta função é derivável no intervalo  $-1 < x < 1$ . Sua derivada é  $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ . Pode-se chegar a este resultado derivando implicitamente a expressão

$$\begin{aligned}x^2 + f(x)^2 &= 1 \\2x + 2f(x)f'(x) &= 0 \\f'(x) = -x/f(x) &= -x/\sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 5.17.

Chama-se *Derivada a direita de  $f$  em  $c$  ao limite*

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

quando este existir e a *Derivada a esquerda de  $f$  em  $c$  ao limite*

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diremos que  $f$  é derivável em  $a$  se existe  $f'_+(a)$  e que  $f$  é derivável em  $b$  se existe  $f'_-(b)$ .

É claro que uma função é derivável em  $c \in ]a, b[$  se existem as derivadas  $f'_+(a)$ ,  $f'_-(b)$  e estas são iguais.

### 4. Variação de Funções

Nesta seção estudamos condições para uma função seja crescente ou decrescente assim como pontos de máximo e aqueles de mínimo que tem grande importância nas aplicações como veremos posteriormente. Começamos enunciando algumas proposições e suas demonstrações que permitirão atingir nosso objetivo.

DEFINIÇÃO 5.18.

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Um  $c \in [a, b]$  diz-se *Ponto de Máximo de  $f$*  se para todo  $x \in [a, b]$  tem-se  $f(x) \leq f(c)$ . Neste caso  $f(c)$  é chamado de *valor máximo de  $f$* .

Note que uma função pode ter muitos pontos de máximo mas evidentemente o valor máximo é único. Por exemplo a função  $\sin$  tem uma infinidade de pontos de máximo mas seu valor máximo é 1.

Um *Ponto de Mínimo* é obtido trocando-se a desigualdade.



$c$  diz-se um *Ponto de Máximo Local* se existe um intervalo não vazio  $] \alpha, \beta [$  tal que  $c$  pertence a este intervalo e é um ponto de máximo da restrição de  $f$  à intersecção  $] \alpha, \beta [ \cap ] a, b [$ . Semelhantemente define-se *Ponto de Mínimo Local*. Quando  $c \in ] a, b [$  diremos que  $c$  é um ponto de máximo ou de mínimo local interior.

**TEOREMA 5.19.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in ] a, b [$  um ponto de máximo ou de mínimo local interior e  $f$  derivável em  $c$  então  $f'(c) = 0$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Sendo  $c$  um ponto de máximo local interior para  $x$  próximo de  $c$  tem-se  $f(x) \leq f(c)$ . Se  $x < c$  então  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  pois o numerador e o denominador são negativos. Pela conservação do sinal  $f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ . Agora se  $x > c$  tem-se que  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ . Disto segue que  $f'_+(c) \leq 0$ . Como  $f$  é derivável em  $c$  vem que  $f'_+(c) = f'_-(c) = 0$ .  $\square$

Note que se  $a$  máximo local só podemos concluir que  $f'_+(a) \leq 0$ . Caso  $b$  o seja então  $f'_-(b) \geq 0$ .

**TEOREMA 5.20.** *(Teorema de Rolle)*

*Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in ] a, b [$  é derivável e  $f(a) = f(b)$  então existe  $c \in ] a, b [$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Pelo teorema de Weierstrass  $f$  admite um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Caso estes pontos sejam os extremos  $a, b$  então o valor máximo e o valor mínimo da função coincidem pois por hipótese  $f(a) = f(b)$ . Neste caso a função será constante e podemos escolher qualquer  $c$ . Caso contrário um deles estará no interior do intervalo, escolhendo este como  $c$  pelo teorema anterior  $f'(c) = 0$ .  $\square$

**DEFINIÇÃO 5.21.** *Um Ponto crítico de uma função derivável  $f : ] a, b [ \rightarrow \mathbb{R}$  é um ponto  $c$  tal que  $f'(c) = 0$ . Pontos de máximo local e de mínimo local são pontos críticos. O teorema de Rolle garantem a existência de pontos críticos mediante sua hipótese. Existem pontos críticos diferentes destes. Por exemplo  $c = 0$  é um ponto crítico da função  $f(x) = x^3$ .*

**TEOREMA 5.22.** *(TVM-Teorema do Valor Médio)*

*Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in ] a, b [$  é derivável então existe  $c \in ] a, b [$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** A função linear

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

passa pelos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Definindo  $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $d(x) = f(x) - r(x)$  então  $d(a) = d(b) = 0$  e pelo teorema de Rolle existe  $d'(c) = 0$  ou seja  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .  $\square$

Uma das justificativas para o nome Teorema do Valor Médio pode ser vista na cinemática. Considere-se um movimento retilíneo onde a posição no instante  $t$  é  $s(t)$  sendo a duração do movimento o intervalo de tempo  $[a, b]$ . A velocidade média é dada por  $v_m = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ . Pelo TVM existe um instante  $t_0$  tal que a velocidade instantânea  $v(t_0) = \frac{ds}{dt}(t_0)$  é igual a velocidade média  $v_m$ .

A seguir enunciamos e demonstramos uma forma mais geral do TVM devida a Cauchy.

PROPOSIÇÃO 5.23. (*TVMC-Cauchy*)

Se  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis então existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$x'(c)(y(b) - y(a)) = y'(c)(x(b) - x(a))$$

Caso  $x'(c) \neq 0$  podemos escrever

$$\frac{y(b) - y(a)}{x(b) - x(a)} = \frac{y'(c)}{x'(c)}$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração segue a mesma linha daquela do TVM. Considere a função  $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d(t) = ((x(b) - x(a))(y(t) - y(a)) - (y(b) - y(a))(x(t) - x(a)))/K$$

onde  $K = \sqrt{(x(b) - x(a))^2 + (y(b) - y(a))^2}$ .

Como  $d(a) = d(b) = 0$  pelo teorema de Rolle existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $d'(c) = 0$  o que implica que  $y'(c)(x(b) - x(a)) - x'(c)(y(b) - y(a)) = 0$   $\square$

A função  $d$  acima não foi dada ao acaso. Para quem conhece geometria analítica elementar  $d(t)$  nada mais é que a distância do ponto  $(x(t), y(t))$  à reta que passa pelos pontos  $(x(a), y(a))$ ,  $(x(b), y(b))$ .

Se tomarmos  $x = x(t) = t$  e  $y = f$  então  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  que é a primeira forma do TVM.

Como aplicação do TVMC vamos demonstrar,

## 5. Regras de L'Hôpital

PROPOSIÇÃO 5.24.

(1) (*Regra de L'Hopital para 0/0*)

Sejam  $f, g$  funções definidas em  $]a, b[-\{c\}$  e deriváveis. Se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

(2) (Regra de L'Hopital para limite  $\infty$ ) Se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

(3) (Regra de L'Hopital para limite no  $\infty$ ) Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

(4) (Regra de L'Hopital para limite  $\infty$  no  $\infty$ ) Se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  se definimos  $f(c) = 0$  e  $g(c) = 0$  então  $f, g$  serão contínuas em  $c$ . Assim o faremos. Aplicando o TVMC temos

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$$

onde  $\bar{x}$  está entre  $x$  e  $c$ . Cosequentemente se  $x \rightarrow c$  então  $\bar{x} \rightarrow c$ . Segue que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\bar{x} \rightarrow c} \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = l$$

Para a segunda parte começamos observando que  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$  implica que  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  é positivo próximo de  $c$ . O TVMC então garante que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  também é positivo. Assumindo  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$  tem-se que  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ . Aplicando a primeira parte  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ . Disto concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Se  $F(x) = f(1/x)$  e  $G(x) = g(1/x)$  então  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$ . Vê-se também facilmente que  $\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}$ . Portanto tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(1/x)}{g'(1/x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f'(u)}{g'(u)} = l$$

Da primeira parte,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1/x)}{g(1/x)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{g(u)}$$

A última parte fica como exercício. □

A seguir algumas consequências do TVM.

PROPOSIÇÃO 5.25.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in ]a, b[$  é derivável e para todo  $x$   $f'(x) = 0$  então  $f$  é constante.

DEMONSTRAÇÃO. Se  $x_1, x_2 \in [a, b]$  com  $x_1 < x_2$  então pelo TVM existe  $c$  tal que  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$ , logo  $f(x_2) = f(x_1)$ . □

COROLÁRIO 5.26. Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis tais que  $f' = g'$  então para alguma constante  $c$  tem-se que  $g = f + c$ .

PROPOSIÇÃO 5.27.

Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável.  $f$  é crescente se e somente se  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in ]a, b[$  e  $f$  é decrescente se e somente se  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x \in ]a, b[$ . Além disto se  $f'(x) > 0$  então  $f$  é estritamente crescente.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $c \in ]a, b[$ . Se  $f$  é crescente então para  $x < c$ ,  $f(x) \leq f(c)$  e para  $x > c$ ,  $f(x) \geq f(c)$  em qualquer caso o quociente  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$  pela conservação do sinal  $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ . Reciprocamente se para todo  $x$   $f'(x) \geq 0$ , tomando-se arbitrariamente  $x_1 < x_2$  pelo TVM para algum  $c$   $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$ . Segue que  $f(x_2) \geq f(x_1)$  ou seja  $f$  é crescente. Observe que se  $f'(c) > 0$  então  $f(x_2) > f(x_1)$ . O caso decrescente é semelhante. □

Uma função pode crescer vagarosamente ou ter um crescimento acelerado. Dito de outro modo se a derivada for crescente sua derivada segunda ou seja sua aceleração será positiva. Neste caso diremos que a concavidade está voltada para cima. Caso contrário a derivada segunda será negativa e sua concavidade estará voltada para baixo. Uma definição geométrica de concavidade está dada num exercício.

DEFINIÇÃO 5.28. Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diz concava para cima se  $f''(x) > 0$  e concava para baixo se  $f''(x) < 0$  para todo  $x$  no intervalo  $I$ .

Um ponto onde muda a concavidade é chamado de Ponto de Inflexão.

EXEMPLO 5.29. Estudemos a variação da função  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . A derivada de  $f$  é

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

No intervalo  $[-1, 1]$  a derivada  $f'(x) \geq 0$  e  $f$  é crescente.

Nos intervalos  $]-\infty, -1[$  e  $]1, \infty[$ ,  $f'(x) < 0$  portanto  $f$  é decrescente.

1 é ponto de máximo e  $-1$  é ponto de mínimo.

A derivada segunda de  $f$  é

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$$

Analisando o sinal obtemos:

Nos intervalos  $[-\sqrt{3}, 0]$  e  $[\sqrt{3}, \infty[$ ,  $f''(x) > 0$  e portanto a concavidade está voltada para cima.

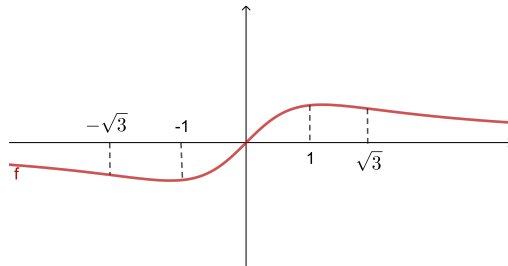
Nos intervalos  $[0, \sqrt{3}[$  e  $]-\infty, -\sqrt{3}[$ ,  $f''(x) < 0$  e portanto a concavidade está voltada para baixo.

Os pontos  $-\sqrt{3}$  e  $\sqrt{3}$  são pontos de inflexão.

Para o comportamento no infinito tem-se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Com estes resultados podemos esboçar o gráfico de  $f$ .



DEFINIÇÃO 5.30.

Uma assíntota a direita é uma reta  $y = ax + b$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

Uma assíntota a esquerda é uma reta  $y = ax + b$  tal que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ .

É claro nem toda função possui uma assíntota como por exemplo a parábola  $f(x) = x^2$ .

Se  $y = ax + b$  é uma assíntota digamos a direita então  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)(f(x) - (ax + b)) = 0$ . Assim  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((\frac{f(x)}{x} - a) + \frac{b}{x}) = 0$ . Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} b/x = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{f(x)}{x} - a) = 0$ . Portanto se  $f$  admite uma assíntota os valores de  $a$  e  $b$  são dados por

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

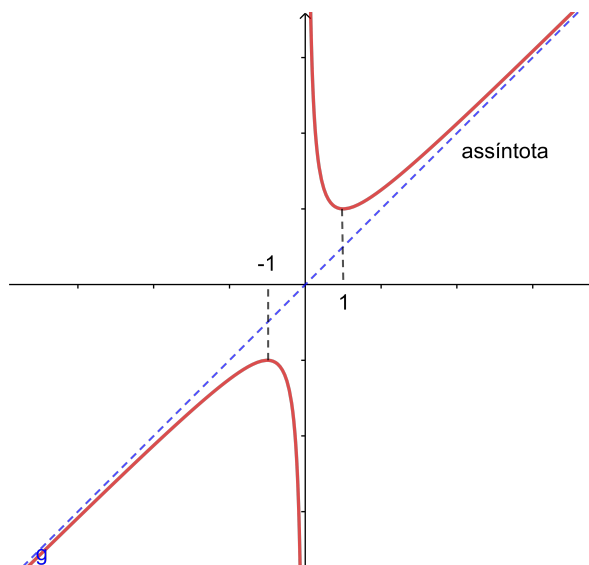
EXEMPLO 5.31. Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 \text{ e } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2 + 1}{x} - x) = 0$$

Segue que  $y = x$  é assíntota a direita. Da mesma forma verificamos que é também uma assíntota a esquerda. Analisando como no exemplo anterior os sinais das derivadas concluímos que seu gráfico tem a forma abaixo.



## 6. Exponencial e Logaritmos

Estas funções estão entre as mais importantes do cálculo. Elas transformam somas em produtos. Partiremos deste fato para dar uma definição precisa delas.

DEFINIÇÃO 5.32. Uma função Logaritmo é uma função derivável  $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  com a propriedade

$$L(a \cdot b) = L(a) + L(b)$$

Uma função Exponencial é uma função derivável  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com a propriedade

$$E(a + b) = E(a) \cdot E(b)$$

Sabemos o algoritmo para realizar uma multiplicação é bem mais complicado que o da soma de dois números. Os Logaritmos foram inventados por Napier exatamente para transformar o produto em adição com a finalidade de facilitar os cálculos. Teóricamente falando o conjunto  $\mathbb{R}^+$  com a operação de produto é essencialmente o mesmo que  $\mathbb{R}$  com a operação de adição. Estabelece-se a identificação entre eles através de uma função logaritmo que em álgebra é chamada de um homomorfismo entre estas estruturas algébricas.

TEOREMA 5.33. Uma função Logaritmo  $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tem as seguintes propriedades:

- (1)  $L(1) = 0$
- (2)  $L(1/a) = -L(a)$
- (3)  $L(a/b) = L(a) - L(b)$
- (4)  $L'(x) = L'(1) \cdot \frac{1}{x}$

DEMONSTRAÇÃO. (1)  $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$  portanto  $L(1) = 0$ .

(2)  $0 = L(1) = L(a \cdot (1/a)) = L(a) + L(1/a)$  disto  $L(a) = -L(1/a)$ .

(3) Segue da propriedade fundamental de  $L$  e da parte 2).

$$(4) L'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(\frac{x+h}{x})}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} (1/x) \frac{L(1 + \frac{h}{x})}{h/x} =$$

$$(1/x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{L(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \cdot L'(1)$$

□

Do teorema uma função logaritmo passa pelo ponto  $(1, 0)$  e para cada valor de  $L'(1)$  tem-se uma função logaritmo. Se  $L'(1) = 0$  então  $L(x) = 0$ .

DEFINIÇÃO 5.34. Chama-se Logaritmo Natural a função logaritmo  $\ln$  tal que  $\ln'(1) = 1$  cuja derivada é  $\ln'(x) = 1/x$ .

Outras Propriedades da função  $\ln$ .

- (1) Como  $\ln'(x) = 1/x > 0$   $\ln$  é estritamente crescente.
- (2)  $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$   $\ln$  é concava para baixo.
- (3)  $\ln 2 > 0$  pois  $2 > 0$  e ela é estritamente crescente. Como  $\ln 2^n = n \cdot \ln 2$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2^n = \infty$ . Segue que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$  pois ela é crescente.

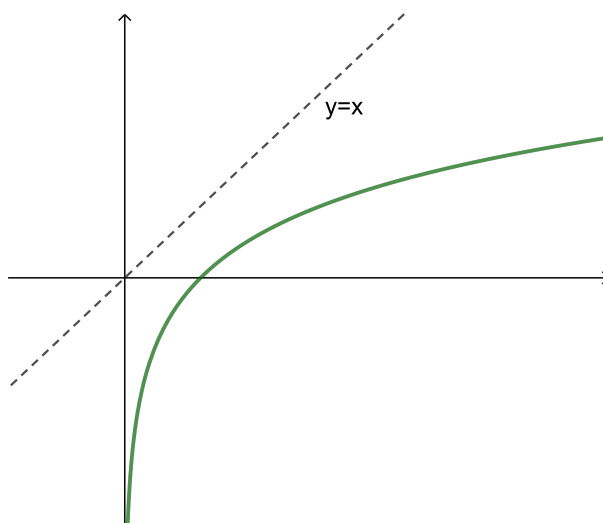
$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln(1/u) = -\infty$$

$$(5) \ln x = \ln(\sqrt{x})^2 = 2 \cdot \ln \sqrt{x}. \text{ Por outro lado se } x > 1 \text{ pelo TVM } \ln x - \ln 1 = \ln x = (1/c)(x-1) < x-1 < x \text{ pois } 1 < c < x. \text{ Conclue-se que } \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ e portanto}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\ln$  não possui assíntotas não verticais.

Com estas propriedades fazemos um gráfico da função Logaritmo Natural.



EXEMPLO 5.35. Seja  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

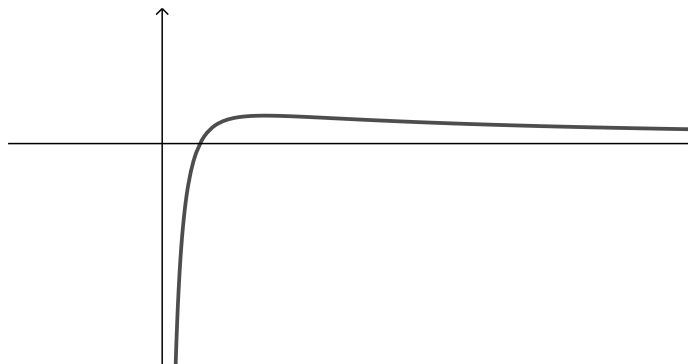
Como  $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$  segue que  $f$  é crescente  $]0, e[$ , decrescente  $[e, \infty[$  e portanto  $x = e$  é seu ponto de máximo com  $f(e) = 1/e$ .

Por outro lado  $f''(x) = \frac{\ln(x)-2}{x^3}$  de onde  $f$  é concava para baixo no intervalo  $]0, e^2]$  e para cima  $[e^2, \infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$





Existem duas definições da função exponencial. Uma como inversa da logaritmo outra pelas suas propriedades. Começamos com esta última e veremos que elas coincidem.

TEOREMA 5.36. *Se  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função exponencial então:*

- (1)  $E(0) = 1$
- (2)  $E(-a) = 1/E(a)$
- (3)  $E(a - b) = E(a)/E(b)$
- (4)  $E'(x) = E'(0) \cdot E(x)$

DEMONSTRAÇÃO. (1)  $E(0) = E(0 + 0) = E(0) \cdot E(0)$ . Como  $E(0) \neq 0$   $E(0) = 1$ .

(2)  $1 = E(a - a) = E(a)E(-a)$  disto  $E(-a) = 1/E(a)$ .

(3) Segue da propriedade fundamental de  $E$  e da parte 2).

(4)  $E'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x+h) - E(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(x)(E(h) - 1)}{h} =$

$$E(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(E(h) - 1)}{h} = E'(0)E(x)$$

□

DEFINIÇÃO 5.37.

Define-se a função exponencial  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  como aquela tal que  $E'(0) = 1$ . Em outras palavras  $\exp'(x) = \exp(x)$ .

PROPOSIÇÃO 5.38.

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\exp'(x) = \exp(x)$  então

$$\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

Se

$$f(x) = \ln(\exp(x))$$

então, aplicando a regra da cadeia

$$f'(x) = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$$

Portanto  $f(x) = x + k$ . Como  $f(0) = 0$  segue que

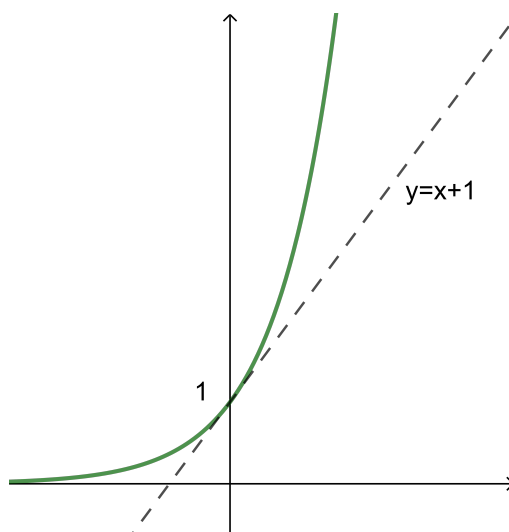
$$f(x) = \ln(\exp(x)) = x$$

Aplicando  $\ln^{-1}$

$$\exp(x) = \ln^{-1}(x)$$

□

Como  $\exp''(x) = \exp'(x) = \exp(x) > 0$  então a função exponencial é estritamente crescente e concava para cima.  $\exp(n) = \exp(1)^n$  mostra que ela é ilimitada superiormente e como é crescente podemos concluir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$ .



Seja  $e = \exp(1) > \exp(0) = 1$ . Se  $n, m \in \mathbb{N}$  então

$$\exp(n) = \exp(1 + 1 + \dots + 1) = (\exp(1))^n = e^n$$

$$\exp(1) = \exp(1/m + 1/m + \dots + 1/m) = (\exp(1/m))^m$$

$$\exp(1/m) = e^{1/m}$$

Levando em conta que  $\exp(-x) = 1/\exp(x)$  concluimos que para todo número racional  $r$   $\exp(r) = e^r$ . Definimos então para todo número real  $x$

$$e^x = \exp(x)$$

TEOREMA 5.39. *Se  $n \in \mathbb{N}$  então*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $\ln(x) < x$  para  $x > 0$  e  $\exp$  é crescente então  $e^x > e^{\ln(x)} = x$ . Disto  $\frac{x}{e^x} < 1$ .

Mostremos inicialmente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0$$

Como

$$\frac{x}{e^x} = \frac{2(x/2)}{e^{x/2}e^{x/2}} = \frac{(x/2)}{e^{x/2}} \frac{2}{e^{x/2}} < \frac{2}{e^{x/2}}$$

Segue,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{x/2}} = 0$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Para o caso geral observe que

$$\frac{x^n}{e^x} = \frac{x^n}{(e^{x/n})^n} = \left(\frac{x}{e^{x/n}}\right)^n = n^n \left(\frac{x/n}{e^{x/n}}\right)^n$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x/n}{e^{x/n}} = 0$$

o teorema está demonstrado. □

O teorema anterior nos diz que a função exponencial cresce mais rápido que qualquer polinômio por maior que seja seu grau. justifica-se assim o dito popular cresce exponencialmente para exprimir que algo cresce muito rápido.

EXEMPLO 5.40.

Se

$$f(x) = \frac{x}{\exp(x)}$$

então

$$f'(x) = \frac{1-x}{\exp(x)} \qquad f''(x) = \frac{2-x}{\exp(x)}$$

Assim

$f$  é crescente em  $]-\infty, 1]$  e decrescente em  $[1, \infty[$ .

É concava para baixo  $]-\infty, 2]$  e para cima  $[2, \infty[$ .

$x_0 = 1$  é seu ponto de máximo cujo valor é  $f(1) = 1/e$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ .

EXEMPLO 5.41.

Se

$$f(x) = \frac{x^2}{\exp(x)}$$

então

$$f'(x) = \frac{x(2-x)}{\exp(x)} \quad f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{\exp(x)}$$

Os pontos críticos são  $x_0 = 0$   $x_1 = 2$ .

$f$  é crescente no intervalo  $[0, 2]$  e decrescente nos intervalos  $]-\infty, 0]$  e  $[2, \infty[$ .

$f''(x) = 0$  para  $x = 2 - \sqrt{2}$ ,  $x = 2 + \sqrt{2}$ .

Concava para cima nos intervalos  $[2 + \sqrt{2}, \infty[$  e  $]-\infty, 2 - \sqrt{2}]$  e para baixo em  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$ .

$f(0) = 0$  é seu valor mínimo.  $2$  é um ponto de máximo local e  $f(2) = 4/e^2$ .

EXEMPLO 5.42. Analisemos o caso geral para  $n \geq 2$ .

$$f(x) = \frac{x^n}{\exp(x)}$$

então

$$f'(x) = \frac{x^{n-1}(n-x)}{\exp(x)} \quad f''(x) = \frac{x^{n-2}(x^2 - 2nx + n(n-1))}{\exp(x)}$$

Os pontos críticos são  $x_0 = 0$   $x_1 = n$ .

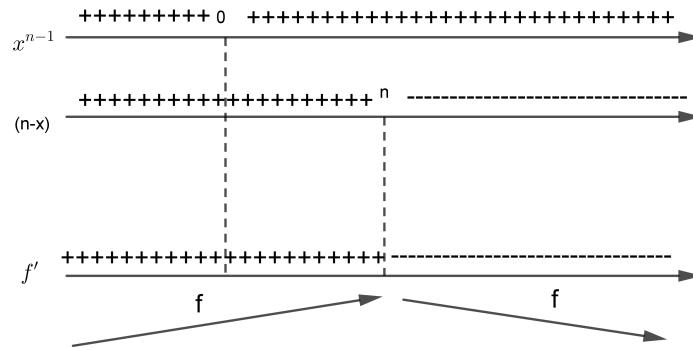
$f''(x) = x^{n-2}(x^2 - 2nx + n(n-1)) = 0$  nos pontos  $x_0 = 0$   $x_1 = n - \sqrt{n}$ ,  $x_2 = n + \sqrt{n}$ .

Distinguimos dois casos.

(1)  $n$  ímpar

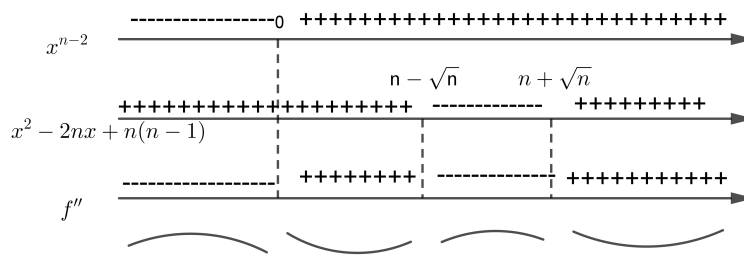
$f$  é crescente em  $]-\infty, n]$  e decrescente em  $[n, \infty[$ .

n impar



É concava para cima nos intervalos  $[0, n - \sqrt{n}]$  e  $[n + \sqrt{n}, \infty[$ .  
 É concava para baixo nos intervalos  $] - \infty, 0]$  e  $[n - \sqrt{n}, n + \sqrt{n}]$ .

n impar

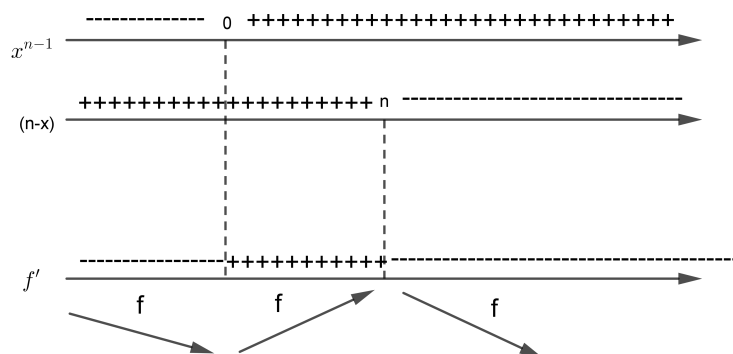


$x_0 = n$  é seu ponto de máximo cujo valor máximo é  $f(n) = n^n/e^n$ .

(2) n par

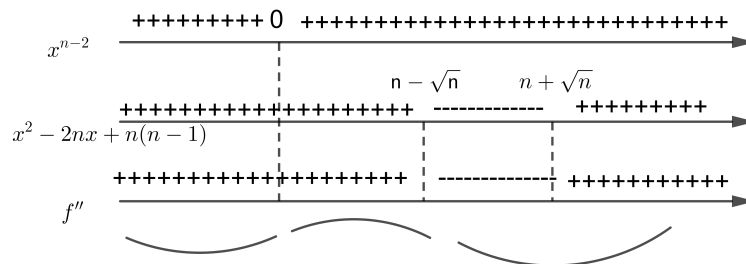
$f$  é crescente no intervalo  $[0, n]$  e decrescente nos intervalos  $] - \infty, 0]$  e  $[n, \infty[$ .

n par



É concava para cima nos intervalos  $] -\infty, n - \sqrt{n}]$  e  $[n + \sqrt{n}, \infty[$ .  
 É concava para baixo em  $[n - \sqrt{n}, n + \sqrt{n}]$ .

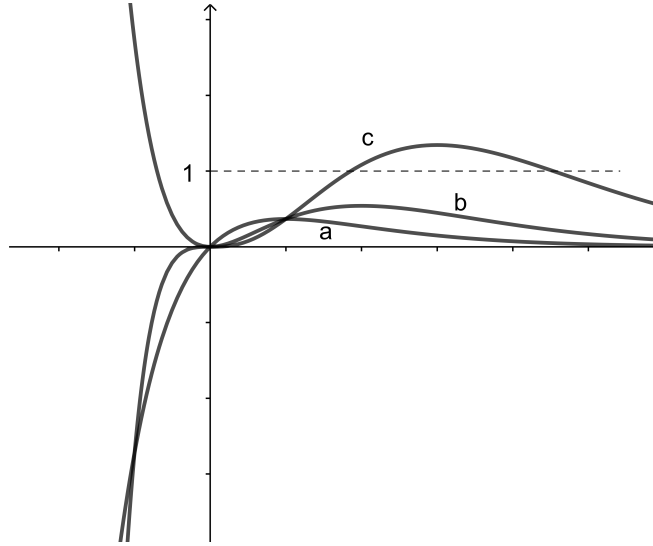
n par



$f(0) = 0$  é seu valor mínimo.  $n$  é um ponto de máximo local e  $f(n) = n^n/e^n$ .

O gráfico das funções acima para  $n = 1, 2, 3$  estão abaixo.

$$a = \frac{x}{e^x} \qquad b = \frac{x^2}{e^x} \qquad c = \frac{x^3}{e^x}$$



É interessante observar que para  $n \geq 3$  o valor máximo de  $f(x) = \frac{x^n}{\exp(x)}$  é maior que 1 o que acarreta que esta função assume duas vezes o valor 1 digamos nos pontos  $x_1$  e  $x_2$ . Isto quer dizer que a função polinomial  $x^n$  encontra a função exponencial  $e^x$  duas vezes e portanto no intervalo  $[x_1, x_2]$  o polinômio é maior que a exponencial.

Vejamos:  $x = n$  é ponto de máximo para  $x \geq 0$ . O valor máximo é

$$f(n) = \frac{n^n}{e^n}$$

$$n = 1 \implies f(1) = \frac{1}{e} < 1 \implies \frac{x}{e^x} < 1 \implies e^x > x$$

$$n = 2 \implies f(2) = \left(\frac{2}{e}\right)^2 < 1 \implies \frac{x^2}{e^x} < 1 \implies e^x > x^2$$

$$n = 3 \implies f(3) = \left(\frac{3}{e}\right)^3 > 1 \implies \frac{x^3}{e^x} < \left(\frac{3}{e}\right)^3$$

Em geral

$$n \geq 3 \quad f(n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n > 1 \quad \frac{x^n}{e^x} < \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Assim para  $n \geq 3$  temos que  $1 < \left(\frac{n}{e}\right)^n$  consequentemente a equação

$$\frac{x^n}{e^x} = 1$$

tem duas soluções digamos  $x_0, x_1$ .

Portanto

$$e^{x_0} = x_0^n \quad e^{x_1} = x_1^n$$

ou seja o polinômio  $x^n$  encontra a exponencial  $e^x$  em dois pontos. No intervalo  $[x_0, x_1]$  o polinômio é maior que a exponencial. A seguir considere a função

$$f(x) = \frac{x^\alpha}{e^x}$$

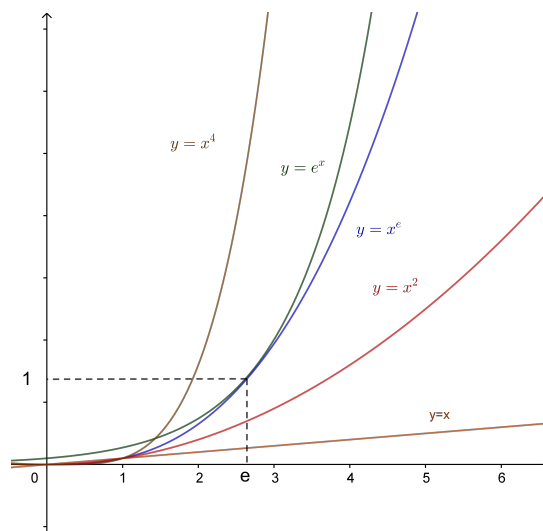
onde  $\alpha$  é real. Seu ponto de máximo continua sendo  $x = \alpha$  com valor máximo

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^\alpha}{e^\alpha}$$

Fazendo  $f(\alpha) = 1$  encontramos  $\alpha = e$ . Para este número o valor máximo é 1 e temos que

$$e^x \leq x^\alpha \quad e^\alpha = \alpha^\alpha$$

Portanto o polinômio  $x^\alpha$  tangencia a exponencial.



DEFINIÇÃO 5.43. *Seja  $a > 0$ . Definimos*

$$a^x = e^{x \ln a}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Justifica-se esta definição pois para  $x = m/n \in \mathbb{Q}$  tem-se  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ . Além disto  $\ln(a^x) = x \ln a$ .

As seguintes propriedades da função  $f(x) = a^x$  seguem facilmente daquelas da exponencial.

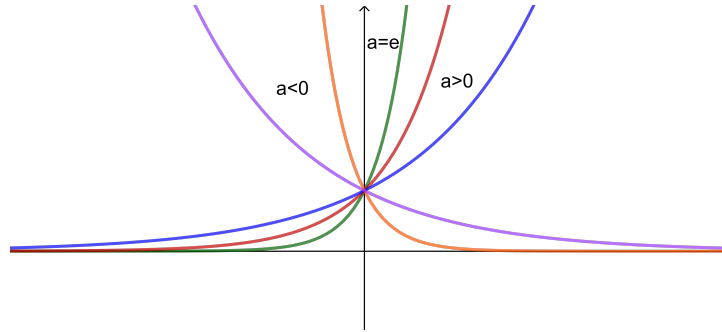
- (1)  $a^{x+y} = a^x a^y$
- (2)  $a^{-x} = 1/a^x$



$$(3) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(4) f'(x) = (\ln a)a^x$$

Da última propriedade conclui-se que  $f$  é crescente se  $a > 0$  e decrescente caso contrário.



PROPOSIÇÃO 5.44.  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x$

Em particular tomando-se  $x = n \in \mathbb{N}$  tem-se que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

DEMONSTRAÇÃO.

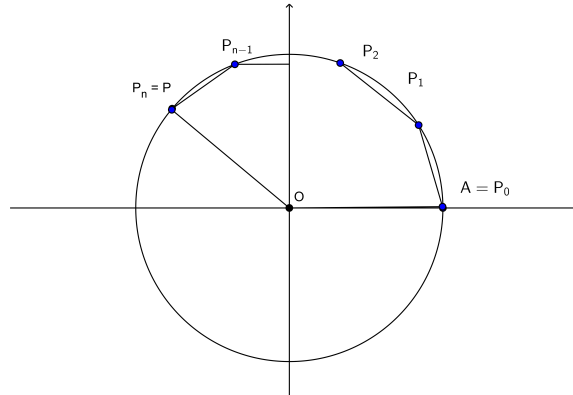
Da própria definição de logaritmo natural  $(\ln)'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = 1$ . Segue que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{1/h} = 1$ . Como  $\ln$  é contínua  $\ln(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h}) = 1$ . Por definição  $\ln e = 1$  e como a função logaritmo é injetora vem que  $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{1/h} = e$ . Colocando  $x = 1/h$  conclui-se que  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$ .  $\square$

## 7. Funções trigonométricas e sua Inversas

Estas são funções do ângulo, mais precisamente do comprimento do arco. Por definição o comprimento de um arco de circunferência é o limite do comprimento de poligonais inscritas nele e que coincide com o limite de poligonais circunscritas.

Considere  $C$  a circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$  com centro na origem  $O = (0,0)$ . Seja  $A = (0,1)$  e  $P = (x,y)$  in  $C$  um ponto arbitrário de  $C$  onde suporemos  $y > 0$ . Estes pontos determinam o ângulo  $\angle AOP$ , a corda  $\overline{AP}$ , e o arco  $\widehat{AP}$ . Se  $P_1$  é um ponto do arco então da desigualdade triangular temos que  $\overline{AP} < \overline{AP_1} + \overline{P_1P}$ .

DEFINIÇÃO 5.45. Uma partição do arco  $\widehat{AP}$  é uma sequência de pontos  $\mathbb{P} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  do arco  $\widehat{AP}$  tal que  $P_0 = A$ ,  $P_n = P$  e  $P_i$  está no arco  $P_{i-1}P_{i+1}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$



Seja  $l(\mathbb{P})$  o comprimento da poligonal  $P_0P_1 \dots P_n$  inscrita no arco  $\widehat{AP}$ , isto é:

$$l(\mathbb{P}) = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}$$

O Módulo da partição  $\mathbb{P}$  é o número

$$|\mathbb{P}| = \max\{\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}\}$$

Se acrescentamos pontos a uma partição o comprimento da poligonal vai aumentando, isto é

$$\mathbb{P} \subset \mathbb{Q} \implies l(\mathbb{P}) \leq l(\mathbb{Q})$$

Pode-se verificar através de argumentos geométricos elementares a afirmação acima.

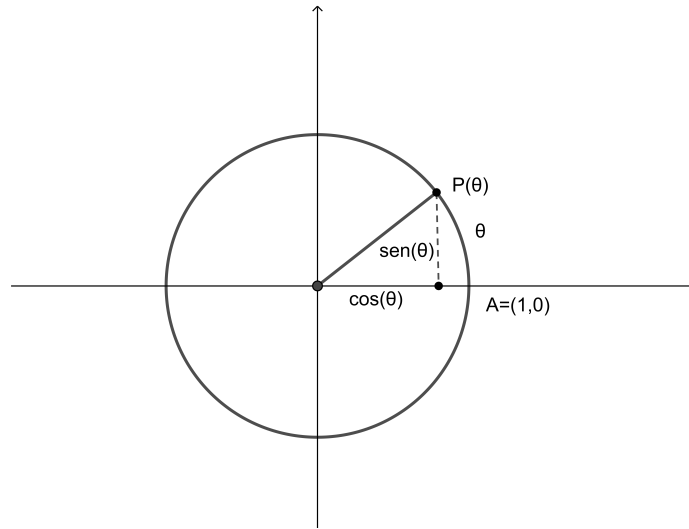
Tomamos como definição do comprimento do arco  $\widehat{AP}$  o número

$$\lim_{|\mathbb{P}| \rightarrow 0} l(\mathbb{P}) = \sup\{l(\mathbb{P})\}$$

O número  $\pi$  é definido como o comprimento do ângulo raso tomando-se  $P = (-1, 0)$ . Desta forma a cada ponto  $P = (x, y)$  com  $y \geq 0$  fica associado um número  $\theta \in [0, \pi]$ . Ao ponto  $\overline{P} = (x, -y)$  associamos o número  $-\theta \in ]-\pi, 0]$ . Inversamente se  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  associamos o ponto do círculo unitário  $P(\theta)$  tal que o comprimento do arco  $\widehat{AP}$  seja  $\theta$ . A seguir estendemos esta função para todo número real periodicamente, ou seja  $P : \mathbb{R} \rightarrow C$ ,  $P(\theta + 2\pi) = P(\theta)$ .

DEFINIÇÃO 5.46.

As funções  $\text{sen}$  e  $\text{cos}$  são definidas pela igualdade  $P(\theta) = (\text{sen } \theta, \text{cos } \theta)$



Como  $P(\theta)$  é um ponto da circunferência unitária tem-se a relação fundamental

$$(\cos \theta)^2 + (\text{sen}(\theta))^2 = 1$$

A função  $\text{sen}$  é ímpar,  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$  e  $\cos$  é par,  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ .

Considere um triângulo  $\triangle ABC$  com lados  $a, b, c$  como na figura. Fixemos um sistema de coordenadas tal que o eixo  $x$  passe pelo lado  $AC$  e seja  $\theta = \angle ACB$ . Então,

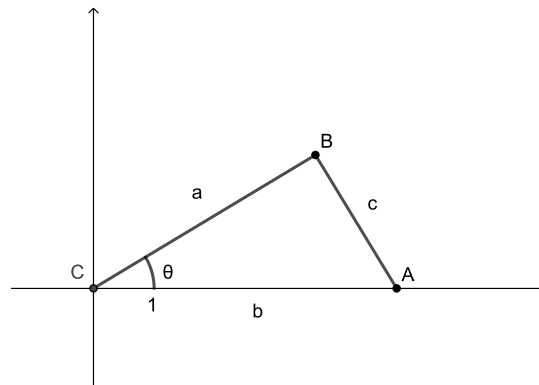
PROPOSIÇÃO 5.47. (*Lei dos Cossenos*)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

DEMONSTRAÇÃO. Nas condições acima  $A = (b, 0), B = (a \cos(\theta), a \text{sen}(\theta))$ . Aplicando a fórmula da distância para os pontos  $A, B$  tem-se que

$$c^2 = (b - a \cos(\theta))^2 + (a \text{sen}(\theta))^2$$

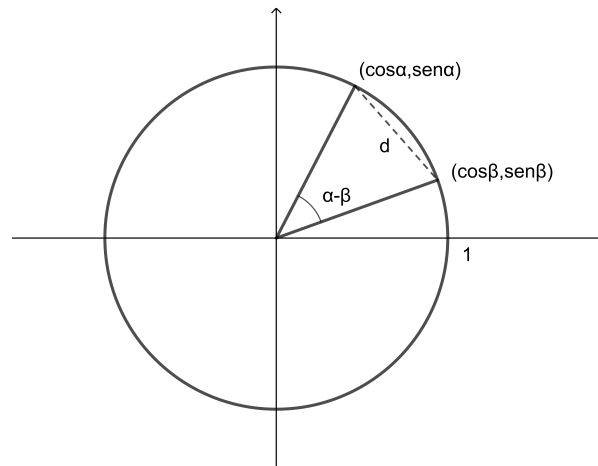
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta) \quad \square$$



PROPOSIÇÃO 5.48. (*Fórmulas de Adição*)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$



DEMONSTRAÇÃO. Faremos a demonstração supondo  $0 < \beta < \alpha < \pi$ . Pela fórmula da distância aplicada aos pontos  $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$  e  $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$  obtem-se

$$d^2 = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2$$

$$d^2 = 2(1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta - (\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta))$$

Aplicando a lei dos cossenos

$$d^2 = 1 + 1 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

Comparando obtém-se a primeira fórmula.

Para a segunda, observe que

$$\cos(\pi/2 - \beta) = \operatorname{sen} \beta$$

como consequência da primeira e também

$$\operatorname{sen}(\pi/2 - \beta) = \cos(\pi/2 - (\pi/2 - \beta)) = \cos \beta$$

Segue que

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos(\pi/2 - (\alpha - \beta)) = \cos(\beta + (\pi/2 - \alpha)) =$$

$$\cos \beta \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) - \operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) =$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

□

Temos também

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha$$

Estas são obtidas das anteriores aplicadas a  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$  e  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - (-\beta))$  e da paridade delas.

Outras funções trigonométricas são definidas a partir do sen e cos. São elas

$$(1) \sec \theta = 1/\cos \theta$$

$$(2) \operatorname{cosec} \theta = 1/\sin \theta$$

$$(3) \operatorname{tg} \theta = \sin \theta / \cos \theta$$

$$(4) \operatorname{cotg} \theta = \cos \theta / \sin \theta$$

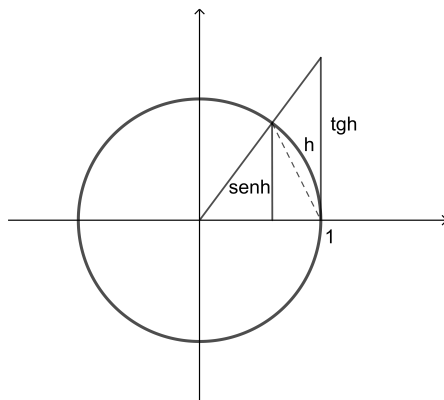
PROPOSIÇÃO 5.49. *As funções sen e cos são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO.  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x \cos h + \sin h \cos x) = \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \cos h + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \sin h$ . Da figura abaixo pode se ver que para  $h > 0$ ,  $0 < \sin h < h$  e para  $h < 0$ ,  $h < \sin h < 0$ . Pelo teorema do confronto  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0$ . Por argumentos semelhantes mostra-se que  $\lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) = 0$ . Da expressão acima conclui-se que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + h) = \sin x$ , portanto a continuidade da função sen em  $x$ . Deixamos para o leitor mostrar a continuidade de cos. □

### 7.1. Limites Fundamentais.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Demonstração: Observe a figura



Se  $h > 0$  então da definição de comprimento de arco e a desigualdade entre os lados de um triângulo pode-se concluir que

$$\sin h < h < \operatorname{tg} h$$

Como  $\sin h > 0$ , dividindo tem-se  $1 < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$ . Assim

$$1 > \frac{\sin h}{h} > \cos h$$

Se  $h < 0$  então  $-h > 0$  pelo que vimos  $1 > \frac{\text{sen}(-h)}{-h} > \cos(-h)$ . Como  $\text{sen}(-h) = -\text{sen } h$  e  $\cos(-h) = \cos h$  obtém-se a mesma desigualdade.

Pelo teorema do confronto concluímos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} = 1$ .

Para a segunda afirmação observe que

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h)^2 - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-(\text{sen } h)^2}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\text{sen } h}{h} \cdot \frac{\text{sen } h}{\cos h + 1}$$

Disto  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ .

PROPOSIÇÃO 5.50.

- (1)  $\text{sen}' x = \cos x$
- (2)  $\cos' x = -\text{sen } x$
- (3)  $\text{tg}' x = \sec^2 x$
- (4)  $\sec' x = \sec x \text{tg } x$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\begin{aligned} \text{sen}' x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x(\cos h - 1) + \cos x \text{sen } h}{h} = \\ &= \text{sen } x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } h}{h} \end{aligned}$$

Pelos limites fundamentais  $\text{sen}' x = \cos x$ .

A derivada do  $\cos$  segue a mesma linha usando a fórmula de adição para esta função. As outras são consequências da derivada do quociente.  $\square$

**7.2. Inversas e suas Derivadas.** As funções trigonométricas sendo periódicas não possuem inversas na totalidade de seus domínios. Vamos escolher intervalos maximais próximos da origem nos quais elas possuem uma inversa. Considere

$$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

Esta é uma função estritamente crescente e inversível. Seja  $\arcsen : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  sua inversa.

$$\text{sen}(\arcsen x) = x$$

Pela regra da cadeia supondo  $\arcsen$  derivável,

$$\text{sen}'(\arcsen x) \arcsen' x = 1$$

$$\cos(\arcsen x) \arcsen' x = 1$$

Substituindo  $\theta = \arcsen x$  na relação fundamental

$$(\cos \theta)^2 + (\sen(\theta))^2 = 1$$

obtem-se

$$(\cos(\arcsen x))^2 + (\sen(\arcsen x))^2 = 1$$

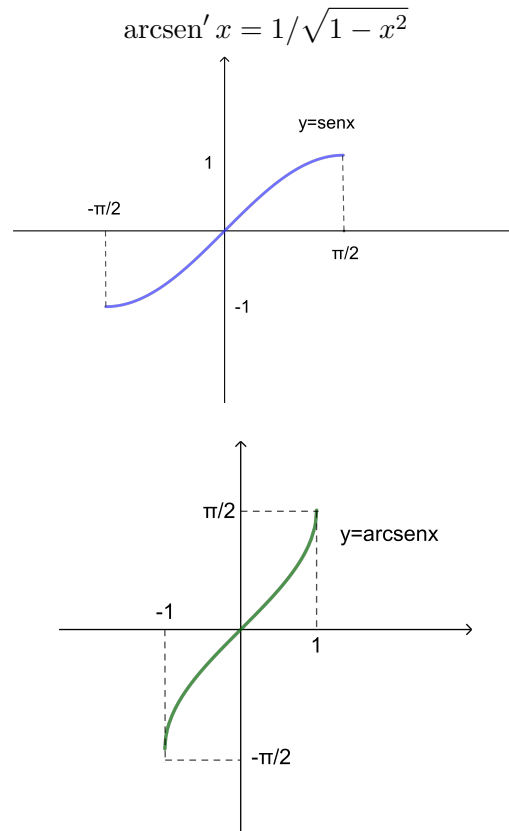
$$(\cos(\arcsen x))^2 + x^2 = 1$$

$$(\cos(\arcsen x))^2 = 1 - x^2$$

desde que  $\cos$  é positivo no intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$

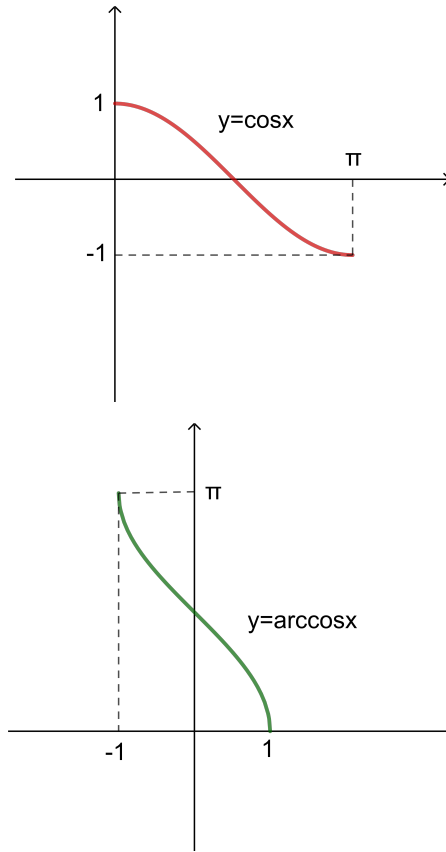
$$(\cos(\arcsen x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Finalmente obtém-se



Para a função  $\cos$  escolhemos o intervalo  $[0, \pi]$ . A função  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  é estritamente decrescente. Supondo sua inversa  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  derivável, seguindo os mesmos passos obtemos

$$\arccos' x = -1/\sqrt{1 - x^2}$$

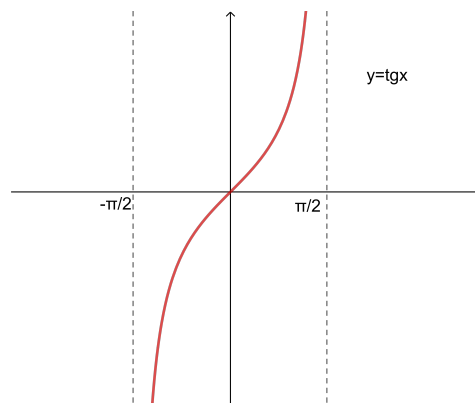


Dividindo a relação fundamental por  $(\cos x)^2$

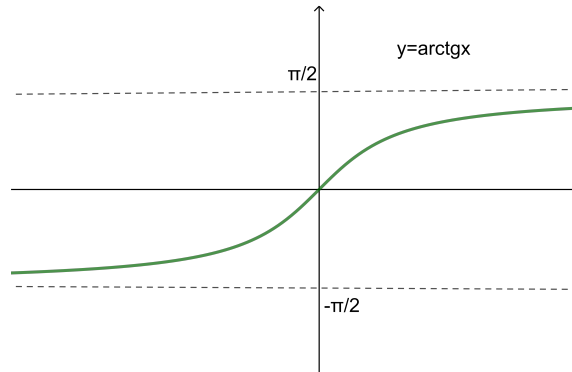
$$1 + (\operatorname{tg} x)^2 = (\sec x)^2$$

$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow ] -\pi, \pi[$  é a inversa da tangente  $\operatorname{tg} : ] -\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ . Neste caso tem-se

$$\operatorname{arctg}' x = 1/(1 + x^2)$$







### 8. Funções trigonométricas hiperbólicas

A funções trigonométricas hiperbólicas são definidas seguindo os mesmos passos das funções trigonométricas usuais (Trigonometria Elíptica). Começamos substituindo o círculo trigonométrico  $x^2 + y^2 = 1$  pelo ramo da hipérbole unitária  $x^2 - y^2 = 1$   $x > 0$  e definimos  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  projetando um ponto da hipérbole sobre os eixos. Mas é necessário fazer algumas mudanças significativas como veremos abaixo.

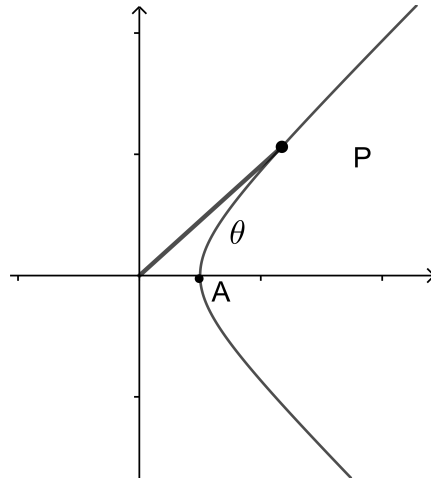
DEFINIÇÃO 5.51. A *Distância Hiperbólica* entre os pontos  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  é dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|}$$

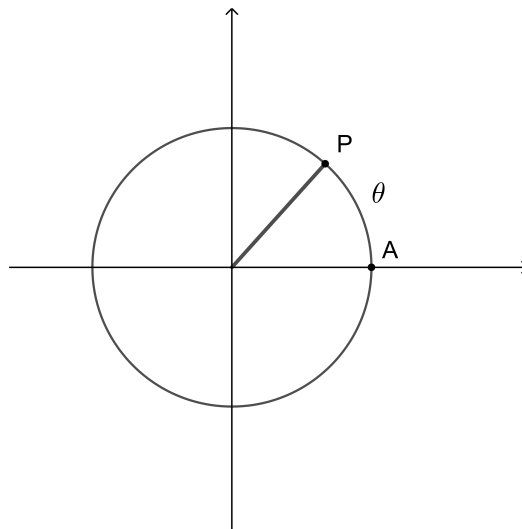
Em particular a distância da origem um ponto  $P = (x, y)$  é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

A hipérbole trigonométrica é o ramo da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  com  $x > 0$ . Seja  $A = (1, 0)$  e  $P$  um ponto desta hipérbole que supomos inicialmente no primeiro quadrante como na figura abaixo. Como foi feito para a circunferência unitária definimos o comprimento do arco  $\widehat{AP}$  como limite do comprimento das poligonais inscritas mas usando a *distância hiperbólica*! Aqui aparece uma diferença dástrica com o caso clássico. O comprimento das poligonais inscritas decrescem com o número de vértices do polígono. Justificaremos esta afirmação mais adiante. Caso o ponto  $P$  esteja no quarto quadrante associamos o correpondente  $\theta$  negativo. Desta forma para cada número real  $\theta$  fica associado um único ponto  $P(\theta)$  da hipérbole.

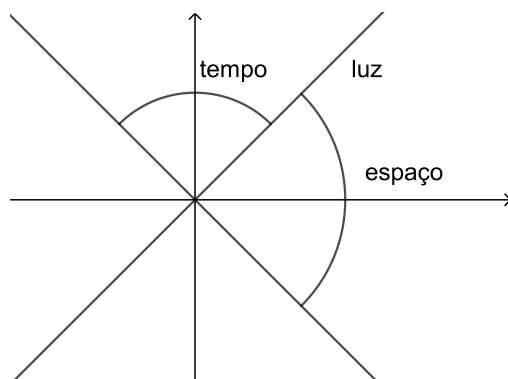


Compare com o caso tradicional.



DEFINIÇÃO 5.52. Um ponto  $P = (x, y)$  diz-se

- (1) do tipo espaço se  $x^2 - y^2 > 0$
- (2) do tipo luz se  $x^2 - y^2 = 0$
- (3) do tipo tempo se  $x^2 - y^2 < 0$

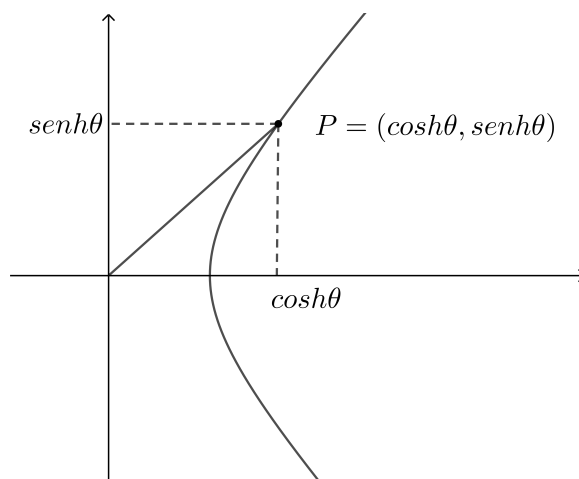


Seja  $P = (x, y)$  um ponto da hipérbole trigonométrica  $x^2 - y^2 = 1$  e  $\theta$  o comprimento do arco  $\widehat{AP}$ . Definimos cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico de  $\theta$  como sendo as funções  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  dadas por

$$P(\theta) = (\cosh \theta, \sinh \theta)$$

Portanto tem-se (Relação Fundamental)

$$(\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2 = 1$$



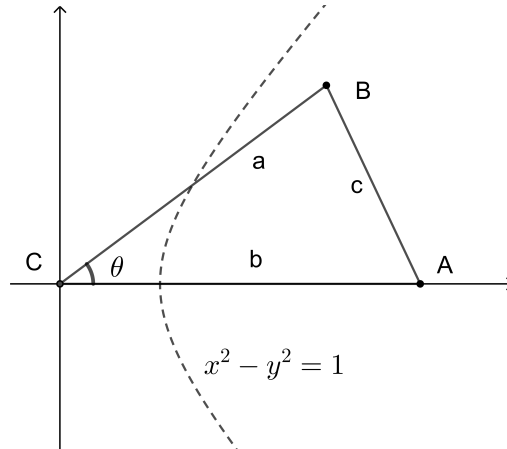
Segue destas definições que

$$\cosh(-\theta) = \cosh \theta$$

$$\sinh(-\theta) = -\sinh \theta$$

$$\cosh(\theta) \geq 1$$

Considere um triângulo como na figura abaixo.



Então vale

PROPOSIÇÃO 5.53. (*Lei do Cosseno*)

$$c^2 = |a^2 + b^2 - 2ab \cosh \theta|$$

DEMONSTRAÇÃO. Observe que  $A = (b, 0)$  e  $B = (a \cosh \theta, a \sinh \theta)$ . Aplicando a fórmula da distância hiperbólica obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= d(A, B) = |(a \cosh \theta - b)^2 - (a \sinh \theta)^2| = \\ &|a^2((\cosh \theta)^2 - (\sinh \theta)^2) + b^2 - 2ab \cosh \theta| = \\ &c^2 = |a^2 + b^2 - 2ab \cosh \theta| \end{aligned}$$

□

Em particular se tomarmos  $a = 1$  e  $b = 1$  então

$$c^2 = |2 - 2 \cosh \theta| = 2(\cosh \theta - 1)$$

Como

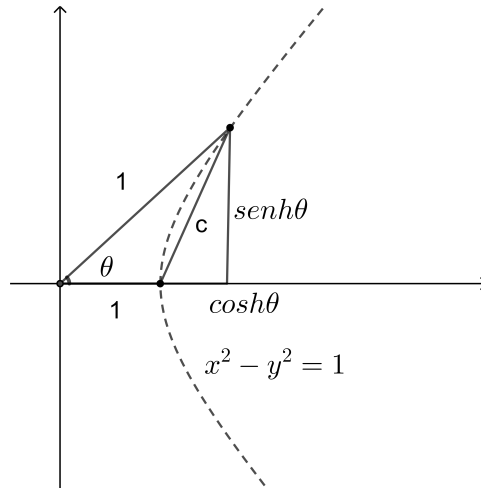
$$(\sinh \theta)^2 = (\cosh \theta)^2 - 1 = (\cosh \theta - 1)(\cosh \theta + 1) \geq 2(\cosh \theta - 1) = c^2$$

Segue que

$$\sinh \theta \geq c$$

Como veremos mais adiante a corda  $c$  é maior que o arco  $\theta$  então

$$\sinh \theta \geq c \geq \theta$$



OBSERVAÇÃO 5.54. O módulo na expressão da lei dos cossenos é importante pois o segmento  $\overline{AB}$  pode ser do tipo espaço, luz ou tempo de acordo com o valor da expressão  $a^2 + b^2 - 2ab \cosh \theta$  que pode ser positivo, negativo ou zero. Como podemos ver: fixemos o valor de  $a$  e consideremos a equação de segundo grau

$$b^2 - (2a \cosh \theta)b + a^2 = 0$$

As duas raízes são reais:

$$b = a \cosh \theta \pm a \sqrt{(\cosh \theta)^2 - 1}$$

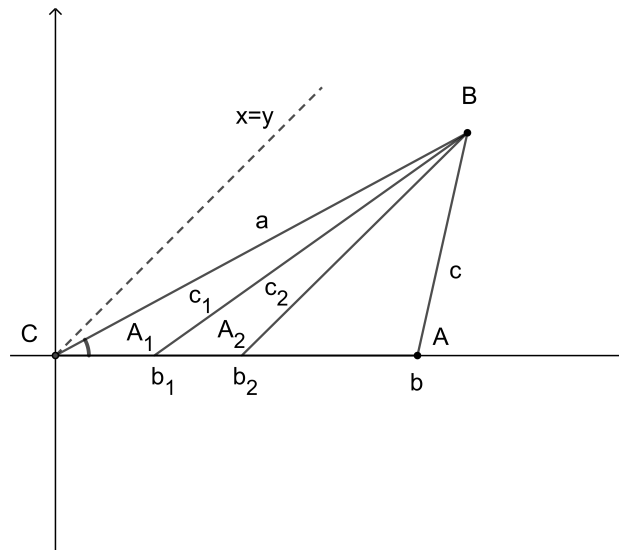
$$b = a(\cosh \theta \pm |\sinh \theta|)$$

Para estes valores de  $b$  o segmento  $\overline{AB}$  é do tipo luz.

Se  $\cosh \theta - |\sinh \theta| < b < \cosh \theta + |\sinh \theta|$   $\overline{AB}$  é do tipo tempo. Para os outros valores ele será do tipo espaço.

Observe que a expressão da lei dos cossenos é a mesma na geometria euclidiana mas o discriminante  $(\cos \theta)^2 - 1$  é negativo e portanto  $a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$  sempre é positiva.

Na figura abaixo  $c_1$  é do tipo espaço,  $c_2$  é do tipo luz e  $c$  é do tipo tempo. O segmento  $\overline{A_2B}$  é paralelo à reta  $x = y$ .



PROPOSIÇÃO 5.55. (*Fórmulas de Adição*)

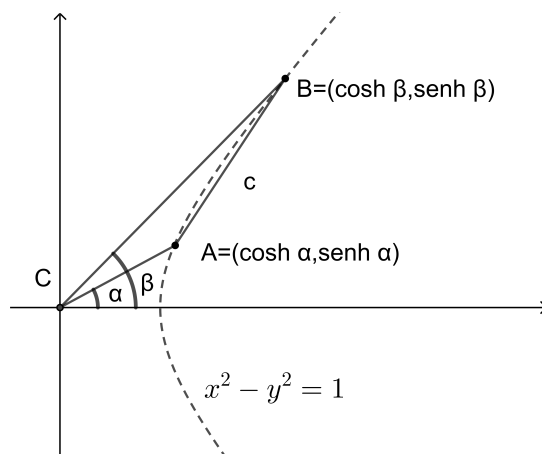
$$\cosh(\beta - \alpha) = \cosh \beta \cosh \alpha - \sinh \beta \sinh \alpha$$

$$\cosh(\beta + \alpha) = \cosh \beta \cosh \alpha + \sinh \beta \sinh \alpha$$

$$\sinh(\beta - \alpha) = \sinh \beta \cosh \alpha - \sinh \alpha \cosh \beta$$

$$\sinh(\beta + \alpha) = \sinh \beta \cosh \alpha + \sinh \alpha \cosh \beta$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . Considere o triângulo  $\triangle ABC$  como na figura abaixo.



Aplicando a lei dos cossenos obtemos

$$c^2 = 2 \cosh(\beta - \alpha) - 2$$

Pela fórmula da distância

$$d(A, B)^2 = c^2 = |(\cosh \beta - \cosh \alpha)^2 - (\sinh \beta - \sinh \alpha)^2|$$

Desenvolvendo

$$c^2 = 2(\cosh \beta \cosh \alpha - \sinh \beta \sinh \alpha) - 2$$

Comparando obtemos a primeira fórmula para  $0 \leq \alpha \leq \beta$ . Para os outros valores usamos  $\cosh(-\theta) = \cosh \theta$  e  $\sinh(-\theta) = -\sinh \theta$ . Segunda fórmula segue do fato que  $\cosh(\beta + \alpha) = \cosh(\beta - (-\alpha))$  e das relações acima. Agora

$$\sinh^2(\beta + \alpha) = \cosh^2(\beta + \alpha) - 1 = (\cosh \beta \cosh \alpha + \sinh \beta \sinh \alpha)^2 - 1$$

$$\sinh^2(\beta + \alpha) = \cosh^2 \beta \cosh^2 \alpha + \sinh^2 \beta \sinh^2 \alpha + 2(\cosh \beta \cosh \alpha \sinh \beta \sinh \alpha) - 1$$

$$\sinh^2(\beta - \alpha) = (\sinh^2 + 1)\beta \cosh^2 \alpha + (\cosh^2 - 1)\beta \sinh^2 \alpha + 2(\cosh \beta \cosh \alpha \sinh \beta \sinh \alpha) - 1$$

$$\sinh^2(\beta + \alpha) = \sinh^2 \beta \cosh^2 \alpha + \cosh^2 \beta \sinh^2 \alpha + 1 + 2(\cosh \beta \cosh \alpha \sinh \beta \sinh \alpha) - 1$$

$$\sinh^2(\beta + \alpha) = (\sinh \beta \cosh \alpha + \cosh \beta \sinh \alpha)^2$$

□

Em particular fazendo  $\alpha = \beta = \theta$  obtemos

$$\cosh(2\theta) = \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta$$

Desta relação e da relação fundamental

$$1 = \cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta$$

temos

$$2 \cosh^2 \theta = \cosh(2\theta) + 1$$

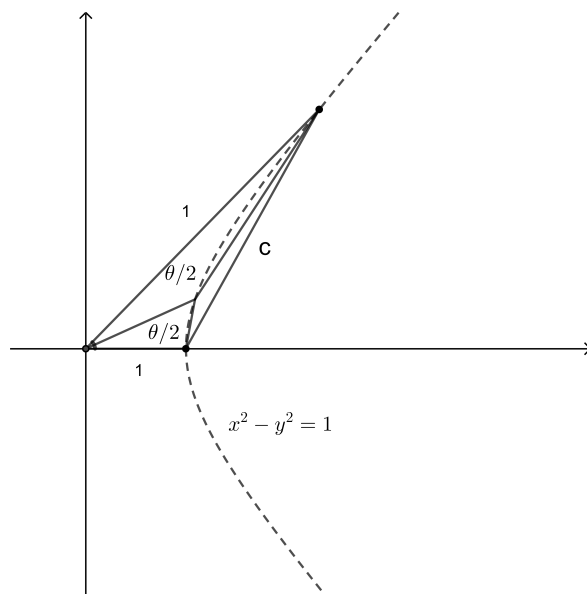
Substituindo  $\theta$  por  $\theta/2$

$$2 \cosh^2(\theta/2) = \cosh(\theta) + 1$$

De forma semelhante

$$2 \sinh^2(\theta/2) = \cosh(\theta) - 1$$

Como prometemos vamos justificar a afirmação de que a corda é maior que o arco. Observe a figura:



O ângulo  $\theta$  determina o arco hiperbólico  $c$ . Dividimos o ângulo na metade. Cada um dos ângulos  $\theta/2$  determinam duas cordas de mesmo comprimento  $c_1$  por semelhança de triângulos. Da lei dos cossenos temos

$$c^2 == 2(\cosh \theta - 1)$$

$$c_1^2 == 2(\cosh(\theta/2) - 1)$$

Da fórmula acima

$$2 \cosh^2(\theta/2) = \cosh(\theta) + 1$$

$$\cosh(\theta) - 1 = 2 \cosh^2(\theta/2) - 2 = 2(\cosh^2(\theta/2) - 1)$$



$$\cosh(\theta) - 1 = 2(\cosh(\theta/2) - 1)(\cosh(\theta/2) + 1) > 4(\cosh(\theta/2) - 1)$$

Portanto

$$c^2 > 4c_1^2$$

$$c > 2c_1$$

A seguir dividimos cada um dos ângulos na metade obtendo uma poligonal com 5 vértices com lados com comprimento  $c_2$  e assim sucessivamente teremos uma sequência

$$c > 2c_1 > 4c_2 > \dots > 2^n c_n \dots$$

cujo limite é o comprimento do arco  $\theta$ . Portanto tem-se

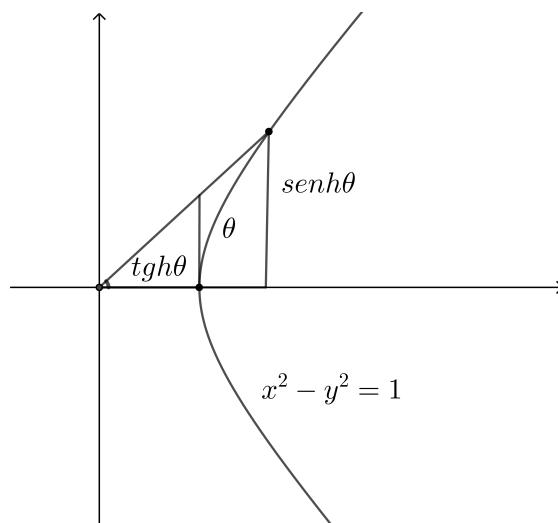
$$\sinh \theta > c > \theta$$

Por um raciocínio análogo utilizando poligonais circunscrita mostra-se que

$$\theta > \operatorname{tgh} \theta$$

Portanto para  $\theta > 0$  temos

$$\operatorname{tgh} \theta < \theta < \sinh \theta$$



PROPOSIÇÃO 5.56. *As funções  $\sinh$ ,  $\cosh$  e  $\operatorname{tgh}$  são contínuas.*

DEMONSTRAÇÃO. Para  $\theta > 0$  vimos que  $\operatorname{tgh} \theta < \theta$ . Como  $\operatorname{tgh}(-\theta) = -\operatorname{tgh} \theta$  então para  $\theta < 0$  temos  $\operatorname{tgh} \theta > \theta$ . Pelo teorema do confronto  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \operatorname{tgh} \theta = 0$ . portanto a tangente hiperbólica

é contínua no 0. Agora como  $\sinh \theta = \cosh \theta \operatorname{tgh} \theta$  então  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sinh \theta = 0$ . Usando o fato que  $\cosh \theta - 1 = (\sinh \theta)^2/2$  concluímos que  $\lim_{\theta \rightarrow 0} (\cosh \theta - 1) = 0$ .

Usando as fórmulas de adição de arco como fizemos para as funções trigonométricas mostra-se que estas funções são contínuas para qualquer valor de  $\theta$ .  $\square$

### 8.1. Limites Fundamentais.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1 \qquad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

DEMONSTRAÇÃO. Vimos que para  $h > 0$  vale

$$\operatorname{tgh} h < h < \sinh h$$

Dividindo por  $\sinh h$

$$1/\cosh h < h/\sinh h < 1$$

$$\cosh h > \sinh h/h > 1$$

Usando o fato que  $\cosh(-h) = \cosh h$  e  $\sinh(-h) = -\sinh h$  mostra-se facilmente que a desigualdade acima vale  $h > 0$ . Pelo teorema do confronto tem-se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h} = 1$$

Para o segundo limite observe que

$$\frac{\cosh h - 1}{h} = \frac{(\cosh h)^2 - 1}{h(\cosh h + 1)} = \frac{(\sinh h)^2}{h(\cosh h + 1)} = \frac{\sinh h}{h} \cdot \frac{\sinh h}{\cosh h + 1}$$

Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} = 0$$

$\square$

Vale observar que os limites fundamentais são as derivadas do  $\cosh$  e do  $\sinh$  na origem.

PROPOSIÇÃO 5.57.

$$(1) \sinh' x = \cosh x$$

$$(2) \cosh' x = \sinh x$$

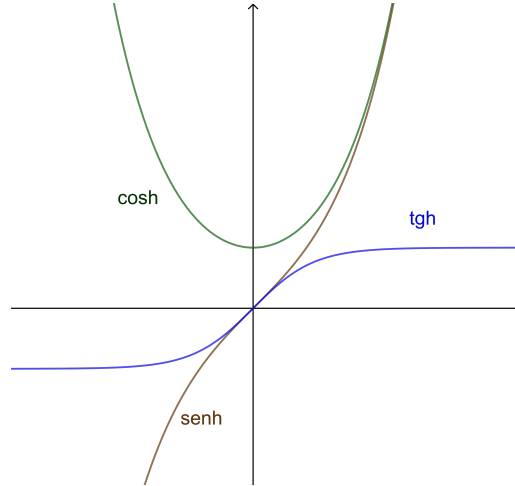
$$(3) \operatorname{tgh}' x = \operatorname{sech}^2 x$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\sinh' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh(x+h) - \sinh x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh x(\cosh h - 1) + \cosh x \sinh h}{h}$$

$$\sinh' x = \sinh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh h - 1}{h} + \cosh x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh h}{h}$$

Pelos limites fundamentais  $\sinh' x = \cosh x$ . As outras afirmações são deixadas como exercício.  $\square$



## 8.2. Fórmulas para Seno e Cosseno Hiperbólico.

Começemos observando que

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x)$$

Se colocarmos

$$E(x) = \cosh x + \sinh x \text{ e } F(x) = \cosh x - \sinh x$$

Então temos

$$E(x)F(x) = 1$$

Agora

$$E(a + b) = \cosh(a + b) + \sinh(a + b)$$

$$E(a + b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b + \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$$

$$E(a + b) = \cosh a(\cosh b + \sinh b) + \sinh a(\cosh b + \sinh b)$$

$$E(a + b) = (\cosh a + \sinh a)(\cosh b + \sinh b)$$

$$E(a + b) = E(a)E(b)$$

Então  $E$  é uma função exponencial.

$$E(x) = e^{kx}$$

Como  $E'(0) = 1$  concluímos que

$$E(x) = e^x$$

Por outro lado, como  $F(x) = 1/E(x)$ , segue que  $F(x) = e^{-x}$ .

$$\cosh x + \sinh x = e^x \text{ e } \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

Resolvendo,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

### 8.3. Para quem conhece um pouco de Números Complexos.

Acabamos de ver que as funções trigonométricas hiperbólicas podem ser definidas através da função exponencial. Muitos autores partem das fórmulas acima para defini-las, sendo esta uma apresentação puramente algébrica. Podemos imediatamente perguntar se as funções trigonométricas tradicionais admitem uma caracterização através de outras funções elementares.

Começemos relacionando o círculo trigonométrico

$$x^2 + y^2 = 1$$

com a hipérbole

$$x^2 - y^2 = 1$$

Se substituirmos  $y$  por  $iy$  onde  $i$  é a unidade imaginária então a equação do círculo transforma-se na equação da hipérbole. Isto leva a considerar as funções  $E, F$  como no caso anterior com a seguinte mudança

$$E(x) = \cos x + i \sin x \text{ e } F(x) = \cos x - i \sin x$$

Então

$$E(x)F(x) = (\cos x)^2 - (i \sin x)^2(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

e temos

$$E(a)E(b) = (\cos a + i \operatorname{sen} a)(\cos b + i \operatorname{sen} b) = (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) + i(\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a)$$

$$E(a)E(b) = \cos(a + b) + i \operatorname{sen}(a + b) = E(a + b)$$

Por outro lado

$$E'(x) = -\operatorname{sen} x - i \cos x = i(\cos x + i \operatorname{sen} x) = iE(x)$$

$$E(0) = 1$$

Segue que

$$E(x) = e^{ix} \text{ e } F(x) = e^{-ix}$$

$$\cos x + \operatorname{sen} x = e^{ix} \text{ e } \cos x - \operatorname{sen} x = e^{-ix}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

## 9. Exercícios

## 9.1. Derivadas.

(1) Calcule  $f'(x)$  sendo:

$$a) f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x)$$

$$e) f(x) = \sqrt[7]{x} + 2\sqrt{x}$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f) f(x) = \sqrt{x}(x-1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2}$$

$$g) f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$d) f(x) = 5(x-1)(x+2)(x^3+1)$$

(2) Verifique se as funções abaixo têm derivadas em 0. Justifique sua resposta.

$$a) f(x) = |x| - x$$

$$b) f(x) = x|x|$$

(3) Encontre as equações das retas tangentes à curva  $y = 2x^2 + 3$  e paralelas à reta  $8x - y + 3 = 0$ .

(4) Encontre as equações das retas que passam pelo ponto  $(3, -2)$  e são tangentes à curva  $y = x^2 - 7$ .

(5) Demonstre analiticamente que não existe reta que passa pelo ponto  $(1, 2)$  e é tangente à curva  $y = 4 - x^2$ .

(6) A **reta normal** ao gráfico de uma função  $y = f(x)$  num ponto  $P$  do mesmo é a reta normal à tangente ao gráfico da função nesse ponto. Determine a reta normal ao gráfico de  $f(x) = \sqrt{x}$  no ponto de abscissa  $x = 4$ .

(7) Considere a função  $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$ .

a) Determine  $f'(x)$  usando a definição de derivada.

b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 2)$ .

c) Determine os pontos do gráfico de  $f$  onde a reta tangente é horizontal.

d) Encontre a reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(2, 2)$ .

- (8) Encontre as equações das retas tangentes à curva  $y = \sqrt{4x-3} - 1$  e perpendiculares à reta  $x + 2y - 11 = 0$ .
- (9) Determine uma reta que tangencie as parábolas  $y = x^2$  e  $y = -x^2 + 8x - 10$ .
- (10) Determine  $a$  e  $b$  para que  $f$  seja derivável, sendo  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & x > 1 \end{cases}$ .
- (11) Mostre que a reta tangente à hipérbole  $y = \frac{1}{x}$  no ponto  $(a, \frac{1}{a})$  intercepta os eixos coordenados nos pontos  $(2a, 0)$  e  $(0, \frac{2}{a})$ .
- (12) Calcule a derivada primeira e a derivada segunda das seguintes funções:
- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| $a) f(x) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ | $b) f(t) = u(t)^2 + v(t)^2$       |
| $c) f(x) = g(g(x))$                       | $d) f(x) = \frac{u(x)^2}{v(x)^2}$ |
- (13) Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$ . Suponha que exista  $m > 0$  tal que  $|f(x)| \leq mx^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- a) Mostre que  $f$  é contínua e derivável em 0.
- b) Existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ ? Se sim, prove. Se não, exiba um contra exemplo.
- (14) Seja  $f$  definida em  $\mathbb{R}$ , derivável em 0 e tal que  $f(0) = 0$ . Prove que existe uma função  $g$  definida em  $\mathbb{R}$ , contínua em 0, tal que  $f(x) = xg(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- (15) Seja  $r$  uma reta tangente aos gráficos de  $f(x) = -x^2$  e  $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$ . Determine  $r$ .
- (16) Encontre a distância entre a parábola  $y = x^2 + 1$  e a reta  $y = x - 1$ .
- (17) Mostre que a reta tangente à parábola  $y = ax^2$  no ponto  $(x_0, y_0)$  intercepta o eixo  $x$  na metade de  $x_0$ .
- (18) Para que valores de  $a$  e  $b$  a parábola  $y = ax^2 + b$  tangencia a reta  $y = x$ .
- (19) Determine  $a \in \mathbb{R}$  para que a reta  $y = ax$  tangencie a exponencial  $y = e^x$ .

- (20) A função  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  não encontra a exponencial  $y = e^x$  para  $n = 1, 2$ . Para  $n \geq 3$  encontra em dois pontos. Determine  $\alpha$  para que  $y = x^\alpha$  tangencie  $y = e^x$ .
- (21) Uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num intervalo  $I$ , chama-se **côncava para cima** quando para quaisquer pontos  $a$  e  $b$  em  $I$ , com  $a < b$ , tem-se

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a} [f(b) - f(a)], \quad \forall x \in [a, b].$$

- a) Dados  $a, b$  em  $I$ , com  $a < b$ , seja  $r$  a reta que passa por  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Escreva a equação da reta  $r$  e interprete geometricamente a desigualdade acima.
- b) Se  $f$  é derivável mostre que a função derivada é crescente. Se além disto  $f$  admite derivada segunda conclua que  $f''(x) \geq 0$ .
- (22) Seja  $f$  uma função derivável no 0 tal que  $f(0) = 0$ . Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (f(x) + f(2x) + f(3x) + \dots + f(nx))$$

## 9.2. Cálculo com Derivadas.

- (1) Se  $xy^3 + xy = 6$  calcule  $\frac{dy}{dx}(3)$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}(3)$ .
- (2) Seja  $y = e^{\alpha x}$ , onde  $\alpha$  é uma raiz da equação  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  (com  $a$  e  $b$  constantes). Mostre que  $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$ .
- (3) Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável até a segunda ordem. Considere  $f(x) = e^x g(3x + 1)$ . Calcule  $f''(0)$ , sabendo-se que  $g(1) = g'(1) = g''(1)$ .
- (4) Determine um polinômio  $p(x)$  de grau 2 tal que  $p(2) = 5$ ,  $p'(2) = 3$  e  $p''(2) = 2$ .
- (5) Considere o polinômio centrado em  $c$  dado por

$$p(x) = a_n(x-c)^n + a_{n-1}(x-c)^{n-1} \dots + a_1(x-c)^1 + a_0$$

$$\text{Mostre que } a_k = \frac{p^{(k)}(c)}{k!}.$$

- (6) Se  $p(x) = x^3 + x^2 + 1$  determine os coeficientes  $a_k$  tais que  $p(x) = a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$ .
- (7) Determine a equação da reta que passa pelo ponto  $(0, 3)$  e que é tangente à circunferência com centro na origem e raio igual a 1.
- (8) Calcule a segunda derivada da função:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

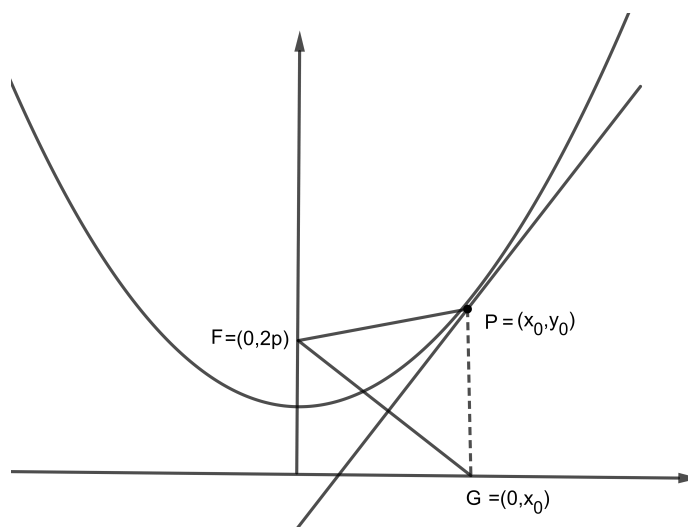
- (9) Considere a parte da curva  $y = \frac{1}{x}$  que fica no primeiro quadrante e desenhe a tangente num ponto arbitrário  $(x_0, y_0)$  dessa curva.

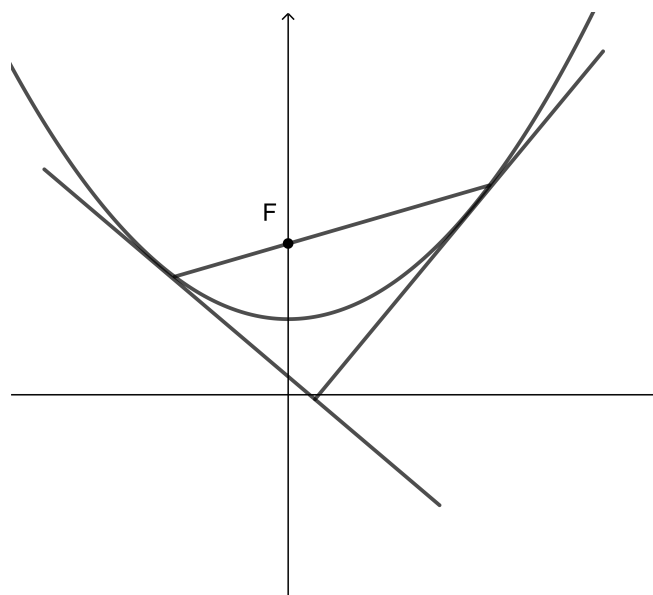
a) Mostre que a porção da reta tangente compreendida entre os eixos tem como ponto médio o ponto de tangência.

b) Ache a área do triângulo formado pelos eixos e pela tangente e verifique que essa área é independente da localização do ponto de tangência.

- (10) Considere a  $y = x^2/4p + p$  a parábola com foco  $F = (0, 2p)$  e diretriz o eixo  $x$ . Seja  $G = (0, x_0)$  um ponto do eixo  $x$  e  $r$  a mediatriz do segmento  $FG$ . Se  $P = (x_0, y_0)$  está sobre  $r$ , como  $d(P, F) = d(P, G)$ , então  $P$  pertence à parábola.

- (a) Mostre que a reta  $r$  tangencia a parábola no ponto  $P$ .  
 (b) (Propriedade de Reflexão das Parábolas) Mostre que um raio de luz partindo do foco e incidindo em  $P$  reflete paralelamente ao eixo  $x$ .  
 (c) Prove que duas tangentes à parábola passando pelas extremidades de uma corda que passa pelo foco são perpendiculares.





### 9.3. Máximos e Mínimos.

(1) *a)* Mostre que  $y = x^2 + a/x$  tem um mínimo, mas não um máximo para qualquer valor da constante  $a$ .

*b)* Determine o ponto de inflexão de  $y = x^2 - 8/x$ .

(2) Encontre  $a$  e  $b$  tais que  $y = a\sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{x}}$  tenha  $(1, 4)$  como um ponto de inflexão.

(3) Mostre que a curva cúbica genérica  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tem um único ponto de inflexão e três formas possíveis, conforme seja  $b^2 > 3ac$ ,  $b^2 = 3ac$  ou  $b^2 < 3ac$ . Esboce essas formas.

(4) Mostre que qualquer polinômio de grau ímpar  $n \geq 3$  tem pelo menos um ponto de inflexão.

(5) Considere a função  $f(x) = x^m(1-x)^n$ , onde  $m$  e  $n$  são inteiros positivos, e mostre que:

*a)* se  $m$  é par,  $f$  tem um mínimo local em  $x = 0$ ;

*b)* se  $n$  é par,  $f$  tem um mínimo local em  $x = 1$ ;

*c)*  $f$  tem um máximo local em  $x = \frac{m}{m+n}$ , independente de  $m$  e  $n$  serem pares ou não.

(6) Encontre o ponto sobre a parábola  $y^2 = 2x$  mais próximo de  $(1, 4)$ .

#### 9.4. Assíntotas.

(1) Verifique se as seguintes funções admitem algum tipo de assíntota e encontre-as.

$$(a) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(b) f(x) = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x - 1}}$$

$$(c) f(x) = \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}$$

$$(d) f(x) = x + \text{arctg } x$$

$$(e) f(x) = 2 + e^{(-x^2)}$$

#### 9.5. Variação de Funções.

(1) Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando os intervalos em que cada função é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize os pontos de inflexão e todos os valores máximos ou mínimos que existirem assim como as assíntotas.

$$a) f(x) = x^4 - x^2$$

$$b) f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$c) f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$d) f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$$

$$e) f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f) f(x) = \frac{x^2}{x - 3}$$

$$g) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9}$$

$$h) f(x) = (x + 1)^{1/3}$$

$$i) f(x) = x\sqrt{3 - x}$$

$$j) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 1 - (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

(2) Esboce o gráfico de uma função  $f(x)$  definida para  $x > 0$  e tendo as propriedades:

$$f(1) = 0 \text{ e } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ (para todo } x > 0 \text{)}.$$

#### 9.6. Funções Inversas.

- (1) Para as funções abaixo, decida em que intervalos elas são inversíveis e esboce, em cada caso, o gráfico de  $f$  e de sua inversa em um mesmo par de eixos.

$$a) f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$b) f(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$c) f(x) = x|x|$$

$$d) f(x) = \frac{|5x - 1|}{2 - x}$$

- (2) Mostre que  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , onde  $ad - bc \neq 0$  é inversível e encontre sua inversa.

O que acontece se  $ad - bc = 0$ ? e se  $c = 0$ ?

- (3) Seja  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função inversível com a propriedade

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

a) Mostre que  $f(1) = 0$  e que  $f(1/a) = -a$

b) Se  $f(2) = 1$  calcule  $f(8)$ ,  $f(\sqrt{2})$  e  $f^{-1}(4)$ .

- (4) Mostre que se  $f$  e  $g$  são inversíveis, então  $f \circ g$  é inversível e  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

### 9.7. Logaritmos e exponenciais.

- (1) Mostre que  $\log_a b = 1/\log_b a$  onde  $a, b$  são positivos.

- (2) calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ .

- (3) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$ .

- (4) calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^n$ .

- (5) (a) Use o TVM para mostrar que

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

onde  $n$  é natural.

- (b) Mostre que a sequência

$$s_n = (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n) - \ln(n)$$

é decrescente e limitada inferiormente. Pelo axioma da completude existe

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n) - \ln(n))$$

$\gamma$  é o número de Euler- Mascheroni. Não se sabe se ele é racional ou irracional.

(6) Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^x = e^a$$

(7) Calcule

(a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ .

(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ .

(8) Esboce os gráficos das seguintes funções, indicando os intervalos em que cada função é crescente, decrescente, côncava para cima e côncava para baixo. Localize os pontos de inflexão e todos os valores máximos ou mínimos que existirem assim como as assíntotas.

(a)  $f(x) = x \ln x$

(b)  $x(\ln x)^2$

(c)  $f(x) = x e^x$

(d)  $f(x) = x^3 e^x$

### 9.8. Funções Trigonométricas.

(1) Mostre que

(a)  $1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \sec^2 \theta$ .

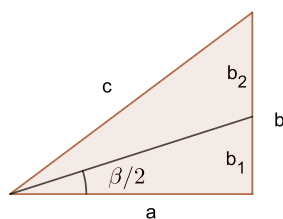
(b)  $\cos^2(\theta/2) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$        $\operatorname{sen}^2(\theta/2) = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ .

(c)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$  e deduza uma fórmula para  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ .

(2) Mostre que

$$\operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} \qquad \operatorname{tg}(\alpha/2) = \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

- (3) Use o fato que a bissetriz do ângulo de um triângulo divide o lado oposto na mesma proporção que os lados adjacentes do ângulo (figura)



$$b_1/a = b_2/c$$

para dar uma demonstração geométrica da fórmula

$$\operatorname{tg}(\beta/2) = \frac{\operatorname{sen} \beta}{1 + \cos \beta}$$

- (4) Por um argumento geométrico prove que

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| \leq |x - c| \quad \text{e} \quad |\cos x - \cos c| \leq |x - c|$$

- (5) Conclua do exercício anterior que as funções  $\operatorname{sen}$ ,  $\cos$  são contínuas.  
 (6) Sejam  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis com as propriedades

$$\begin{aligned} s' &= c & \text{e} & & c' &= -s \\ s(0) &= 0 & \text{e} & & c(0) &= 1 \end{aligned}$$

Se

$$f(x) = (s(x) - \operatorname{sen} x)^2 + (c(x) - \cos x)^2$$

Mostre que  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  e conclua disto que  $s(x) = \operatorname{sen} x$  e  $c(x) = \cos x$ .

Este exercício mostra que as propriedades acima caracterizam as funções  $\operatorname{sen}$  e  $\cos$ .

- (7) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Use L'Hospital para mostrar que  $f$  é derivável e que  $f'(0) = 0$ .

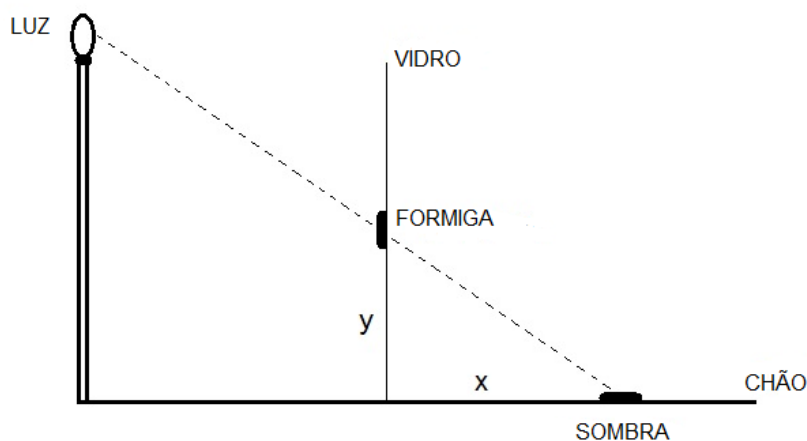
(8) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

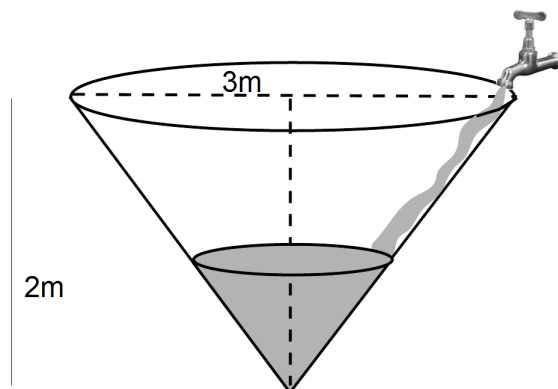
Mostre que  $f$  é derivável e calcule  $f'(0)$ .

### 9.9. Aplicações.

- (1) Uma bolinha de naftalina perde sua massa numa taxa que é proporcional à sua área. Se depois de um mês ela perdeu a metade de sua massa, depois de quanto tempo desaparecerá?
- (2) Um avião, voando horizontalmente com uma velocidade constante  $v$  e a uma altura  $h$ , deixa cair um objeto. Desprezando-se a resistência do ar, determinar o tempo de queda e o local onde caiu, tomando-se como referência o ponto no solo sob o ponto de lançamento.
- (3) Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume da areia cresce a uma taxa de  $10m^3/h$ , a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de  $4m$ ?
- (4) Uma formiga sobe uma parede de vidro com velocidade constante  $V$ . Determine a velocidade da sombra no chão (ver figura).



- (5) Entra água num tanque cônico a uma taxa de  $2\text{litros}/\text{min}$ . Determine a variação instantânea da altura em relação ao tempo no instante em que  $h = 1$  (ver figura).



- (6) Em um tanque cônico entra água a uma taxa de  $3\text{litros}/\text{min}$ . Se a altura do tanque é de  $20\text{m}$  e o raio da base é  $10\text{m}$ , qual a velocidade de ascensão da água no instante em que o nível encontra-se na metade da altura?
- (7) Uma rede de água potável ligará uma central de abastecimento situada à margem de um rio de  $500$  metros de largura a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio,  $2000$  metros abaixo da central. O custo da obra através do rio é de  $R\$640,00$  por metro, enquanto, em terra, custa  $R\$312,00$ . Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável?
- (8) Um certo cartaz deverá ter  $600\text{cm}^2$  para a mensagem impressa; deve ter  $7,5\text{cm}$  de margem no topo e na base e uma margem de  $5\text{cm}$  em cada lado. Determine as dimensões totais do cartaz para que a quantidade de papel usada seja mínima.
- (9) Um arame deve ser cortado em duas partes, uma delas será dobrada em forma de quadrado e a outra em forma circular. Determine como cortar o arame de forma que a soma das áreas delimitadas seja mínima.
- (10) Mostre que o quadrado tem a maior área dentre todos os retângulos inscritos numa dada circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ .
- (11) Um homem num barco que dista  $9\text{km}$  da praia deve chegar a um ponto que dista  $15\text{km}$  do local da praia mais próximo ao seu barco. Sabendo que sua velocidade na água é



4km/h e na terra é 5km/h, determine o caminho a ser feito por ele para que gaste menor tempo.

- (12) Retirando-se quadrados iguais dos cantos de uma folha quadrada de metal e unindo as bordas podemos fazer uma caixa. Se a folha de metal tem 1,20 metros de lado, encontre as dimensões da caixa de modo a obter o maior volume possível.
- (13) Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4, se os lados do retângulo estiverem apoiados sobre os catetos.

## CAPÍTULO 6

# Integral

A noção de integral é de algum modo inversa da derivada. Enquanto esta parte do global para o local aquela integra o local para obter o global. Para ilustrar esta idéia tomemos a cinemática. Se conhecemos o movimento a derivada nos dá a velocidade que é um conceito local. Se conhecemos a velocidade a integral nos dá a totalidade do movimento. Neste capítulo definimos integral de Riemann e descreveremos várias de suas propriedades e aplicações.

### 1. A noção de Integral

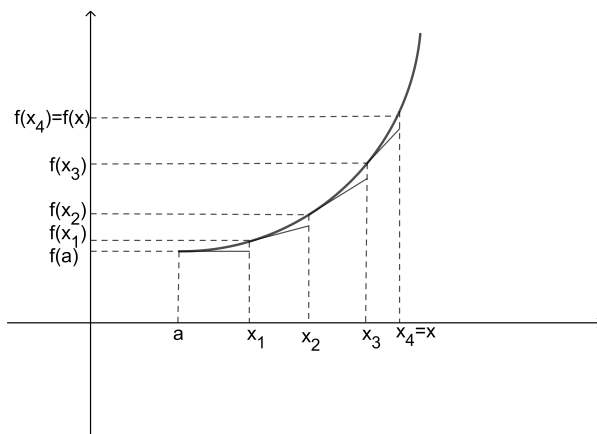
Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . A derivada de  $f$  em  $x_1$  é o número

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Assim se  $x_2 - x_1 \approx 0$   $f(x_2) - f(x_1) \approx f'(x_1)(x_2 - x_1)$ .

Considere uma seqüência  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = x$  tal que  $x_i - x_{i-1} \approx 0$ . Então para  $i = 1, 2, \dots, n$   $f(x_i) - f(x_{i-1}) \approx f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ . Somando-se todas estas parcelas obtém-se

$$f(x) \approx f(a) + \sum_{i=1}^n f'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$



Pode-se imaginar que escolhendo-se os intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  cada vez menores obtemos uma melhor aproximação e no limite chega-se ao valor exato de  $f(x)$ . Por este processo conhecida a derivada recuperamos a função  $f$ .

A definição precisa de integral justifica de certo modo a idéia acima.

DEFINIÇÃO 6.1. *Uma Partição do intervalo  $[a, b]$  é uma seqüência*

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

*Escreveremos também*

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$

*Seja  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  o comprimento do  $i$ -ésimo intervalo. O Módulo da partição é o número*

$$|P| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

*Uma Escolha para uma partição  $P$  é outra seqüência de pontos  $e = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n)$  onde  $x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$ .*

Considere agora  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada e defina

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

DEFINIÇÃO 6.2. *A Soma Superior para  $f$  relativa à partição  $P$  é*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

*A Soma Inferior para  $f$  relativa à partição  $P$  é*

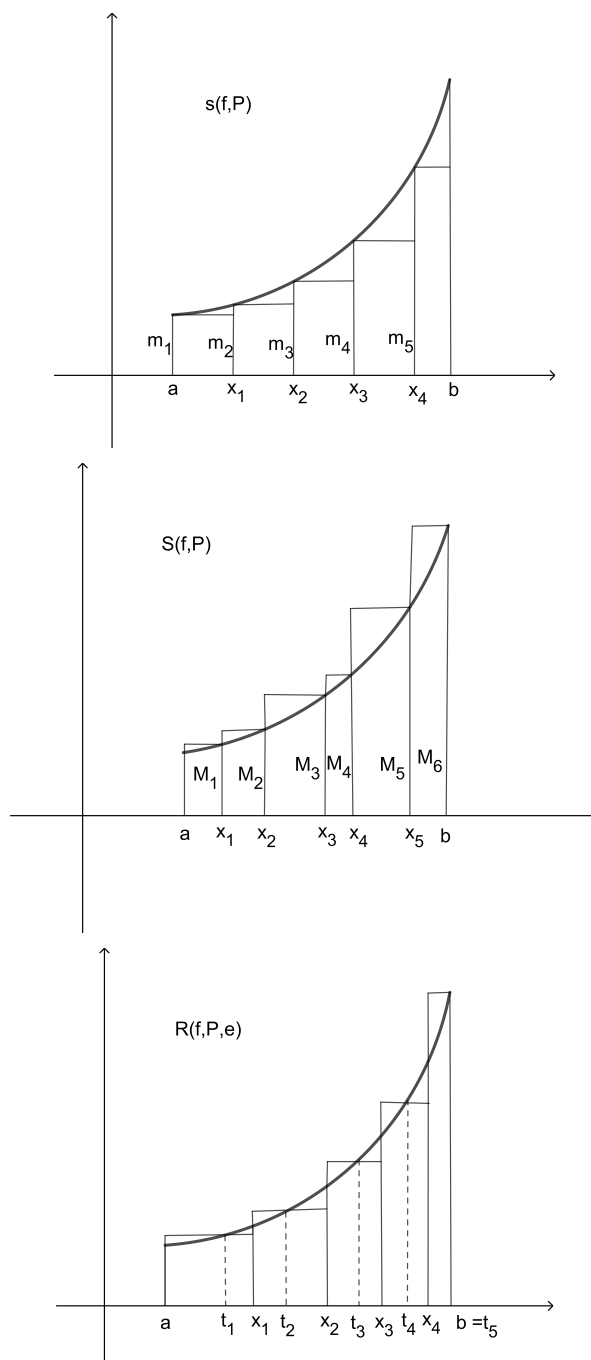
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

*A Soma de Riemann para  $f$  relativa à partição  $P$  e a escolha  $e$  é*

$$R(f, P, e) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

Para  $x_{i-1} \leq t \leq x_i$  tem-se que  $m_i \leq f(t) \leq M_i$  e portanto

$$s(f, P) \leq R(f, P, e) \leq S(f, P)$$



Diz-se que uma partição  $Q$  refina  $P$  se  $P \subset Q$ . O exemplo mais simples de refinamento é quando  $Q$  é obtida de  $P$  acrescentando um ponto  $u$ , digamos no  $i$ -ésimo intervalo.

$$Q : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < u < x_i < \dots < x_n = b$$

Seja

$$\overline{M}_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq u\}$$

$$\overline{\overline{M}}_i = \sup\{f(x) : u \leq x \leq x_i\}$$

Então  $\overline{M}_i \leq M_i$  e  $\overline{\overline{M}}_i \leq M_i$  e

$$\overline{M}_i(u - x_{i-1}) + \overline{\overline{M}}_i(x_i - u) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

Assim

$$S(f, Q) \leq S(f, P)$$

De maneira semelhante mostramos que

$$s(f, Q) \geq s(f, P)$$

PROPOSIÇÃO 6.3.

Se  $Q$  é um refinamento de  $P$  então

$$S(f, Q) \leq S(f, P) \text{ e } s(f, Q) \geq s(f, P)$$

DEMONSTRAÇÃO. Partindo de  $P$  acrescentamos um ponto de  $Q$  e obtemos as desigualdades acima. Repetimos o processo até completarmos a partição  $Q$ .  $\square$

Claramente  $s(f, P) \leq S(f, P)$ . Por outro lado reunião  $P \cup Q$  é um refinamento de  $P$  e de  $Q$ . Segue que

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q)$$

Seja

$$s(f) = \{s(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

$$S(f) = \{S(f, P) : P \text{ é partição de } [a, b]\}$$

$s(f)$  é limitado superiormente por  $S(f, P)$  e  $S(f)$  é limitado inferiormente por  $s(f, P)$  qualquer que seja  $P$ .

DEFINIÇÃO 6.4. A Integral Superior e a Integral Inferior de  $f$  são definidas por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf S(f) \text{ e } \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup s(f)$$

PROPOSIÇÃO 6.5.

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

DEMONSTRAÇÃO. Qualquer que seja partição  $P$ ,  $S(f, P)$  é um majorante do conjunto  $(f)$ . Como o sup é o menor majorante tem-se que  $\int_a^b f(x)dx \leq S(f, P)$ . Logo  $\int_a^b f(x)dx$  é um minorante do conjunto  $S(f)$ . Pelo mesmo argumento obtem-se que  $\int_a^b f(x)dx \leq \overline{\int_a^b f(x)dx}$ .  $\square$

DEFINIÇÃO 6.6. Diz-se que uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

Se este for o caso a Integral de  $f$  é dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$$

O exemplo clássico de uma função não integrável é o seguinte,

EXEMPLO 6.7. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $a < b$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 2 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Como  $m_i = 1$  e  $M_i = 2$  para qualquer  $i$  e qualquer partição então

$$s(f) = \{b - a\} \text{ e } S(f) = \{2(b - a)\}$$

$$\int_a^b f(x)dx = b - a \text{ e } \overline{\int_a^b f(x)dx} = 2(b - a)$$

Por outro lado o exemplo mais simples funções integráveis são as constantes.

EXEMPLO 6.8. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = k$ . Neste caso  $s(f) = S(f) = \{k(b - a)\}$  e  $\int_a^b f(x)dx = k(b - a)$

DEFINIÇÃO 6.9. Diz-se que  $L$  é o limite de  $S(f, P)$  quando  $|P|$  tende a zero se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|P| < \delta$  então  $|S(f, P) - L| < \epsilon$ . Ecreveremos,

$$\lim_{P \rightarrow 0} s(f, P) = L$$

De modo semelhante define-se para as somas inferiores

$$\lim_{P \rightarrow 0} S(f, P) = L$$

Se considerarmos a inclusão como uma relação de ordem entre partições então as somas inferiores é uma função crescente da partição e as somas superiores decrescente, isto é

$$P \subset Q \Rightarrow s(f, P) \leq s(f, Q)$$

$$P \subset Q \Rightarrow S(f, Q) \leq S(f, P)$$

Vimos num capítulo anterior que uma sequência crescente e limitada converge para o sup da sequência enquanto uma decrescente converge para o inf. É de se esperar que o limite das somas inferiores também converge para o sup das somas inferiores que por definição é a integral inferior de  $f$  e o limite das somas superiores converge para o inf. A demonstração deste fato é mais delicada pois a ordem de inclusão não é uma ordem total como veremos a seguir.

PROPOSIÇÃO 6.10.

$$\lim_{P \rightarrow 0} S(f, P) = L = \inf S(f)$$

DEMONSTRAÇÃO. Inicialmente observe que se  $\lim_{P \rightarrow 0} S(f, P) = L$  então  $S(f, P) \geq L$  para toda partição  $P$ . Caso contrário existe uma partição  $P_0$  tal que  $L > S(f, P_0)$ . Seja  $\epsilon = L - S(f, P_0)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  podemos encontrar um refinamento  $P_n$  de  $P_0$  com  $|P_n| < (b-a)/n$  e como  $P_0 \subset P_n$  vem que  $S(f, P_0) \geq S(f, P_n)$  e portanto  $L - S(f, P_n) \geq \epsilon$ , ou seja não existe  $\delta$  para este  $\epsilon$ . Portanto  $L$  é um minorante do conjunto  $S(f)$ . Seja  $L = \inf S(f)$ . Dado  $\epsilon > 0$  existe uma partição  $P_0 \in S(f)$  tal que  $L \leq S(f, P_0) < L + \epsilon$ . Se  $P$  é um refinamento de  $P_0$  então  $|P| \leq |P_0|$ ,  $L \leq S(f, P) \leq S(f, P_0) < L + \epsilon$  ou seja  $|L - S(f, P)| \leq \epsilon$  e poderíamos tomar  $\delta = |P_0|$ . A dificuldade está para aquelas partições que não refinam  $P_0$ . Começemos supondo  $f$  uma função positiva e seja  $M$  um majorante de  $f$ . Seja  $P_0 : u_0 < u_1 < \dots < u_n$ ,  $S(f, P_0) = \sum_{j=1}^n \overline{M}_j \Delta u_j$  e considere por um momento uma outra partição  $P : x_0 < x_1 < \dots < x_r$ ,  $S(f, P) = \sum_{i=1}^r M_i \Delta x_i$  com  $|P| < \delta < |P_0|$ .

Alguns dos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  estão contidos em alguns dos intervalos  $[u_{j-1}, u_j]$ . Para estes  $m_i \leq \overline{m}_j$ .

Para cada  $[u_{j-1}, u_j]$  seja  $I_j = \{i : [x_{i-1}, x_i] \subset [u_{j-1}, u_j]\}$ .

Então  $\sum_{i \in I_j} \Delta x_i \leq \Delta u_j$  e como  $\delta < |P_0|$ , cada  $u_j$  pertence a exatamente um intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

onde  $i \notin \bigcup I_j$ .

Segue que

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^r M_i \Delta x_i = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i \in I_j} M_i \Delta x_i \right) + \sum_{i \notin \bigcup I_j} M_i \Delta x_i \leq \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i \in I_j} \overline{M}_j \Delta x_i \right) + \sum_{i \notin \bigcup I_j} M_i \Delta x_i \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \overline{M}_j \left( \sum_{i \in I_j} \Delta x_i \right) + \sum_{i \notin I_j} M_i \Delta x_i &\leq \\ \sum_{j=1}^n \overline{M}_j \Delta u_j + \sum_{i \notin I_j} M_i \Delta x_i &\leq \\ S(f, P_0) + M \cdot n \cdot \delta & \end{aligned}$$

Assim se  $\epsilon > 0$  podemos escolher uma partição  $P_0$  tal que  $L < S(f, P_0) < L + \epsilon/2$  e  $\delta < \epsilon/2Mn$ . Se  $|P| < \delta$  da desigualdade acima vem que  $L \leq S(f, P) \leq L + \epsilon$ , ou seja  $|S(f, P) - L| \leq \epsilon$ , isto é  $\lim_{P \rightarrow 0} S(f, P) = L = \inf S(f)$ .

Se  $f$  não é positiva escolha uma constante  $k$  tal que  $g(x) = f(x) + k$  seja positiva. Temos  $\lim_{P \rightarrow 0} S(g, P) = \inf S(g)$ . Mas  $S(g, P) = S(f, P) + k(b - a)$  e  $\inf S(g) = \inf S(f) + k(b - a)$  e portanto  $\lim_{P \rightarrow 0} S(f, P) = \inf S(f)$ .  $\square$

COROLÁRIO 6.11.

$$\lim_{P \rightarrow 0} s(f, P) = l = \sup s(f)$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar a proposição anterior para a função  $g(x) = -f(x)$  lembrando que  $S(g, P) = -s(f, P)$  e que  $\inf S(g) = -\sup s(f)$ .  $\square$

Vários livros de cálculo definem a integral usando as somas de Riemann. A seguir vejamos como isto é feito.

DEFINIÇÃO 6.12. Um número  $I$  diz-se o limite de  $R(f, P, e)$  quando o módulo da partição tende a zero,  $|P| \rightarrow 0$  se para qualquer  $\epsilon > 0$  pode-se encontrar um  $\delta > 0$  tal que para toda partição  $P$  com  $|P| < \delta$  e toda escolha  $e$  tem-se que  $|R(f, P, e) - I| < \epsilon$ . Neste caso escreve-se

$$\lim_{P \rightarrow 0} R(f, P, e) = I$$

PROPOSIÇÃO 6.13. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada  $f$  é integrável se e somente se

$$\lim_{P \rightarrow 0} R(f, P, e) = \int_a^b f(x) dx$$

DEMONSTRAÇÃO. Se  $f$  é integrável  $\int_a^b f(x) dx = \sup s(f) = \inf S(f) = \int_a^b \overline{f}(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ . Como  $s(f, P) \leq R(f, P, e) \leq S(f, P)$  tomando-se o limite concluímos que  $\lim_{P \rightarrow 0} R(f, P, e) = \int_a^b f(x) dx$ . Deixamos de fazer a recíproca.  $\square$



## 2. Condições de Integrabilidade

A seguinte proposição apesar de ser uma consequência direta da definição de integral é útil nas aplicações.

PROPOSIÇÃO 6.14. (*Crítério de Cauchy*)

Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada é integrável se e somente se para todo  $\epsilon > 0$  pode-se encontrar uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$  tal que

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

DEMONSTRAÇÃO. Se  $f$  é integrável  $\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b f(x)dx}$ . Dado  $\epsilon > 0$  podemos escolher uma partição  $P_1$  tal que  $\int_a^b f(x)dx - \epsilon/2 < s(f, P_1)$  e uma partição  $P_2$  tal que  $S(f, P_2) < \overline{\int_a^b f(x)dx} + \epsilon/2$ . Se  $P = P_1 \cup P_2$  tem-se que  $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$ . Reciprocamente se para todo  $\epsilon > 0$  pode-se encontrar uma partição  $P$  do intervalo  $[a, b]$  tal que  $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$  como  $s(f, P) < \int_a^b f(x)dx$  e  $\overline{\int_a^b f(x)dx} < S(f, P)$  então  $\overline{\int_a^b f(x)dx} - \int_a^b f(x)dx < S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$  para todo  $\epsilon > 0$  portanto  $\overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx$ .  $\square$

O próximo corolário será usado com frequência na próxima seção

COROLÁRIO 6.15. *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada, Se  $P_n$  é uma sequência de partições do intervalo  $[a, b]$  tal que,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, P_n) - s(f, P_n)) = 0$$

então  $f$  é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n)$$

DEMONSTRAÇÃO.  $\overline{\int_a^b f(x)dx} \leq S(f, P_n)$  e  $\int_a^b f(x)dx \geq s(f, P_n)$  então

$$0 \leq \overline{\int_a^b f(x)dx} - \int_a^b f(x)dx \leq S(f, P_n) - s(f, P_n)$$

Tomando-se o limite vem que

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx$$

Portanto  $f$  é integrável. Agora

$$s(f, P_n) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f, P_n)$$

então

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - s(f, P_n) \leq S(f, P_n) - s(f, P_n)$$

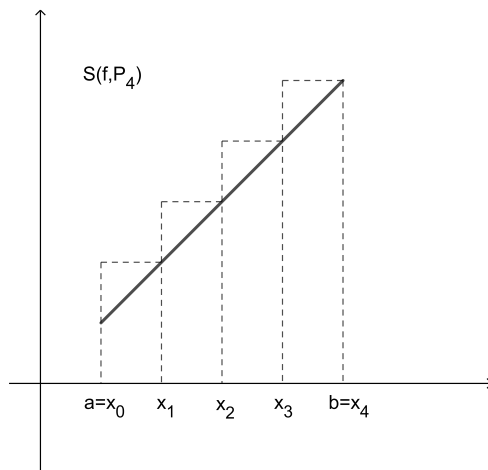
concluimos que  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n)$ . De modo semelhante mostra-se a última igualdade.  $\square$

EXEMPLO 6.16. Mostremos que  $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$ . Considere a partição  $P_n$  do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais.

$$P_n : x_0 = a, x_1 = a + (b - a)/n, \dots, x_i = a + i(b - a)/n, \dots, x_n = a + n(b - a)/n = b$$

Para esta partição tem-se que  $\Delta x_i = (b - a)/n$ ,

$$m_i = x_{i-1} = a + (i - 1)(b - a)/n \text{ e } M_i = x_i = a + i(b - a)/n.$$



$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (a + i(b - a)/n)(b - a)/n$$

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n (a(b - a)/n + i(b - a)^2/n^2)$$

$$S(f, P_n) = (a(b - a) + (b - a)^2/n^2 \sum_{i=1}^n i)$$

Usando a fórmula da progressão aritmética,

$$S(f, P_n) = (a(b - a) + \frac{(b - a)^2 n(n + 1)}{2n^2})$$

Finalmente,

$$S(f, P_n) = (b^2 - a^2)/2 + (b - a)^2/2n$$

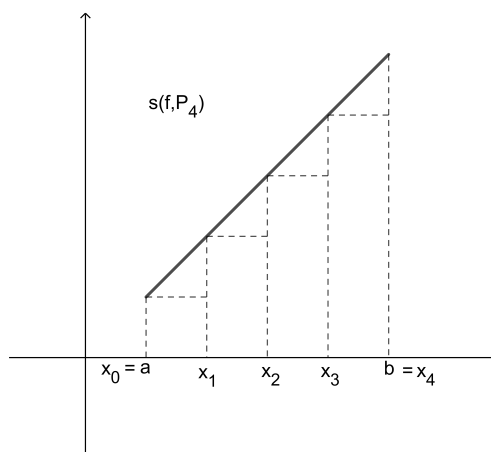
De maneira inteiramente análoga obtém-se

$$s(f, P_n) = (b^2 - a^2)/2 - (b - a)^2/2n$$

Aplicando o corolário anterior chegamos

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Observe que esta é a área do trapézio com base maior  $b$  e base menor  $a$ .



### 3. Classes de Funções Integráveis

Nesta seção discutimos uma ampla variedade de funções integráveis.

TEOREMA 6.17.

Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  crescente (ou decrescente) é integrável.

DEMONSTRAÇÃO. Considere  $f$  crescente. Como  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$   $f$  é limitada. Considere a partição

$$P_n : x_0 = a, x_1 = a + (b - a)/n, \dots, x_i = a + i(b - a)/n, \dots, x_n = a + n(b - a)/n = b$$

Tem-se que  $\Delta x_i = (b - a)/n$ ,  $m_i = f(x_{i-1})$  e  $M_i = f(x_i)$ .

Então

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) (b - a)/n$$

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) (b - a)/n$$

$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = ((b-a)/n) \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

De onde concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S(f, P_n) - s(f, P_n)) = 0$$

e do corolário acima que  $f$  é integrável. De maneira semelhante prova-se que uma função decrescente é integrável.  $\square$

TEOREMA 6.18.

Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua é integrável.

DEMONSTRAÇÃO. Vamos usar o fato que toda função contínua é uniformemente contínua. Isto quer dizer que dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Considere aqui uma partição  $P$  tal que  $|P| < \delta$ . Se

$$M_i = \max\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$m_i = \min\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

então  $M_i - m_i < \epsilon$  e

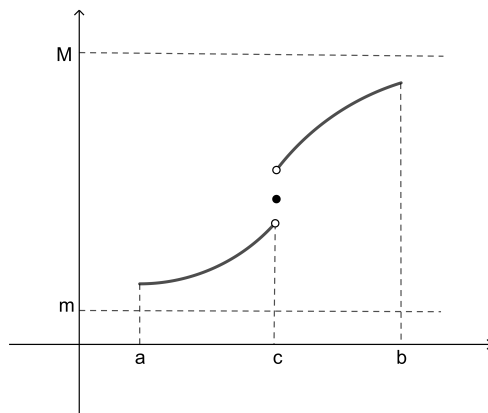
$$S(f, P_n) - s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i <$$

$$\epsilon \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \epsilon(b-a)$$

Portanto  $f$  integrável.  $\square$

PROPOSIÇÃO 6.19.

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada,  $c \in ]a, b[$ ,  $f$  contínua em  $[a, c[ \cup ]c, b]$  então  $f$  é integrável.



DEMONSTRAÇÃO. Como  $f$  é limitada,  $m \leq f(x) \leq M$ . Dado  $\epsilon > 0$ ,  $f$  é contínua em  $[a, c - \epsilon/4(M - m)]$  e portanto integrável. Escolha uma partição  $P_1$  de  $[a, c - \epsilon/4(M - m)]$  tal que  $S(f, P_1) - s(f, P_1) < \epsilon/4$ . De maneira semelhante escolha uma partição  $P_2$  de  $[c + \epsilon/4(M - m), b]$  tal que  $S(f, P_2) - s(f, P_2) < \epsilon/4$ . Seja  $P = P_1 \cup P_2$  partição de  $[a, b]$ . Se  $[c - \epsilon/4(M - m), c + \epsilon/4(M - m)]$  é o  $i$ -ésimo intervalo de  $P$ , então  $(M_i - m_i)\Delta x_i \leq (M - m)\epsilon/2(M - m) = \epsilon/2$ . Assim

$$S(f, P) - s(f, P) \leq S(f, P_1) - s(f, P_1) + S(f, P_2) - s(f, P_2) + \epsilon/2 < \epsilon/4 + \epsilon/4 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Do critério de integrabilidade vem que  $f$  é integrável.  $\square$

DEFINIÇÃO 6.20. Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitada diz-se contínua por partes se existe uma partição  $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$  tal que  $f$  é contínua em cada subintervalo  $]c_{i-1}, c_i[$ .

COROLÁRIO 6.21. Toda função contínua por partes é integrável.

#### 4. Propriedades da Integral

PROPOSIÇÃO 6.22. Se  $c \in ]a, b[$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se e somente se as restrições de  $f$  aos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$  são integráveis e neste caso tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

DEMONSTRAÇÃO. Uma partição  $P$  de  $[a, b]$  que contém o ponto  $c$  dá origem a uma partição  $P_1$  de  $[a, c]$  e uma  $P_2$  de  $[c, b]$  e reciprocamente. Então

$$S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2)$$

$$s(f, P) = s(f, P_1) + s(f, P_2)$$

$$S(f, P) - s(f, P) = (S(f, P_1) - s(f, P_1)) + (S(f, P_2) - s(f, P_2))$$

Como os termos entre parentesis são positivos

$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon \implies (S(f, P_1) - s(f, P_1)) < \epsilon \text{ e } (S(f, P_2) - s(f, P_2)) < \epsilon$$

e inversamente

$$(S(f, P_1) - s(f, P_1)) < \epsilon/2 \text{ e } (S(f, P_2) - s(f, P_2)) < \epsilon/2 \implies S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

Portanto  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se e somente se as restrições de  $f$  aos intervalos  $[a, c]$  e  $[c, b]$  são integráveis.

Por outro lado, como

$$s(f, P_1) \leq \int_a^c f(x)dx \leq S(f, P_1)$$

e

$$s(f, P_2) \leq \int_c^b f(x)dx \leq S(f, P_2)$$

Então

$$s(f, P) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq S(f, P)$$

para toda partição  $P$ . Logo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

□

PROPOSIÇÃO 6.23. *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções integráveis e  $c \in \mathbb{R}$ .*

(1) *A soma  $f + g$  é integrável e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(2)  *$cf$  é integrável e*

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

(3) *Se  $f \geq 0$  então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(4)  *$|f|$  é integrável e*

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

DEMONSTRAÇÃO. Para o primeiro item,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \lim_{P \rightarrow 0} R(f + g, P, e) = \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(t_i) + g(t_i))\Delta x_i = \\ &= \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i + \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(t_i)\Delta x_i = \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

O segundo é semelhante,

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{P \rightarrow 0} R(cf, P, e) = \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n cf(t_i)\Delta x_i =$$

$$c \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = c \int_a^b f(x) dx$$

Se  $f \geq 0$  então  $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \geq 0$ . Pela conservação do sinal,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{P \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \geq 0$$

Finalmente para o último item, da desigualdade triangular tem-se  $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ .

Se

$$\begin{aligned} \bar{m}_i &= \inf\{|f(x)| : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \\ \bar{M}_i &= \sup\{|f(x)| : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \bar{M}_i - \bar{m}_i &= \sup\{||f(x)| - |f(y)|| : x_{i-1} \leq x, y \leq x_i\} \leq \\ &\sup\{|f(x) - f(y)| : x_{i-1} \leq x, y \leq x_i\} = M_i - m_i \\ S(|f|, P) - s(|f|, P) &\leq S(f, P) - s(f, P) \end{aligned}$$

Assim se  $f$  é integrável  $|f|$  é integrável. Como  $|f(x)| \geq f(x) \geq -|f(x)|$  tem-se que

$$\int_a^b |f(x)| dx \geq \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

□

PROPOSIÇÃO 6.24. (*TVMI- Teorema do valor Médio para Integrais*) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua então existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $f$  é contínua pelo teorema de Weierstrass ela assume o valor máximo  $M$  e o valor mínimo  $m$ . Como  $m \leq f(x) \leq M$  segue que

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Então

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Pelo TVI existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

□

OBSERVAÇÃO 6.25. Claramente devemos definir  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Agora se  $a < b < c$  então  $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$ . Portanto  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$ . Assim se convencionarmos que  $\int_c^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$  então a fórmula  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  continua válida. Assim o faremos.

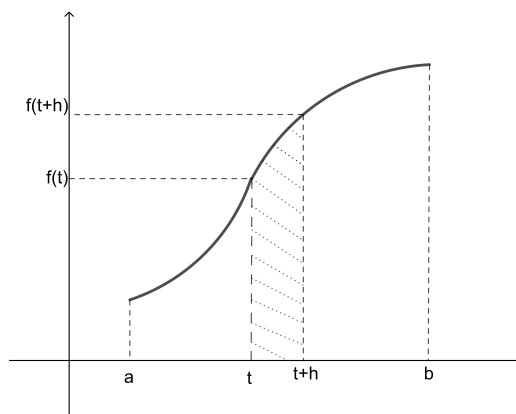
### 5. TFC- Teorema Fundamental do Cálculo

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada e integrável para cada  $t \in [a, b]$  definimos a *Função Fundamental*

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

PROPOSIÇÃO 6.26.

A função fundamental é contínua.



DEMONSTRAÇÃO. Vamos mostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0} F(t+h) = F(t)$  o que é equivalente à  $\lim_{h \rightarrow 0} (F(t+h) - F(t)) = 0$ .

$$F(t+h) - F(t) = \int_t^{t+h} f(x)dx$$

Como  $f$  é limitada então  $m \leq f(x) \leq M$ . Integrando,

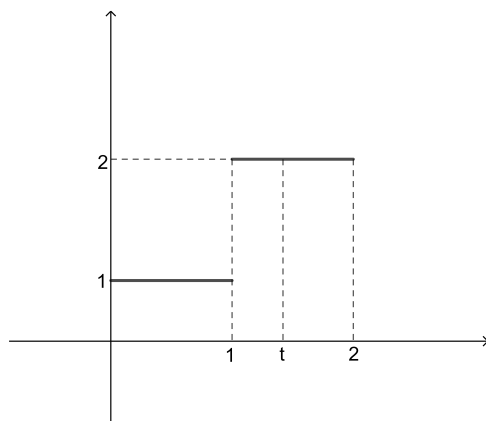
$$mh \leq \int_t^{t+h} f(x)dx \leq Mh$$

Pelo teorema do confronto  $\lim_{h \rightarrow 0} (F(t+h) - F(t)) = 0$ . □



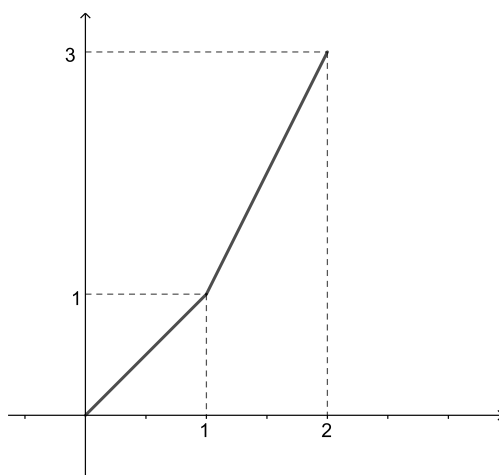
EXEMPLO 6.27.

Seja  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$



Então

$$F(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2t - 1 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$



Observe no exemplo acima que a função  $f$  não é contínua em 1 mas a função fundamental é contínua em todo o domínio. Podemos dizer que a integral apaga as discontinuidades.

TEOREMA 6.28. (TFC- Teorema Fundamental do Cálculo)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então a função fundamental

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

é derivável e  $F'(t) = f(t)$  para todo  $t \in [a, b]$ .

DEMONSTRAÇÃO.  $F(t+h) - F(t) = \int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx = \int_t^{t+h} f(x)dx$ . Como  $f$  é contínua pelo teorema do valor intermediário existe  $c$  entre  $t$  e  $t+h$  tal que  $\int_t^{t+h} f(x)dx = f(c)h$ . Novamente como  $f$  é contínua se  $h \rightarrow 0$  então  $f(c) \rightarrow f(t)$ . Portanto

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x)dx = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(t)$$

□

DEFINIÇÃO 6.29. Uma função  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma Primitiva de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se  $G'(x) = f(x)$  para todo  $x \in [a, b]$ .

COROLÁRIO 6.30. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua e  $G$  é uma primitiva de  $f$  então  $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ .

DEMONSTRAÇÃO. Se  $F$  é a função fundamental então  $F'(t) = f(t) = G'(t)$ . Então  $F' - G' = 0$  e portanto  $G(t) = F(t) + k$ ,  $k$  constante. Como  $F(a) = 0$  então  $G(a) = k$ . Assim  $G(t) = F(t) + G(a)$ .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = G(b) - G(a)$$

□

É comum utilizar a seguinte convenção  $G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$  de forma que

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b$$

Vamos também indicar as primitivas de uma função  $f$  pelo símbolo de integral:

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

O TFC justifica a ideia intuitiva do começo deste capítulo de que recuperamos uma função integrando sua derivada desde que esta seja contínua:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

A importância do TFC está no fato que ele permite o encontrar uma integral evitando o árduo caminho de se calcular os limites das somas de Riemann.

A seguir uma lista de primitivas:

$$(1) \int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + k \text{ desde que } n+1 \neq 0.$$

$$(2) \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k.$$

$$(3) \int e^x dx = e^x + k.$$

$$(4) \int \cos x dx = \text{sen } x + k.$$

$$(5) \int \text{sen } x dx = -\cos x + k.$$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + k.$$

$$(7) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + k.$$

A filosofia para fazer a lista: derivamos uma função. A integral da derivada é a função. Assim  $\text{tg}'(x) = \sec^2(x)$  portanto  $\int \sec^2(x) dx = \text{tg } x + k$ .

O leitor pode ampliar a tabela acima.

## 6. Técnicas de Integração

A cada regra de derivação corresponde o que chamamos de uma técnica de integração. A mais óbvia diz que a integral da soma de duas funções é igual a soma das integrais que corresponde a regra que diz que a derivada da soma é a soma das derivadas.

A que corresponde a derivada do produto é a seguinte técnica:

PROPOSIÇÃO 6.31. (*Integração por partes*)

Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções com derivadas contínuas então

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x) dx$$

DEMONSTRAÇÃO. Como  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  então

$$\int_a^b g(x)f'(x) dx + \int_a^b g'(x)f(x) dx = \int_a^b (fg)'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b$$

□

EXEMPLO 6.32. Vamos calcular  $\int_a^b x e^x dx$ . Tomando-se  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^x$  tem-se que  $f'(x) = 1$  e  $g(x) = e^x$ . Aplicando a fórmula acima

$$\int_a^b x e^x dx = x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x dx = b e^b - a e^a - e^b + e^a$$

A versão da integração por partes para primitivas enuncia-se da seguinte forma:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

No exemplo anterior tem-se

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

Costuma-se escrever a fórmula

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

seguinte maneira abreviada:

$$\begin{aligned} u = f(x) &\longrightarrow du = f'(x)dx \\ dv = g'(x)dx &\longrightarrow v = g(x) \end{aligned}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**PROPOSIÇÃO 6.33.** (*Mudança de Variável ou Substituição*)

Seja  $u = u(x)$  uma função com derivada contínua definida num intervalo  $[a, b]$  e  $f$  uma função contínua tal que  $u([a, b]) \subset \text{Dom} f$ . Então

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Se  $F$  é uma primitiva de  $f$  então  $(F \circ u)'(x) = f(u(x))u'(x)$ . Então

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_a^b (F \circ u)'(x) = (F \circ u) \Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

□

**EXEMPLO 6.34.** Para calcular  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$  fazamos a mudança de variável  $u = x^2 + 1$  então  $u'(x) = 2x$ . Assim

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^2 \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} dx = \int_0^2 f(u(x))u'(x)dx$$

onde

$$f(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \quad u(0) = 1 \quad u(2) = 5$$

e

$$\int_{u(0)}^{u(2)} f(u) du = \int_1^5 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} \Big|_1^5 = \sqrt{5} - 1$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{5} - 1$$

Na prática para encontrar a primitiva fazendo uma mudança de variável operamos da seguinte forma: Faz-se  $u = u(x)$

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(u(x))$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

EXEMPLO 6.35. Para calcular  $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$  façamos  $u = \operatorname{sen} x$ . Então  $du = \cos x dx$ ,

$$\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx = \int e^u du = e^u = e^{\operatorname{sen} x} + k$$

Em várias situações é mais fácil calcular a primeira integral da fórmula de mudança de variável. Neste caso precisamos supor a função  $u = u(x)$  seja inversível e procedemos assim,

$$\int_c^d f(u)du = \int_{u^{-1}(c)}^{u^{-1}(d)} f(u(x))u'(x)dx$$

EXEMPLO 6.36. Vamos calcular  $\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$ . Para eliminarmos a raiz façamos  $u = \operatorname{sen} x$  onde  $0 \leq x \leq \pi/2$  então  $du = \cos x dx$  e  $x = \operatorname{arcsen} u$

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)} \cos x dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = (x/2 + (\operatorname{sen} 2x)/4) \Big|_0^{\pi/2} = \pi/4$$

## 7. Frações Parciais

Vamos descrever um método para integrar funções racionais.

Considere  $f(x) = P(x)/Q(x)$  uma função racional. Começemos observando que podemos supor o grau de  $P(x)$  menor que o grau de  $Q(x)$ . Se não for o caso então fazemos a divisão e obtemos

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x)$$

$$P(x)/Q(x) = S(x) + R(x)/Q(x)$$

onde o grau de  $R(x)$  menor que o grau de  $Q(x)$ .

A seguir analisemos os casos mais simples.

1)

$$\int \frac{a}{bx+c} dx$$

Fazendo a mudança de variável  $u = bx + c$  obtemos

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = (a/b) \ln(bx+c)$$

2)

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} dx$$

Distinguímos três casos de acordo com as raízes do denominador:

(1)

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

(2)

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2}$$

(3)

$$\frac{ax+b}{x^2+cx+d} = \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

Nos dois primeiros casos existem constantes  $A$  e  $B$  tais que

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$$

No primeiro caso observe que

$$ax+b = (x-\beta)A + (x-\alpha)B = (A+B)x - \beta A - \alpha B$$

Como a igualdade vale para todo  $x$  obtemos o sistema

$$\begin{cases} A+B & = a \\ \beta A + \alpha B & = -b \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} A & = \frac{\alpha a + b}{\alpha - \beta} \\ B & = \frac{\beta a + b}{\beta - \alpha} \end{cases}$$

Fica como exercício mostrar a existência de tais constantes no segundo caso.

No terceiro caso fazendo a mudança de variável  $u = (x - \alpha)/\beta$  recaímos na integral

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx = \int \frac{ax + b}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \int \frac{a\beta u + a\alpha + b}{\beta^2(u^2 + 1)} dx =$$

Como consequência para calcularmos a integral

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + cx + d} dx$$

basta usar as seguintes integrais:

$$\int \frac{1}{x - \alpha} dx = \ln|x - \alpha| \qquad \int \frac{1}{(x - \alpha)^2} dx = -\frac{1}{x - \alpha}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = (1/2) \ln(x^2 + 1) \qquad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x$$

EXEMPLO 6.37. *Calcular*

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx$$

*Solução:*

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$$

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1}$$

$$x = (x - 1)A + (x - 2)B = (A + B)x - A - 2B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$$

A solução  $A = 2$  e  $B = -1$ .

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \left( \frac{2}{x - 2} - \frac{1}{x - 1} \right) dx = 2 \ln(x - 2) - \ln(x - 1)$$

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2} dx = \ln \frac{(x - 2)^2}{x - 1}$$

Passemos ao caso em que o denominador é de terceiro grau.

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + dx^2 + ex + f} dx$$

Existem as seguintes possibilidades para a função racional  $\frac{ax^2 + bx + c}{x^3 + dx^2 + ex + f}$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes a serem determinadas:

$$(1) \frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta} + \frac{C}{x - \gamma}$$

$$(2) \frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^2(x - \beta)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{x - \beta}$$

$$(3) \frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)^3} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2} + \frac{C}{(x - \alpha)^3}$$

$$(4) \frac{ax^2 + bx + c}{(x - \alpha)(x^2 + \beta^2)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + C}{x^2 + \beta^2}$$

No primeiro caso vejamos como determinar as constantes.

1) Somando as frações do segundo termo e comparando o numerador temos,

$$ax^2 + bx + c = (x - \beta)(x - \gamma)A + (x - \alpha)(x - \gamma)B + (x - \alpha)(x - \beta)C$$

Neste ponto podemos seguir o mesmo caminho que no caso anterior. Comparar os coeficientes e encontrar um sistema cuja solução determina as constantes. Vamos optar por uma solução mais simples.

Façamos  $x = \alpha$  então

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)A$$

Portanto

$$A = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

Se  $x = \beta$  então

$$a\beta^2 + b\beta + c = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)B$$

$$B = \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}$$

Se  $x = \gamma$  então

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)C$$

$$C = \frac{a\gamma^2 + b\gamma + c}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

Observemos que se os polinômios de segundo grau são iguais então os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dados pelas expressões acima. Com estes valores o polinômio da direita coincide com o da esquerda em três valores distintos e portanto eles são iguais.



Passemos para o segundo caso.

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)(x - \beta)A + (x - \beta)B + (x - \alpha)^2C$$

Se  $x = \beta$  então

$$a\beta^2 + b\beta + c = (\beta - \alpha)^2C$$

$$C = \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{(\beta - \alpha)^2}$$

Se  $x = \alpha$  então

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = (\alpha - \beta)B$$

$$B = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{\alpha - \beta}$$

Para determinar  $A$  derivamos a igualdade e temos

$$A = \frac{2a\alpha + b}{\alpha - \beta} - \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{(\beta - \alpha)^2}$$

No terceiro caso

$$ax^2 + bx + c = (x - \alpha)^2A + (x - \alpha)B + C$$

Veja que o mesmo polinômio está centrado na origem e em  $c = \alpha$ . Para determinar seus coeficientes derivamos em  $c = \alpha$ .

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = C$$

$$2a\alpha + b = B$$

$$a = A$$

No último caso

$$ax^2 + bx + c = (x^2 + \beta^2)A + (x - \alpha)(Bx + C)$$

Se  $x = \alpha$  então

$$A = \frac{a\alpha^2 + b\alpha + c}{\alpha^2 + \beta^2}$$

e para determinar  $B$  e  $C$  comparamos coeficientes.

Vamos parar por aqui. Para o método geral das frações parciais o leitor pode consultar o livro G.F.Simmons-Volume1 ou Van der Waerden-Modern Algebra-Volumel.

EXEMPLO 6.38. *Calcular*

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$$

*Solução:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x-1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ 1 &= (x-1)(x-2)A + x(x-2)B + x(x-1)C \end{aligned}$$

Fazendo  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  obtém-se respectivamente  $A = 1/2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1/2$ .

Então,

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx = \int \frac{1}{2x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = (1/2) \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx = (1/2) \ln x - \ln(x-1) + (1/2) \ln(x-2) = \ln \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-1}$$

EXEMPLO 6.39. *Calcular*

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$$

*Solução:*

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x(x-1)^2} dx \\ \frac{2x^2 - 5x + 1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ 2x^2 - 5x + 1 &= (x-1)^2 A + x(x-1)B + xC \end{aligned}$$

Fazendo  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  obtém-se respectivamente  $A = 1$ ,  $C = -2$ . Agora se  $x = 2$  então  $A + 2B + 2C = -1$ . Assim  $B = 1$ .

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-1} dx - (1/2) \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \ln x(x-1) + 2/(x-1)$$

EXEMPLO 6.40. *Calcular*

$$\int \frac{3x^2 - x + 4}{(x-1)(x^2+2)} dx$$

*Solução:*

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x(x-1)^2} dx$$

$$\frac{3x^2 - x + 4}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$3x^2 - x + 4 = (x^2+2)A + (x-1)(Bx+C)$$

Fazendo  $x = 1$  obtém-se  $A = 2$ . Comparando os coeficientes de segundo grau temos  $A + B = 3$ . Portanto  $B = 1$ . Comparando os coeficientes de primeiro grau  $C - B = -1$ . Disto  $C = 0$ .

$$\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \frac{2}{(x-1)} dx + \int \frac{x}{x^2+2} dx = 2 \ln|x-1| + (1/2) \ln|x^2+2| = \ln((x-1)^2 \sqrt{x^2+2})$$

## 8. Integrais Impróprias

Nesta secção estendemos a definição de integral para funções definidas em intervalos não fechados ou ilimitados. Estas integrais são denominadas de impróprias. Podemos dividi-las em dois tipos:

1. Funções cujo domínio são intervalos  $[a, b[$  ou  $]a, b]$  ou  $]a, b[$ .
2. Funções cujo domínio são intervalos não limitados  $[a, \infty[$  ou  $] \infty, b]$  ou  $\mathbb{R} = ] \infty, \infty[$ .

DEFINIÇÃO 6.41. *Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cada  $c \in ]a, b[$  a função  $f$  restrita ao intervalo  $[a, c]$  seja integrável.*

*Definimos a Integral Imprópria  $\int_a^b f(x) dx$  por*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Para as funções  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com as mudanças óbvias define-se

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

Caso  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  então tomamos  $c$  entre  $a$  e  $b$  e definimos

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

EXEMPLO 6.42.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \arcsen c = \pi/2$$

Quando os limites são finitos diremos que a integral imprópria é convergente. Caso contrário dizemos que é divergente.

EXEMPLO 6.43.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (1/c - 1) = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

Nos exemplos seguintes estendemos os três casos do exemplo anterior.

EXEMPLO 6.44. *Se  $k > 1$  então*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-k} \left(1 - \frac{1}{c^{k-1}}\right) = \infty$$

*pois  $k - 1 > 0$ .*

EXEMPLO 6.45. *Se  $0 < k < 1$  então*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^k} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-k} (1 - c^{1-k}) = \infty$$

*pois  $1 - k > 0$ .*

EXEMPLO 6.46. *Se  $k < 0$  então a integral é própria e temos*

$$\int_0^1 x^{-k} dx = \frac{1}{-k+1} x^{-k+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{-k+1}$$

PROPOSIÇÃO 6.47.

Se  $f$  e  $g$  são funções definidas num intervalo  $[a, b]$  tais que  $|f(x)| \leq g(x)$  para todo  $x$  e  $\int_a^b g(x)dx$  é convergente então  $\int_a^b |f(x)|dx$  é convergente. Em particular se  $f(x) \geq 0$  então  $\int_a^b f(x)dx$  converge.

DEMONSTRAÇÃO. A função

$$F(c) = \int_a^c |f(x)|dx$$

é crescente e limitada por  $\int_a^b g(x)dx$ . Portanto

$$\int_a^b |f(x)|dx = \sup_{a < c < b} F(c)$$

□

DEFINIÇÃO 6.48.

Diremos que  $\int_a^b f(x)dx$  converge absolutamente se  $\int_a^b |f(x)|dx$  converge.

PROPOSIÇÃO 6.49.

Se  $\int_a^b f(x)dx$  converge absolutamente se  $\int_a^b f(x)dx$  converge.

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \geq 0$$

$$f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \geq 0$$

Então  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$  e  $0 \leq f_+(x), f_-(x) \leq |f(x)|$ . Se  $\int_a^b |f(x)|dx$  converge então da proposição anterior  $\int_a^b f_+(x)dx$  e  $\int_a^b f_-(x)dx$  convergem. Logo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$$

converge.

□

EXEMPLO 6.50. *A integral*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

*é convergente.*

*Com efeito*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}} dx$$

*Como*  $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$  *então*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

*Segue que*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi/2$$

*converge.*

EXEMPLO 6.51. *A integral*

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} dx$$

*converge pois no intervalo*  $[0, \pi]$  *tem-se*  $0 \leq \text{sen } x \leq 1$ . *Conseqüentemente*

$$\frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{\pi}$$

PROPOSIÇÃO 6.52.

*Seja*  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  *uma função positiva tal que*  $\int_a^b f(x) dx$  *converge e*  $g$  *uma função contínua e positiva definida no intervalo fechado*  $[a, b]$ .

*Então*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx$$

*converge.*

DEMONSTRAÇÃO. Como  $g$  é contínua existe  $k > 0$  tal que  $g(x) < k$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como consequência

$$\int_a^b f(x)g(x)dx < \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

□

### 8.1. Integrais Impróprias sôbre Intervalos Ilimitados.

DEFINIÇÃO 6.53.

Para uma função  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $c \in [a, \infty[$  a restrição de  $f$  ao intervalo  $[a, c]$  é integrável define-se a Integral Imprópria

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x)dx$$

Se o limite acima existir dizemos que a integral imprópria converge. Caso contrário dizemos que diverge.

De maneira análoga define-se

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

e

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

onde  $c$  é um número qualquer.

EXEMPLO 6.54.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (\ln c) = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (1 - 1/c) = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/2}} dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (2\sqrt{c} - 2) = \infty$$

EXEMPLO 6.55.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{c^{(1-k)}}{1-k} - \frac{1}{1-k} \right) = \begin{cases} \infty & k < 1 \\ \frac{1}{1-k} & k > 1 \end{cases}$$

A seguinte proposição resume as propriedades das integrais impróprias em intervalos ilimitados. A sua demonstração segue os mesmos passos do que foi feito para intervalos limitados e será omitida.

PROPOSIÇÃO 6.56.

(1) Se  $f(x) \geq 0$  então

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \sup_c \int_a^c f(x) dx$$

podendo ser finito ou infinito.

(2) Se  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  converge absolutamente então ela converge.

(3) Se  $|f(x)| \leq g(x)$  e  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  converge então  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  converge e portanto  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  converge.

(4) Seja  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva tal que  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  converge e  $g$  uma função contínua, limitada e positiva definida no intervalo  $[a, \infty[$ .

Então

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$$

converge.

EXEMPLO 6.57. A integral

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

converge. Com efeito  $\frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{x^4}$  e a integral  $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$  converge.



EXEMPLO 6.58. A integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

é convergente.

Para mostrarmos isto comecemos decompondo

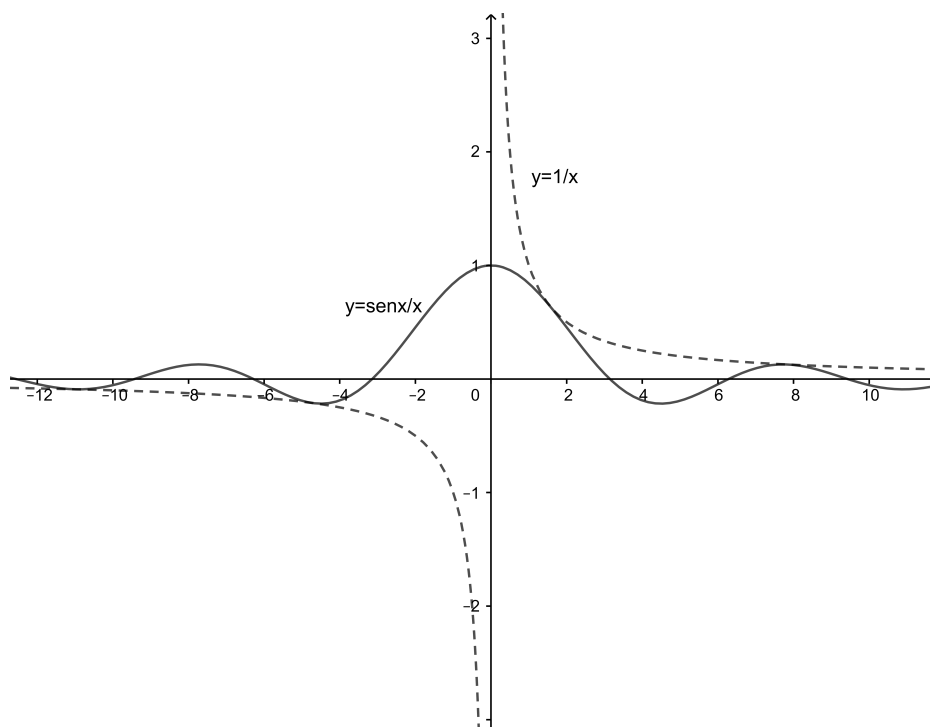
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Se  $x > 1$  então  $x^2 > x$  e  $e^{-x^2} < e^{-x}$ . Como  $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$  converge então  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  converge.

EXEMPLO 6.59. Neste exemplo vamos mostrar que a integral de Dirichlet

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx$$

converge mas não converge absolutamente.



Comecemos definindo a sequência

$$a_0 = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \quad a_1 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \dots, a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Claramente  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  e a sequência é decrescente ou seja  $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$

Nossa integral é dada por

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Consideremos agora as subsequências parciais pares e ímpares

$$s_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$$

$$s_{2n+1} = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1}$$

Então

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3}$$

Como  $a_{2n+1} > a_{2n+2}$  e  $a_{2n+2} > a_{2n+3}$  então  $s_{2n+2} < s_{2n}$  e  $s_{2n+3} > s_{2n+1}$ . Assim a sequência par é decrescente e a ímpar é crescente.

$$s_1 < s_3 < s_5 < \dots < s_{2n+1} \dots < \dots < s_{2n} < s_{2n-2} < \dots < s_2 < s_0$$

Como  $\lim a_n = 0$  e  $|s_{2n+1} - s_{2n}| = a_n$  concluímos que

$$\lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} = \lim s_n$$

Portanto

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \lim s_n$$

converge. Passemos à convergência absoluta

$$\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx > \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{(n+1)\pi} dx =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\operatorname{sen} x| dx = \frac{|\cos x|}{(n+1)\pi} \Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Desta forma

$$\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx > \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

que diverge.

EXEMPLO 6.60. A função Gama definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

converge para todo  $p > 0$ .

Com efeito

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Para  $0 < x < 1$  temos  $x^{p-1} e^{-x} \leq x^{p-1} = 1/x^{1-p}$  e  $\int_0^1 1/x^{1-p} dx$  converge.

Para a segunda integral lembremos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n / e^x = 0$$

Tomemos  $M$  tal que se  $x > M$  então  $x^n / e^x < 1$ . Se tomarmos  $n = p + 2$  então  $x^{p+2} / e^x < 1$  o que acarreta que  $x^{p-1} / e^x < 1/x^2$ .

Como  $\int_M^{\infty} 1/x^2 dx$  concluímos que a segunda integral também converge.

## 9. Aplicações do Cálculo Integral

Nesta secção aplicamos os conceitos desenvolvidos anteriormente do cálculo integral para calcular áreas, volumes comprimento de arco de curva e área de superfícies e algumas aplicações à física.

**9.1. Área.** Convenciona-se em geometria que a unidade de área é o quadrado unitário. A área de uma figura plana é definida intuitivamente como a quantidade de quadrados unitários contidos na figura. Das propriedades de proporcionalidade e congruências que se espera deduz-se então fórmulas para a área do retângulo, do triângulo e mais geralmente para a área de uma região poligonal. Em se tratando do círculo pelo fato de sua fronteira ser uma curva não linear

estes métodos não funcionam. O método de exaustão utilizado por Arquimedes consiste em calcular a área de polígonos inscritos no círculo e passar ao limite tornando os seus lados cada vez menores. Esta é a idéia fundamental do cálculo integral.

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas tais que  $f(x) \leq g(x)$  e

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

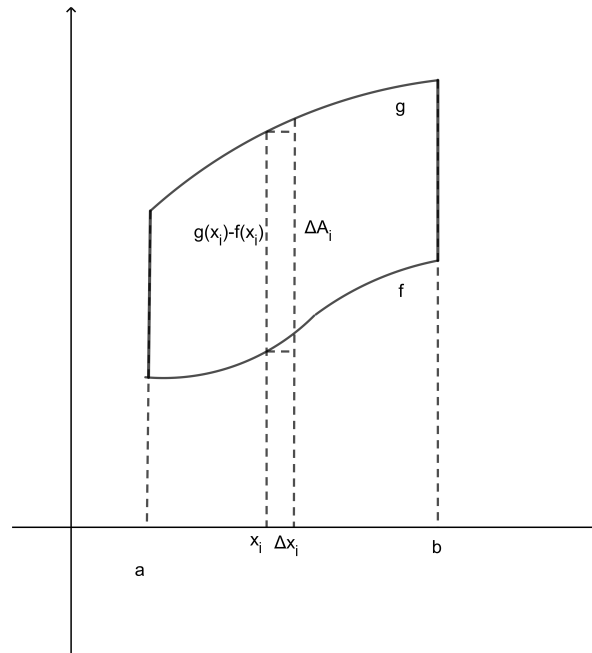
Tomemos uma partição

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

do intervalo  $[a, b]$ .

DEFINIÇÃO 6.61. *Define-se a Área de  $D$  por*

$$A(D) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - f(x_i)) \Delta x_i = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i$$



Da definição de integral

$$A(D) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

A área é obtida integrando o elemento de área  $dA = (g(x) - f(x)) dx$ .

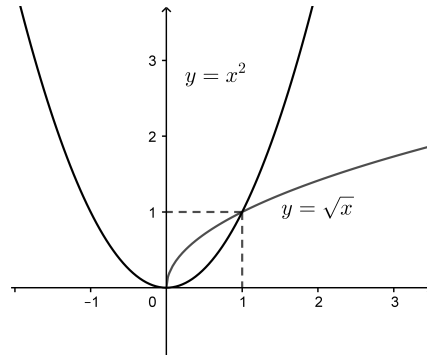
EXEMPLO 6.62.

Determine a área da região  $D$  limitada por  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$ .

*Solução:* Estas funções encontram-se em  $x = 0$  e  $x = 1$ . Neste intervalo a raiz é maior.

Portanto

$$A(D) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = 1/3$$



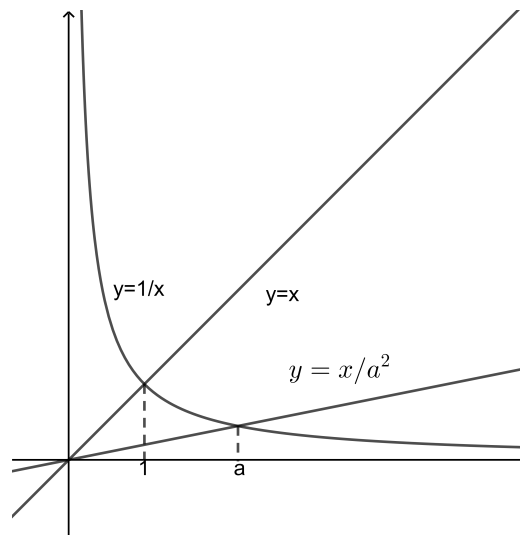
EXEMPLO 6.63. Calcule a área da figura localizada no primeiro quadrante limitada por  $y = 1/x$ ,  $y = x$  e  $y = x/a^2$  onde  $a > 0$ .

*Solução:* A hipérbole e a reta  $y = x$  encontram-se para  $x = 1$  e a reta  $y = x/a^2$  em  $x = a$ .

Então

$$A = \int_0^1 (x - x/a^2) dx + \int_1^a (1/x - x/a^2) dx$$

Um cálculo simples mostra que  $A = \ln a$ .



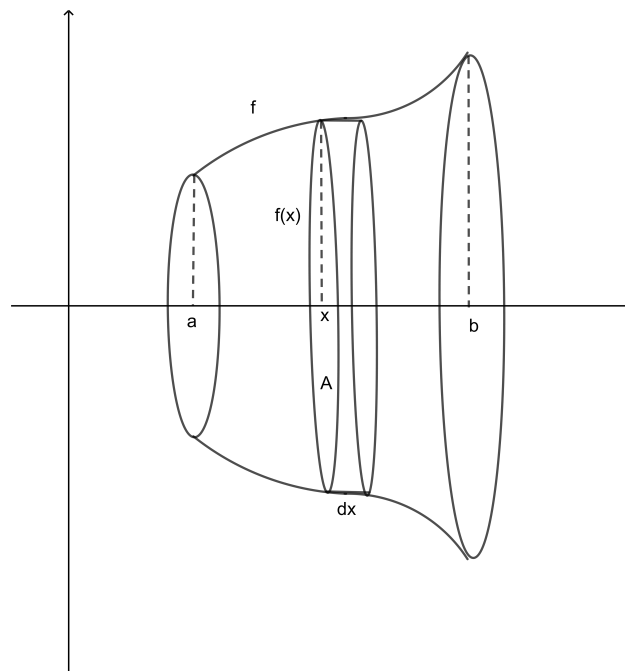
## 9.2. Volume de Sólidos de Revolução.

### (1) ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO $x$ .

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva e  $D$  o subconjunto do plano dado por

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Se girarmos  $D$  em torno do eixo  $x$  obtemos um sólido  $S$  esquematizado na figura



Para deduzirmos uma fórmula para o volume  $V(S)$  considere o elemento de volume  $dV$  dado pelo cilindro infinitesimal cujo raio é  $f(x)$  e altura  $dx$  como na figura.

$$dV = \pi f(x)^2 dx$$

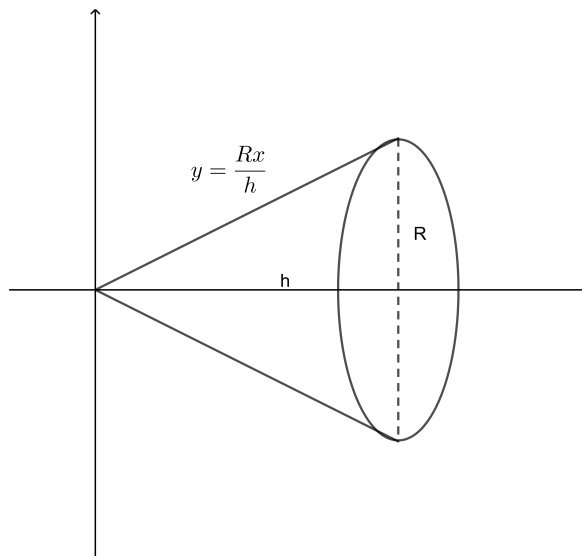
Então

$$V(S) = \int dV = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

EXEMPLO 6.64.

Deduzir a fórmula do volume de um cone reto cujo raio da base é  $R$  e cuja altura  $h$ .

*Solução:* Obtém-se o cone girando a região  $D$  correspondente à função  $f(x) = Rx/h$  para  $0 \leq x \leq h$ .



$$V(S) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \int_0^h \pi (Rx/h)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h x^2 dx$$

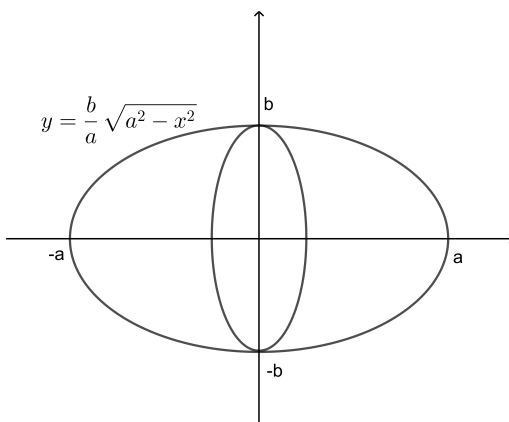
$$V(S) = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

EXEMPLO 6.65. *Volume do elipsoide de revolução.*

*Tomemos a função  $f$  cujo gráfico é a semi-elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

*onde  $y \geq 0$ .*



Então

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$-a \leq x \leq a.$$

$$V(S) = \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx$$

$$V(S) = \frac{4}{3} \pi ab^2$$

Note que se  $a = b = R$  obtemos o volume da esfera

$$V(S) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

EXEMPLO 6.66. Determinar o volume do sólido girando em torno do eixo  $x$  a região limitada pela parábola  $y = x^2 + 1$  e pela reta  $y = 2x + 1$ .

Solução: As duas curvas encontram-se nos pontos onde  $x = 0$  e  $x = 2$ . Então

$$V = \int_0^2 \pi((2x + 1)^2 - (x^2 + 1)^2) dx$$

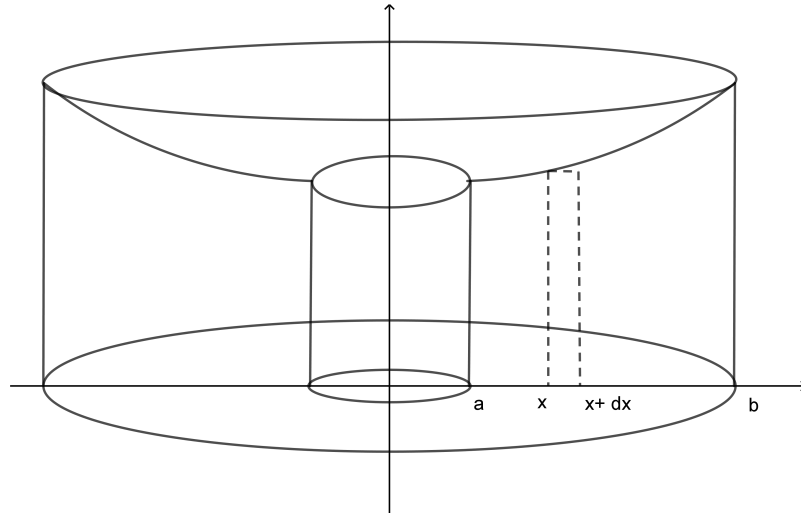
$$V = 104/15$$

Observe que calculamos a integral da diferença dos quadrados e não a integral do quadrado da diferença como no caso das áreas!

## (2) ROTAÇÃO EM TORNO DO EIXO $y$ .

Com a mesma nomenclatura do caso anterior, considerando  $a \geq 0$ , se girarmos o elemento de área em torno do eixo  $y$ , de acordo com a figura abaixo





obtemos o elemento de volume como a diferença de dois cilindros encaixados.

$$dV = \pi(x + dx)^2 f(x) - \pi x^2 f(x)$$

$$dV = 2\pi x f(x) dx - \pi x f(x) dx^2$$

como o segundo termo é de segunda ordem então

$$dV = 2\pi x f(x) dx$$

Assim

$$V(S) = \int dV = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

EXEMPLO 6.67. O Toro  $T$  é obtido girando em torno do eixo  $y$  o círculo  $(x - a)^2 + y^2 = b^2$  onde  $a > b > 0$ . Vamos inicialmente calcular o volume do semi-toro considerando a função

$$y = \sqrt{b^2 - (x - a)^2}$$

para  $a - b \leq x \leq a + b$ .

Aplicando a fórmula anterior

$$V = \int_{a-b}^{a+b} 2\pi x f(x) dx = \int_{a-b}^{a+b} 2\pi x \sqrt{b^2 - (x - a)^2} dx$$

fazendo a mudança de variável  $x - a = b \sin \theta$ ,  $dx = b \cos \theta d\theta$  temos

$$\begin{aligned}\int_{a-b}^{a+b} x\sqrt{b^2 - (x-a)^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a + b \operatorname{sen} \theta) b^2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (ab^2 \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (b^3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta\end{aligned}$$

Calculando estas duas integrais bem conhecidas e substituindo tem-se

$$V = \pi^2 ab^2$$

Portanto

$$V(T) = 2\pi^2 ab^2$$

Se a função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  for crescente temos uma bonita relação entre a rotação em torno do eixo  $y$  da região limitada pela função inversa  $f^{-1}$  e a rotação em torno do mesmo eixo da região limitada por  $f$  como veremos a seguir.

O volume em torno de  $y$  da função inversa é dado por

$$V_{-1} = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi f^{-1}(y)^2 dy$$

Façamos a mudança de variável  $y = f(x)$ ,  $dy = f'(x)dx$

$$V_{-1} = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi f^{-1}(y)^2 dy = \int_a^b \pi x^2 f'(x) dx$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}u = x^2 &\longrightarrow du = 2x dx \\ dv = f'(x) dx &\longrightarrow v = f(x)\end{aligned}$$

$$\int_a^b \pi x^2 f'(x) dx = \pi x^2 f(x) \Big|_a^b - \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Portanto

$$V_{-1} = \int_{f(a)}^{f(b)} \pi f^{-1}(y)^2 dy = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a) - \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Se

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

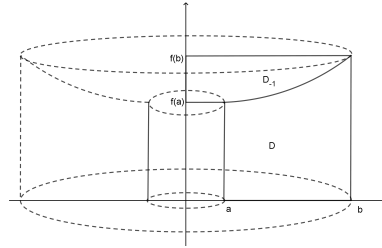
então

$$V + V_{-1} = \pi b^2 f(b) - \pi a^2 f(a)$$

Em resumo

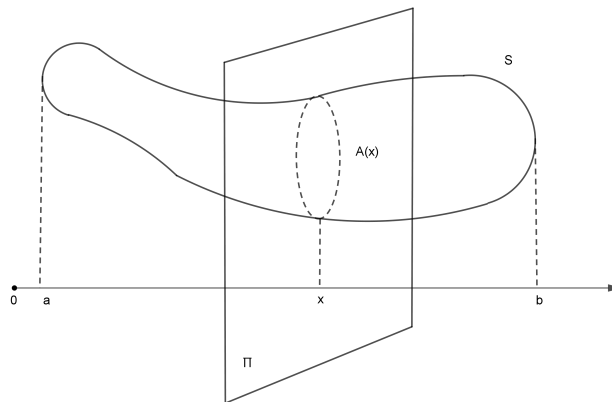
”A soma dos volumes das rotações em torno do eixo  $y$  é igual a diferença entre os volumes do cilindro de raio  $b$  e altura  $f(b)$  e o cilindro de raio  $a$  e altura  $f(a)$ ”

Este fato é evidente da figura



### (3) MÉTODO DAS SECÇÕES TRANSVERSAIS.

Este método generaliza um dos casos anteriores. Seja  $S$  é um sólido e  $r$  uma reta. Se um plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  intercepta  $S$  então a intersecção  $S \cap \pi$  é chamada de secção transversal do sólido  $S$ . Fixado um sistema de coordenadas na reta  $r$  para cada  $x$  seja  $A(x)$  a área da secção transversal correspondente ao plano que passa por  $x$ . Se  $S$  é um sólido limitado então  $x$  varia num intervalo  $[a, b]$ .



Caso a função

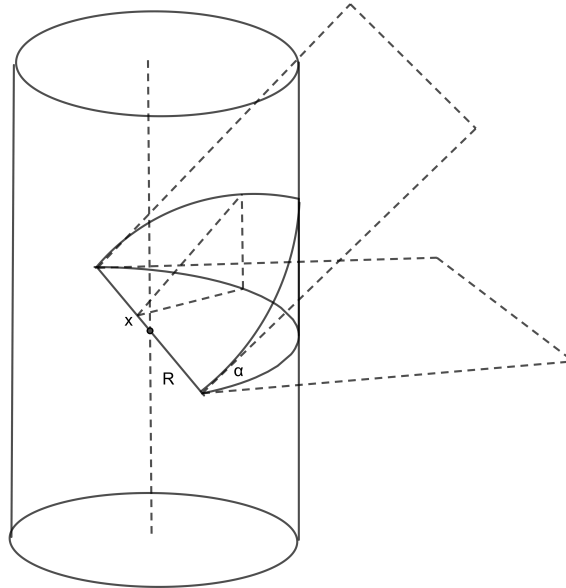
$$A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

seja integrável então o volume do sólido é dado por

$$V(S) = \int_a^b A(x) dx$$

EXEMPLO 6.68. *Cunha*

Vamos calcular o volume de uma cunha limitada por um cilindro de raio  $R$  e por dois semiplanos formando um ângulo  $\alpha$  como na figura abaixo.



Se o triângulo como na figura tem base  $b$  e altura  $h$  então

$$\operatorname{tg} \alpha = h/b$$

$$R^2 = b^2 + x^2$$

Destas relações concluímos que a área do triângulo é dada por

$$A(x) = \frac{\operatorname{tg} \alpha (R^2 - x^2)}{2}$$

e o volume

$$V(S) = \int_{-R}^R A(x) dx = \int_{-R}^R \frac{\operatorname{tg} \alpha (R^2 - x^2)}{2} dx$$

$$V(S) = \frac{2}{3} \operatorname{tg} \alpha R^3$$

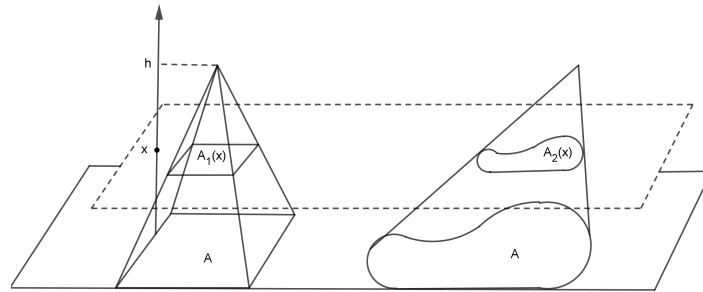
EXEMPLO 6.69. *Princípio de Cavalieri*

Segundo Cavalieri se as áreas das seções transversais de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  em relação a um eixo  $x$  são iguais então seus volumes são os mesmos. Apesar deste fato

ser uma consequência imediata da fórmula anterior ele tem importantes implicações. Por exemplo, a fórmula do volume de uma pirâmide

$$V = (1/3)bh$$

pode ser deduzida de maneira elementar. Já o volume de um cone não apesar de ser a mesma fórmula. Pode-se mostrar isto como consequência do princípio de Cavalieri. Considere uma pirâmide  $P$  cuja base é por exemplo um quadrado cuja área é  $A$  e um cone qualquer  $C$  cuja base é uma região do plano limitada por uma curva fechada com área também  $A$  como na figura.



Das proporções

$$A/h = A_1(x)$$

e

$$A/h = A_2(x)$$

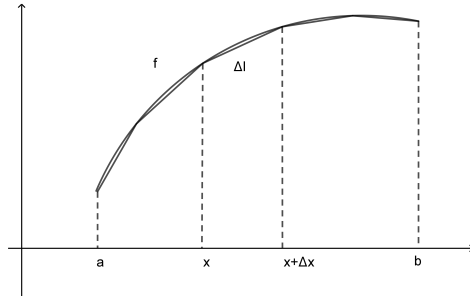
concluimos que

$$A_1(x) = A_2(x)$$

para  $0 \leq x \leq h$ .

Da fórmula do volume concluimos que  $V(C) = V(P)$ .

**9.3. Comprimento de arco.** O comprimento de arco de uma curva descrita pelo gráfico de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é por definição o limite do comprimento das poligonais inscritas na curva. Vamos deuzir uma fórmula supondo que a função tenha derivada contínua.



De acordo com a figura o comprimento  $\Delta l$  de um lado da poligonal é dado por

$$\Delta^2 l = \Delta x^2 + \Delta f^2 = \Delta x^2 + (f(x + \Delta x) - f(x))^2$$

Pelo TVM temos  $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x$  para algum  $c$  no intervalo  $[x, x + \Delta x]$ .

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + f'(c)^2 \Delta x^2$$

$$\Delta l = \sqrt{1 + f'(c)^2} \Delta x$$

infinitesimalmente temos

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

O comprimento de arco do gráfico é dado por

$$l = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

EXEMPLO 6.70.

Como exemplo vamos calcular o comprimento de uma circunferência de raio  $R$  cuja equação é dada por  $x^2 + y^2 = R^2$ . Para isto considere a função  $f(x) = y = \sqrt{R^2 - x^2}$  com domínio o intervalo  $[-R, R]$  cujo gráfico é a semicircunferência. Se  $l$  é o comprimento da circunferência então

$$l/2 = \int_{-R}^R \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Um cálculo simples mostra que

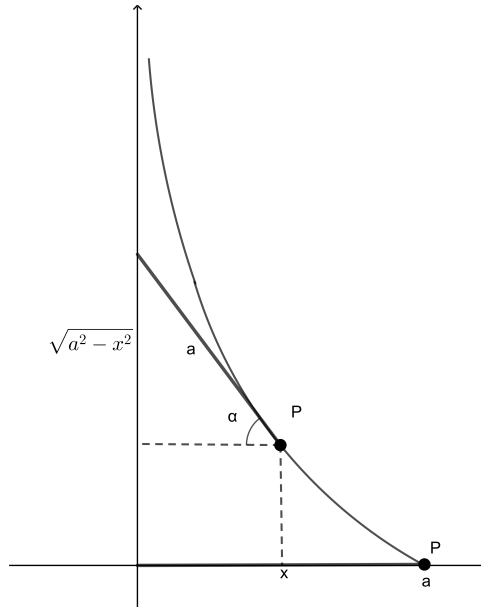
$$l/2 = \int_{-R}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = R \operatorname{arcsen}(x/R) \Big|_{-R}^R = R\pi$$

ou seja

$$l = 2\pi R$$

EXEMPLO 6.71. (*Tractriz*)

Considere um fio cujo comprimento é  $a$  com uma extremidade na origem e na outra está preso um ponto material  $P$  situado no eixo  $x$  como na figura.



A tractriz é a trajetória do ponto  $P$  quando a extremidade na origem desloca-se ao longo do eixo  $y$ . A tractriz é o gráfico de uma função  $f$  definida no intervalo  $]0, a]$ . Observe que  $0$  não está no domínio de  $f$ . Vamos encontrar o comprimento de arco para um intervalo  $[t, a]$  onde  $0 < t < a$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$1 + f'(x)^2 = a^2/x^2$$

Se  $s(t)$  é o comprimento de arco então

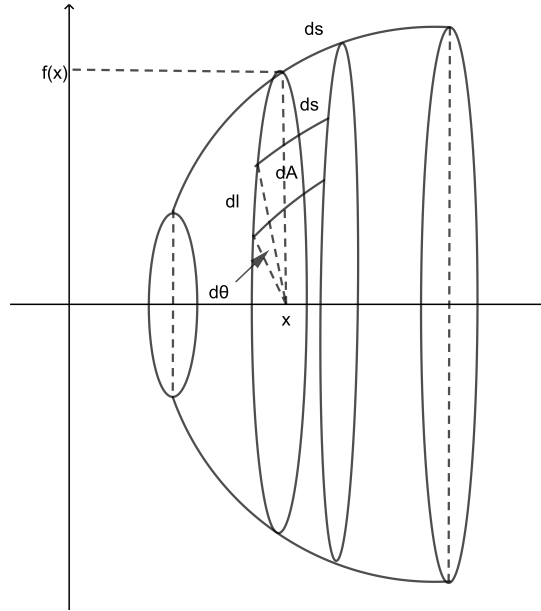
$$s(t) = \int_t^a \frac{a}{x} dx = a \ln(a/x)$$

Não foi preciso encontrar a expressão da função  $f$ .

Pode-se mostrar que

$$f(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

**9.4. Área de superfícies de revolução.** Se giramos o gráfico de uma função positiva  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  em torno do eixo  $x$  obtém-se uma superfície de revolução  $S$ . De acordo com a figura abaixo vamos deduzir uma fórmula integral para sua área.



Notando que os segmentos  $dl$  e  $ds$  são ortogonais temos

$$dA = dl \cdot ds$$

$$dl = f(x)d\theta$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$dA = d\theta f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$dA = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Se  $a > 0$  e giramos o gráfico de  $f$  em torno do eixo  $y$  é fácil ver que a fórmula da área é dada por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

No caso do eixo  $x$  o raio de rotação é  $f(x)$  e no caso do eixo  $y$  o raio é  $x$ .



EXEMPLO 6.72. *Esfera*

Girando o gráfico da função  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$  em torno do eixo  $x$  obtemos a esfera  $S$  de raio  $R$ .

Então sua área é dada por

$$A(S) = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

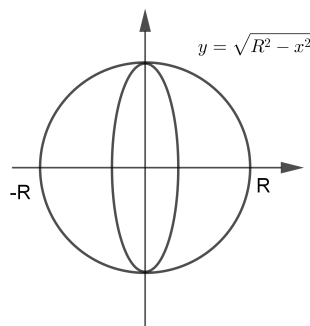
$$A(S) = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-R}^R R dx$$

$$A(S) = 4\pi R^2$$

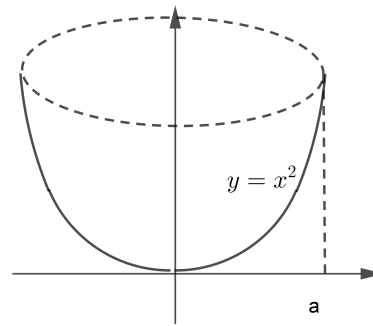
EXEMPLO 6.73. *Paraboloide*

Girando o segmento de parábola  $y = x^2$  onde  $0 \leq x \leq a$  em torno do eixo  $y$  obtém-se um setor de um paraboloides. Sua área é

$$A = 2\pi \int_0^a x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{\pi}{6} (1 + 4a^2)^{3/2}$$



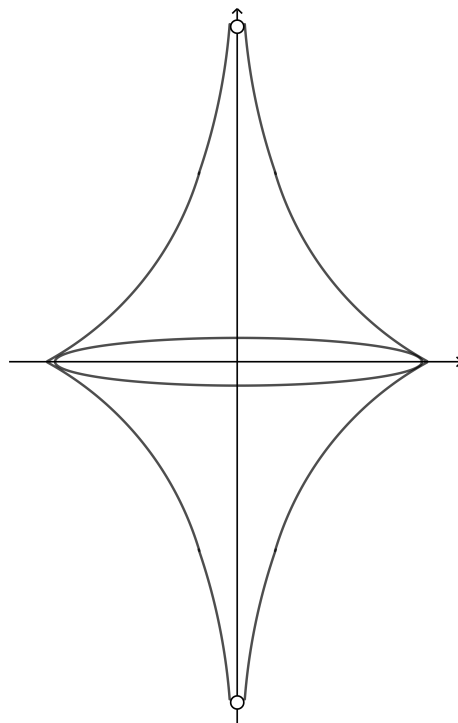
Esfera



Paraboloide

EXEMPLO 6.74. *Pseudo-esfera*

A pseudo-esfera é a superfície obtida girando os dois ramos da tractriz em torno do eixo  $y$ .



Como no exemplo da tractriz

$$1 + f'(x)^2 = a^2/x^2$$

$$A(S)/2 = 2\pi \int_t^a x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_t^a x \sqrt{a^2/x^2} dx = 2\pi a \int_t^a dx = 2\pi a^2 - 2\pi at$$

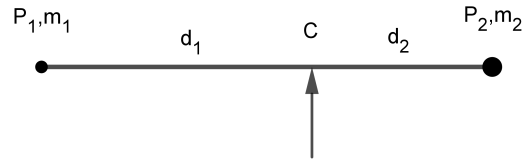
$$A(S) = 4(\pi a^2 - \pi at)$$

Se  $t \rightarrow 0$  então a área total da pseudo-esfera é

$$A(S) = 4\pi a^2$$

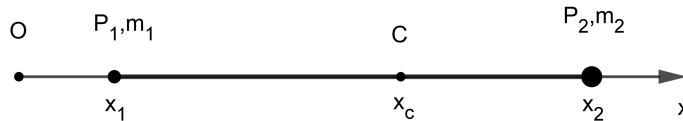
A mesma área da esfera!

**9.5. Momento, Centro de massa e Aplicações.** A ideia elementar de momento é o equilíbrio de dois pontos massivos numa balança como na figura



Para que haja equilíbrio devemos ter  $m_1 d_1 = m_2 d_2$ . O produto  $m_1 d_1$  é chamado de momento do ponto  $P_1$  com massa  $m_1$  em relação a  $C$ . A igualdade dos momentos determina o ponto  $C$  que equilibra as duas massas localizadas nos correspondentes pontos.

Considere agora um sistema de coordenadas que passa pelos dois pontos.



Então

$$m_1 d_1 = m_1 (x_c - x_1) = m_2 (x_2 - x_c) = m_2 d_2$$

$$(m_1 + m_2) x_c = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Definimos o Momento do ponto massivo  $(P_1, m_1)$  em relação ao ponto  $O$  como o produto  $m_1 x_1$ . O momento do sistema dos dois pontos é a soma dos momentos

$$M_O = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

O ponto  $C$  que equilibra o sistema é chamado de centro de massa. Ele é caracterizado como o ponto onde colocando-se a soma das massas tem o mesmo momento em relação ao ponto  $O$  que o do sistema.

DEFINIÇÃO 6.75.

O Momento de um Ponto Massivo  $(P, m)$  em relação a um ponto  $O$  é dado por

$$M_O = m \cdot \overrightarrow{OP}$$

O Momento de um sistema de dois pontos  $(P_1, m_1)$  e  $(P_2, m_2)$  é a soma dos momentos

$$M_O = m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

O Centro de massas é o ponto  $C$  dado por

$$(m_1 + m_2) \cdot \overrightarrow{OC} = m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{OP_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{OP_2}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

Esta igualdade mostra que o ponto  $C$  está sobre o segmento  $\overline{P_1P_2}$ .

Tomando-se  $O = P_1$  tem-se

$$\overrightarrow{P_1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

Substituindo

$$\overrightarrow{P_1C} + \overrightarrow{CP_2} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$\overrightarrow{CP_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}$$

Então

$$m_1 \cdot \overrightarrow{P_1C} = m_2 \cdot \overrightarrow{CP_2}$$

Generalizando,

DEFINIÇÃO 6.76.

O Momento de um sistema de  $n$  pontos  $(P_1, m_1), (P_2, m_2) \dots (P_n, m_n)$  é a soma dos momentos

$$M_O = m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n \cdot \overrightarrow{OP_n}$$

O Centro de massas é o ponto  $C$  dado por

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \cdot \overrightarrow{OC} = m_1 \cdot \overrightarrow{OP_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + \dots + m_n \cdot \overrightarrow{OP_n}$$

$$M_O = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OP_i} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OP_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

PROPOSIÇÃO 6.77.

(1) O centro de massas  $C$  independe do ponto  $O$ .

(2) (Propriedade associativa do centro de massas)

Seja  $1 < k < n$ ,  $C_1$  o centro de massas dos pontos

$$(P_1, m_1), (P_2, m_2) \dots (P_k, m_k)$$

e  $C_2$  o centro de massas dos pontos

$$(P_{k+1}, m_{k+1}), \dots (P_n, m_n)$$

Então

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right) \cdot \overrightarrow{OC} = \left(\sum_{i=1}^k m_i\right) \cdot \overrightarrow{OC_1} + \left(\sum_{i=k+1}^n m_i\right) \cdot \overrightarrow{OC_2}$$

ou seja o ponto  $C$  é também o centro de massa dos pontos massivos  $(C_1, \sum_{i=1}^k m_i), (C_2, \sum_{i=k+1}^n m_i)$ .

DEMONSTRAÇÃO.

(1) Seja  $O'$  um outro ponto.

$$\begin{aligned} M_{O'} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{O'P_i} = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OP_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OC} = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC}) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{O'C} \end{aligned}$$

ou seja para o mesmo ponto  $C$  temos,

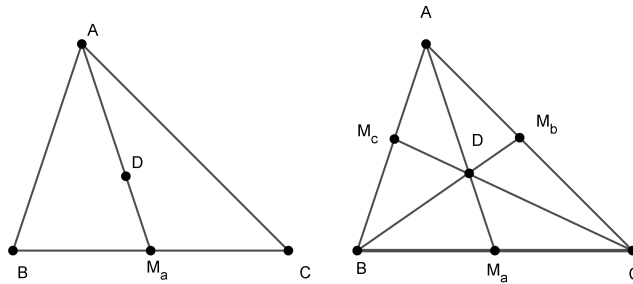
$$\begin{aligned} \vec{O'C} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{O'P_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \\ (2) \quad & \left( \sum_{i=1}^k m_i \right) \cdot \vec{OC_1} + \left( \sum_{i=k+1}^n m_i \right) \cdot \vec{OC_2} = \\ & \sum_{i=1}^k m_i \cdot \vec{OP_i} + \sum_{i=k+1}^n m_i \cdot \vec{OP_i} = \\ & \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OP_i} = \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{OC} \end{aligned}$$

□

**EXEMPLO 6.78.**

As medianas de um triângulo encontram-se num ponto  $D$  o qual divide cada uma delas na razão 2:1.

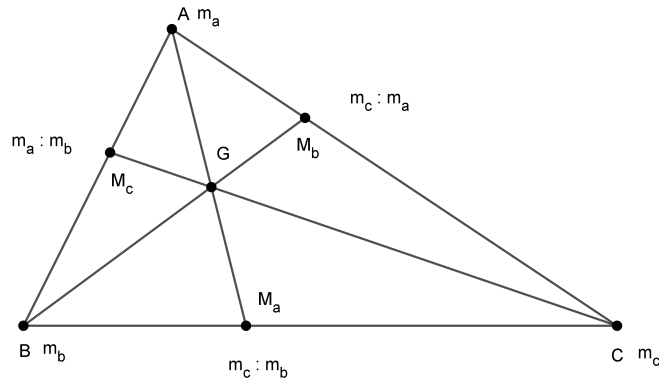
Considere um triângulo  $\triangle ABC$ . Coloquemos massas unitárias em cada vértice e seja  $D$  o centro de massas. O ponto médio  $M_a$  é o centro de massas do pontos  $B$  e  $C$  com massas unitárias. Pela propriedade associativa  $D$  é o centro de massas do ponto  $A$  com massa unitária e do ponto  $M_a$  com massa 2. Portanto  $D$  divide a mediana  $AM_a$  na razão 2:1. Fazendo o mesmo raciocínio para os outros lados concluímos que as medianas encontram-se em  $D$ .

**DEFINIÇÃO 6.79.**

Uma Ceviana de um triângulo é um segmento que começa em um vértice e termina num ponto do lado oposto.

PROPOSIÇÃO 6.80. (*Teorema de Ceva*)

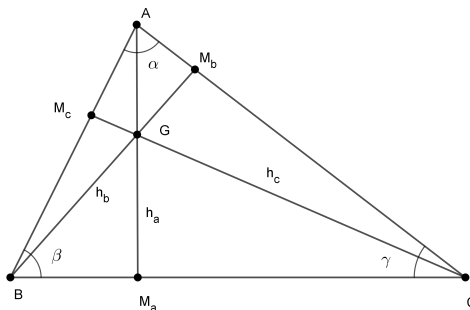
Se no  $\triangle ABC$  o ponto  $M_a$  divide o lado  $BC$  na razão  $m_c : m_b$ ,  $M_b$  divide o lado  $CA$  na razão  $m_c : m_a$ ,  $M_c$  divide o lado  $AB$  na razão  $m_1 : m_2$  então as cevianas  $AM_a$ ,  $BM_b$ ,  $CM_c$  são concorrentes e reciprocamente.



DEMONSTRAÇÃO. o teorema de Ceva é uma consequência da propriedade associativa do centro de massas. Basta colocar massas  $m_a, m_b, m_c$  respectivamente nos vértices  $A, B, C$  do triângulo. As cevianas concorrem no centro de massas  $D$ .  $\square$

O teorema de Ceva tem como casos particulares o encontro das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo. Basta fazer uma escolha conveniente para as massas.

No caso das medianas como vimos no exemplo anterior escolhemos massas iguais, por exemplo unitárias. Para as alturas, seja  $h_a, h_b, h_c$  as alturas correspondentes aos vértices  $A, B, C$ .



Então

$$\operatorname{tg} \alpha = h_c/AM_c \quad \operatorname{tg} \beta = h_c/BM_c$$

Segue que

$$\frac{BM_c}{AM_c} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$$

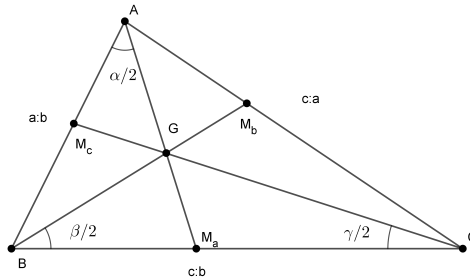
De modo semelhante tem-se

$$\frac{CM_a}{BM_a} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \gamma}$$

$$\frac{AM_b}{CM_b} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Se colocarmos massas  $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta, \operatorname{tg} \gamma$  nos pontos  $A, B, C$  as alturas se cruzam no centro de massa  $G$ .

No caso das bissetrizes usamos o fato da geometria elementar que uma bissetriz divide o lado oposto ao ângulo na mesma proporção dos lados adjacentes. Então de acordo com a figura



$$BM_c/AM_c = a/b \quad CM_a/BM_a = b/c \quad AM_b/CM_b = c/a$$

disto concluímos que o centro de massa  $G$  dos pontos massivos  $(A, a), (B, b), (C, c)$  é o encontro das bissetrizes.

Fixado um sistema de coordenadas com origem no ponto  $O$  então cada ponto  $P_i = (x_i, y_i)$  e o centro de massas  $C = (x_c, y_c)$ . Então

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot \vec{OC} &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{OP}_i \\ \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \cdot (x_c, y_c) &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i, y_i) \end{aligned}$$

Separando as coordenadas



$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)x_c = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i\right)y_c = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

As coordenadas do centro de massas são dadas por

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

DEFINIÇÃO 6.81. Chama-se *Momento em relação ao eixo x* ao número

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

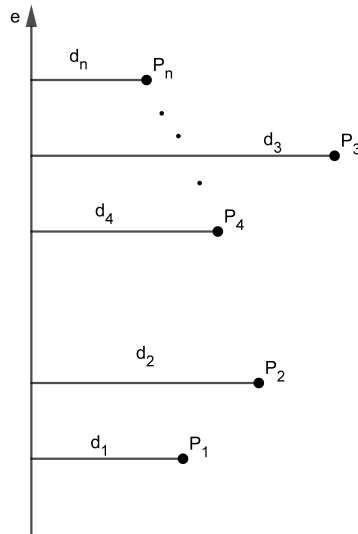
e *Momento em relação ao eixo y*

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

Em geral define-se *Momento em relação a um eixo e* por

$$M_e = \sum_{i=1}^n m_i d_i$$

onde  $d_i$  é a distância de  $P_i$  ao eixo.



Com esta definição as coordenadas do centro de massas são dadas por

$$x_c = \frac{M_y}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_c = \frac{M_x}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

EXEMPLO 6.82. No exemplo anterior vimos que as alturas, as medianas e as bissetrizes de um triângulo encontram-se num ponto  $G$ . Vamos determinar as coordenadas de  $G$  num sistema de coordenadas adequado em cada caso.

Considere o triângulo  $\triangle ABC$  e fixemos um sistema de coordenadas com origem em  $B$  e o primeiro eixo passando pelo lado  $BC$ . As coordenadas do ponto  $A$  é da forma  $A = (a_1, h_a)$  onde  $h_a$  é a altura que corresponde ao ponto  $A$  e  $a_1$  é o pé da altura.

(1) Alturas

O encontro das alturas é o ponto  $G$  centro de massa dos pontos  $(A, \text{tg } \alpha)$ ,  $(B, \text{tg } \beta)$ ,  $(C, \text{tg } \gamma)$ . A coordenada  $y_c$  de  $G$  é então dada de acordo com as fórmulas acima por

$$y_c = \frac{h_a \text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma}$$

(2) Medianas

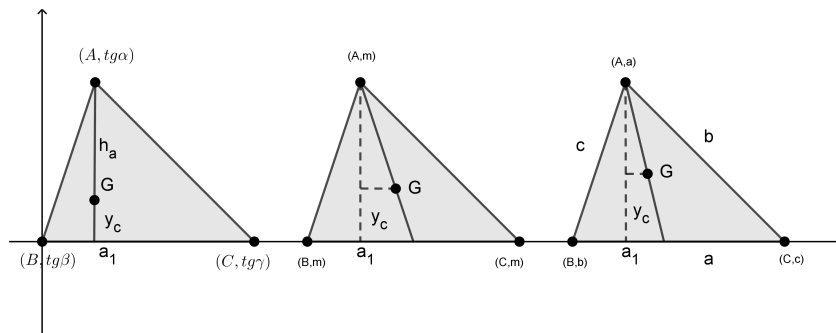
Para as medianas colocamos massas iguais.

$$y_c = \frac{mh_a}{3m} = \frac{h_a}{3}$$

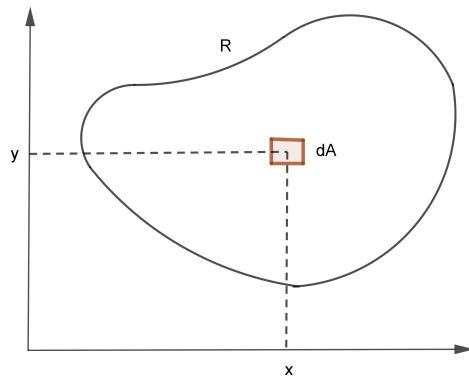
(3) Bissetrizes

As massas são os correspondentes lados.

$$y_c = \frac{ah_a}{a+b+c} = \frac{2A(\triangle)}{a+b+c}$$



A seguir vamos considerar uma distribuição contínua de massa. Começamos com uma distribuição de massa numa região plana  $R$  limitada por uma curva fechada com densidade constante  $\rho$ .

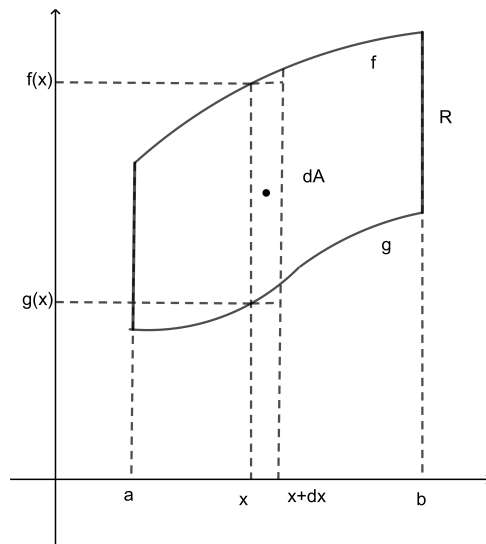


A massa correspondente ao elemento de área  $dA$  é dada por  $dm = \rho dA$ , o momento em relação ao eixo  $x$  é  $dM_x = ydm = y\rho dA$  e em relação ao eixo  $y$   $dM_y = xdm = x\rho dA$ . Então os momentos e o centro de massa são dados por

$$M_x = \int dM_x \quad M_y = \int dM_y \quad m = \int dm$$

$$x_c = M_y/m \quad y_c = M_x/m \quad C = (x_c, y_c)$$

A seguir consideramos a região  $R$  limitada pelo gráfico de duas funções como no caso da área.



$$dA = (f(x) - g(x))dx \quad dm = \rho(f(x) - g(x))dx$$

O centro de massa do retângulo é seu ponto médio então

$$dM_x = \frac{f(x) + g(x)}{2} \rho dA = \frac{f(x) + g(x)}{2} \rho (f(x) - g(x)) dx$$

Portanto

$$dM_x = \rho \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2} dx$$

Por outro lado,

$$dM_y = x \rho dA = x \rho (f(x) - g(x)) dx$$

Assim,

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2} dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x \rho (f(x) - g(x)) dx$$

$$m = \rho \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x \rho (f(x) - g(x)) dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx} \quad y_c = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2} dx}{\int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

As fórmulas acima tem como consequência um bonito teorema devido a Pappus de Alexandria como veremos a seguir.

$$y_c \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{2} dx$$

Multiplicando por  $2\pi$

$$2\pi y_c \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

$$2\pi y_c A(R) = V(S)$$

onde  $S$  é o sólido obtido girando-se a região  $R$  em torno do eixo  $x$ .

Como consequência temos:

**TEOREMA 6.83.** (*Pappus*)

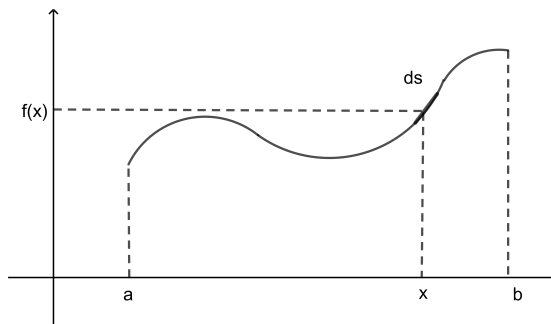
O volume do sólido de revolução girando-se uma região  $R$  em torno do eixo  $x$  é igual ao volume do cilindro com base  $R$  e altura igual ao comprimento da circunferência percorrida pelo centro de massa.

Observamos que poderíamos ter usado a fórmula do momento em relação ao eixo  $y$  para obter o mesmo resultado. Mais geralmente pode-se tomar um eixo qualquer  $e$  e pois basta escolher um sistema de coordenadas onde  $e$  é o primeiro eixo.

EXEMPLO 6.84. *Através do teorema de Pappus pode-se calcular facilmente volumes de sólidos de revolução conhecido o centro de massa e reciprocamente encontrar o centro de massa desde que conhecemos o volume. Num exemplo anterior deduzimos a fórmula do volume do toro onde foi necessário fazer mudança de variáveis e calcular duas integrais. Através do teorema de Pappus obtemos facilmente o mesmo resultado. Lembrando o toro  $T$  é obtido girando-se o círculo de raio  $b$  com centro no ponto  $(a, 0)$  em torno do eixo  $y$ . O centro de massas do círculo é o ponto  $(a, 0)$ . Portanto*

$$V(T) = (\pi b^2)(2\pi a) = 2\pi^2 ab^2$$

Dando continuidade vamos considerar o centro de massa de uma curva plana descrita pelo gráfico de uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Como no caso de uma região plana a densidade uniforme não influi no centro de massa. Assumimos então densidade unitária ou seja a massa coincide com o comprimento.



O momentos de um elemento de arco  $ds$  em relação aos eixos são dados por

$$dM_x = f(x)ds \quad dM_y = xds$$

Integrando obtemos os momentos totais

$$M_x = \int f(x)ds = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

$$M_y = \int x ds = \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

A massa coincide com o comprimento do fio

$$l = m = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Portanto os centros de massa são

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx} \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}$$

Estas fórmulas tem como consequência um segundo teorema de Pappus. Consideremos por exemplo a segunda fórmula,

$$y_c \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

multiplicando por  $2\pi$

$$2\pi y_c \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$$2\pi y_c l = A(S)$$

Portanto,

TEOREMA 6.85. (*Pappus II*)

A área de uma superfície de revolução girando uma curva em torno de um eixo, digamos  $x$  é igual ao produto do comprimento da curva pelo comprimento da circunferência descrita pelo centro de massa.

EXEMPLO 6.86. *Área do Toro*

$$A(T) = 2\pi x_c l = (2\pi a)(2\pi b) = 4\pi ab$$

EXEMPLO 6.87. *Centro de massa de um arco de semicircunferência*

Considere uma semicircunferência com centro na origem e raio  $R$ . A primeira coordenada do centro de massa é  $x_c = 0$  por uma questão de simetria. Para encontrar  $y_c$  aplicamos Pappus.

$$2\pi y_c l = A_x$$

onde  $l$  é o comprimento da semicircunferência e  $A_x$  é a área da esfera obtida girando a semicircunferência em torno do eixo  $x$ .

$$2\pi y_c \pi R = 4\pi R^2$$

$$y_c = \frac{2R}{\pi}$$

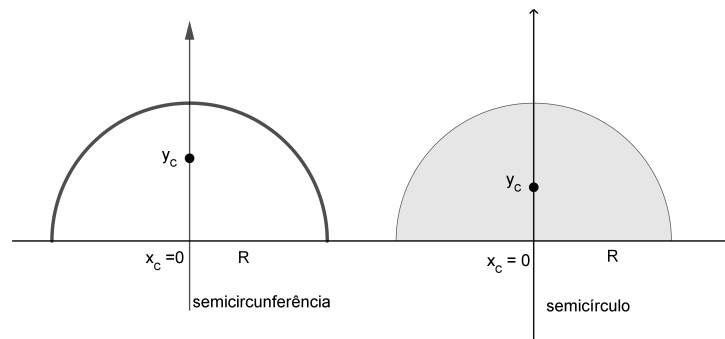
EXEMPLO 6.88. *Centro de massa de um semicírculo*  
Como no exemplo anterior  $x_c = 0$ . Aplicando Pappus

$$2\pi y_c A = V_x$$

$A$  é a área do semicírculo e  $V_x$  o volume da esfera.

$$2\pi y_c \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$y_c = \frac{4R}{3\pi}$$



EXEMPLO 6.89. *Centro de massa de uma região triangular*  
Usando as notações da figura seguinte temos

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

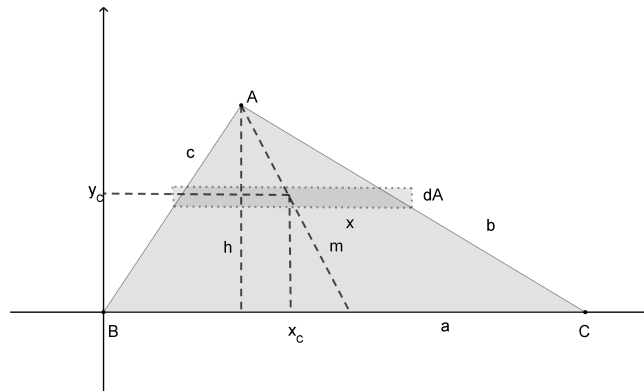
$$x = \frac{a}{h}(h-y)$$

$$M_x = \int_0^h y \frac{a}{h}(h-y) dy = \frac{a}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy$$

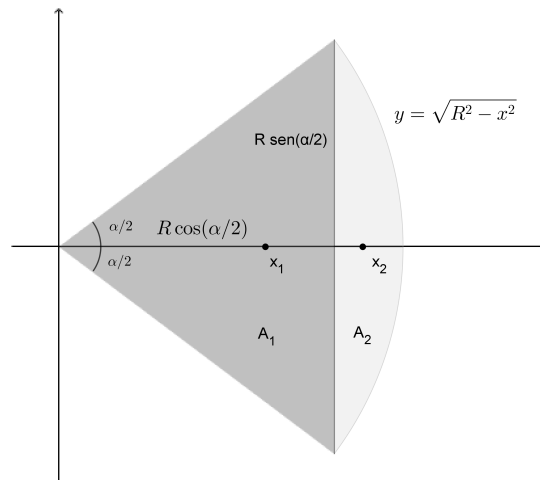
$$M_x = \frac{ah^2}{6}$$

$$y_c = M_x/A = \frac{ah^2/6}{ah/2} = h/3$$

Agora o centro de massa do retângulo  $dA$  é o ponto médio do segmento  $x$ . Assim o centro de massa do triângulo está sobre a mediana numa altura  $h/3$ . Portanto o centro de massa é o encontro das medianas.



EXEMPLO 6.90. Centro de massa de um setor circular



De acordo com a figura seja  $A$  a área do setor.

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \frac{\alpha R^2}{2} \quad A_1 = R^2 \text{sen}(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$$



$$A_2 = R^2(\alpha/2 - \text{sen}(\alpha/2) \cos(\alpha/2))$$

O centro de massa do triângulo isóceles é o ponto  $(x_1, 0)$  sendo

$$x_1 = \frac{2}{3}R \cos(\alpha/2)$$

Já o centro de massa da parte circular é  $(x_2, 0)$ .

$$M_y = \int_{R \cos(\alpha/2)}^R 2x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{2}{3}R^3 \text{sen}^3(\alpha/2)$$

Então

$$A_2 x_2 = \frac{2}{3}R^3 \text{sen}^3(\alpha/2)$$

Pela propriedade associativa

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 = A x_c$$

onde  $(x_c, 0)$  é o centro de massa do setor. Segue que

$$R^2 \text{sen}(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \frac{2}{3}R \cos(\alpha/2) + \frac{2}{3}R^3 \text{sen}^3(\alpha/2) = \frac{\alpha R^2}{2} x_c$$

$$\frac{2}{3}R \text{sen}(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2) + \frac{2}{3}R \text{sen}^3(\alpha/2) = \frac{\alpha}{2} x_c$$

$$\frac{2}{3}R \text{sen}(\alpha/2) = \frac{\alpha}{2} x_c$$

$$x_c = \frac{4R \text{sen}(\alpha/2)}{3\alpha}$$

Em particular se  $\alpha = \pi$  então  $x_c = \frac{4R}{3\alpha}$  que foi encontrado no exemplo do semicírculo.

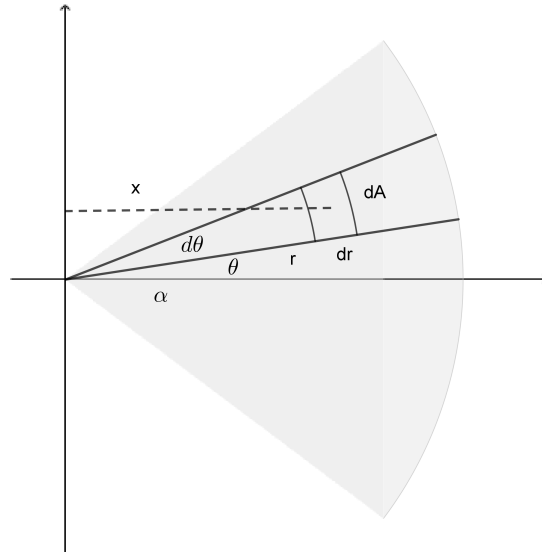
Usando coordenadas polares os cálculos simplificam.

$$dA = r d\theta dr \quad x = r \cos \theta$$

$$dM_y = x dA = r \cos \theta r d\theta dr = r^2 dr \cos \theta d\theta$$

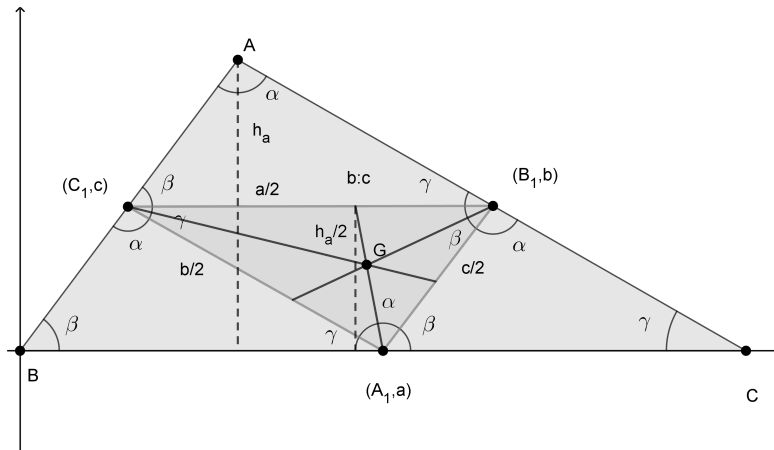
$$M_y = \int_0^R r^2 dr \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \theta d\theta$$

$$M_y = \left(\frac{1}{3}r^3\Big|_0^R\right)(\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2}) = \frac{1}{3}R^3 \operatorname{sen}(\alpha/2)$$



EXEMPLO 6.91. *Centro de massa de um triângulo*

Neste exemplo consideramos o triângulo  $\triangle ABC$  como a reunião de seus lados com densidade linear  $\rho = 1$ . Com isto o centro de massa de cada lado é seu ponto médio com massa o seu comprimento. Seguindo a figura seguinte



Então o centro de massa do  $\triangle ABC$  é igual ao centro de massa do  $\triangle A_1B_1C_1$  com massas  $a, b, c$ . Como os lados do  $\triangle A_1B_1C_1$  são respectivamente  $a/2, b/2, c/2$  então o seu centro  $G$  e

portanto do  $\triangle ABC$  é o encontro das bissetrizes. A altura  $y_c$  em de  $G$  relação ao lado  $BC$  é dada por

$$M_x = \frac{bh}{2} + \frac{ch}{2} = \frac{h(b+c)}{2}$$

$$(a+b+c)y_c = \frac{h(b+c)}{2}$$

$$y_c = \frac{h(b+c)}{2(a+b+c)}$$

aqui  $h = h_a$  para simplificar as fórmulas.

É interessante considerar a altura  $\bar{y}_c$  do centro de massa em relação à base  $B_1C_1$ .

$$\bar{y}_c = \frac{h}{2} - y_c = \frac{ha}{2(a+b+c)} = \frac{A(\triangle)}{2(a+b+c)} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{4s}$$

Se  $s = (a+b+c)/2$  é o semiperímetro pela fórmula de Heron

$$\bar{y}_c = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{4s}$$

## 10. Exercícios

### 10.1. Integrais.

(1) sejam  $A, B \subset \mathbb{R}$  subconjuntos limitados e  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções limitadas. Defina  $A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$ ,  $A \leq B$  se  $a \leq b$  quaisquer que sejam  $a \in A$  e  $b \in B$ ,  $c \cdot A = \{c \cdot a : a \in A\}$ ,  $\sup f = \sup\{f(x) : x \in X\}$  e mostre que:

- Se  $A \subset B$  então  $\sup A \leq \sup B$  e  $\inf A \geq \inf B$ ,
- Se  $A \leq B$  então  $\sup A \leq \inf B$ ,
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  e  $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ,
- Se  $c > 0$  então  $\sup c \cdot A = c \cdot \sup A$  e  $\inf c \cdot A = c \cdot \inf A$ ,
- Se  $c < 0$  então  $\sup c \cdot A = c \cdot \inf A$  e  $\inf c \cdot A = c \cdot \sup A$ ,
- $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$  e  $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ ,
- Se  $c > 0$  então  $\sup(c \cdot f) = c \cdot \sup f$  e  $\inf(c \cdot f) = c \cdot \inf f$ ,
- Se  $c < 0$  então  $\sup(c \cdot f) = c \cdot \inf f$  e  $\inf(c \cdot f) = c \cdot \sup f$ ,
- Dê exemplo de funções tais que  $\sup(f + g) < \sup f + \sup g$  e  $\inf(f + g) > \inf f + \inf g$ .
- $\sup\{|x - y| : x, y \in A\} = \sup A - \inf A$

- (2) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. Seja  $P_n$  a partição que divide o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes iguais. Mostre que  $S(f, P_n) - s(f, P_n) = (f(b) - f(a))(b - a)/n$  e conclua disto que  $f$  é integrável.
- (3) Considere a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Seja  $P_n$  a partição do intervalo  $[0, 2]$  em  $n$  partes iguais.

- a) Calcule  $s(f, P_n)$  e  $S(f, P_n)$  para  $n = 4, 5, 6, 7$ ;
- b) Dê uma expressão para  $s(f, P_n)$  e  $S(f, P_n)$  para  $n = 2k$  e  $n = 2k + 1$  ( $n$  par ou ímpar);
- c) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n)$ .
- (4) Considere a função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{n} \\ 2, & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

onde  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que  $f$  é integrável e calcule sua integral.

- (5) Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (6) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável e positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma função crescente.

- (7) Para as funções  $f$  abaixo, responda as seguintes perguntas:

- Faça um gráfico de  $f$ .
- Encontre a função  $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ ,  $t \in [0, 2]$ .
- Determine os pontos onde  $F$  é derivável e neles calcule  $F'(t)$ .

- a)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

b)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

c)  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

(8) Calcule a área da região:

- a) limitada pela reta  $y = 2x + 1$  e pela curva  $y = x^2$ ;
- b) limitada pelas curvas  $y = 1 - x^2$  e  $y = x^2 - 1$ ;
- c) limitada pelos gráficos de  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x^3$  e por  $x = 2$ ;
- d) limitada pelas curvas  $y = x^2 - x$ ,  $x = 2$  e  $y = 0$ .

(9) Seja  $f$  uma função contínua tal que  $f(x) = f(-x)$ . Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

(10) Seja  $f$  uma função contínua tal que  $f(-x) = -f(x)$ . Mostre que

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

(11) Se  $f$  é derivável e  $f'$  é contínua, mostre que

$$2 \int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

(12) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

(a) Se  $f$  e  $g$  são contínuas então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

(b)

$$\int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$$

(c) Uma primitiva de  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  é  $F(x) = \ln(|\sec(x)|)$ .

(13) Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_0^{1+x^2} 1/(2 + \operatorname{sen} t)dt$$

(14) Se  $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \operatorname{sen}(\pi x)$ , onde  $f$  é contínua, determine  $f(4)$ .

(15) Ache uma função contínua  $f$  tal que

$$\int_0^x t f(t) dt = \operatorname{sen} x - x \cos x - x^2/2$$

(16) Seja  $f$  uma função derivável e inversível definida no intervalo  $[a, b]$ . Mostre que

$$\int_a^b f(t) dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t) dt = bf(b) - af(a)$$

(17) Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1+t^2) dt$$

(18) Se  $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$  use integração por partes para exprimir a integral  $\int_0^x f(x) dx$  em termos de  $f$ . Calcule  $\int_0^1 f(x) dx$ .

(19) Se  $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x \operatorname{sen} t^2 dt$  exprima a integral  $\int_0^x f(x) dx$  em termos de  $f$ . Calcule  $\int_0^{\sqrt{\pi}} f(x) dx$ .

(20) Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_{x^3}^{\pi} \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$$

e determine  $f^{-1}(0)$ .

(21) Derive as seguintes funções:

(a)  $g(x) = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t} dt$

(b)  $h(x) = \operatorname{sen} \left( \int_0^{2x} \operatorname{sen} \left( \int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt \right) dy \right)$ .

(22) Seja  $h : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável.

Mostre através de uma integração por partes que

$$\int_0^a \left( \int_0^x h(y) dy \right) dx = \int_0^a (a-y) h(y) dy$$

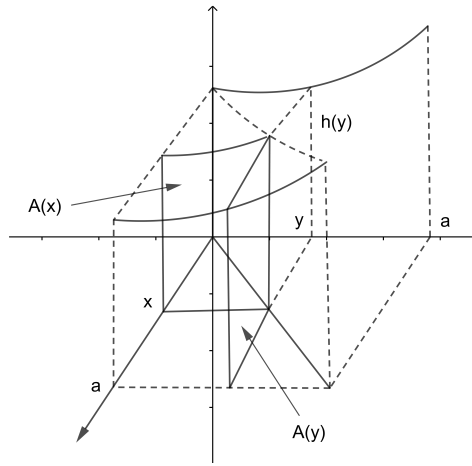
Este exercício é generalizado da seguinte forma.

- (23) Seja  $f : [0, b] \rightarrow [0, d]$  uma função contínua e inversível e  $h : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável.

Mostre através de uma integração por partes que

$$\int_0^b \left( \int_0^{f(x)} h(y) dy \right) dx = \int_0^d (b - f^{-1}(y)) h(y) dy$$

- (24) Use o exercício 22) para resolver os problemas 18) e 19).  
 (25) O exercício 22) tem a seguinte interpretação geométrica.



Seja  $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq a\}$  e  $S$  o sólido que com base  $B$  e cuja secção transversal ao eixo  $y$  passando por  $y$  é um retângulo cuja altura é  $h(y)$ .

- (a) Então o volume de  $S$  é dado por

$$V = \int_0^a (a - y) h(y) dy$$

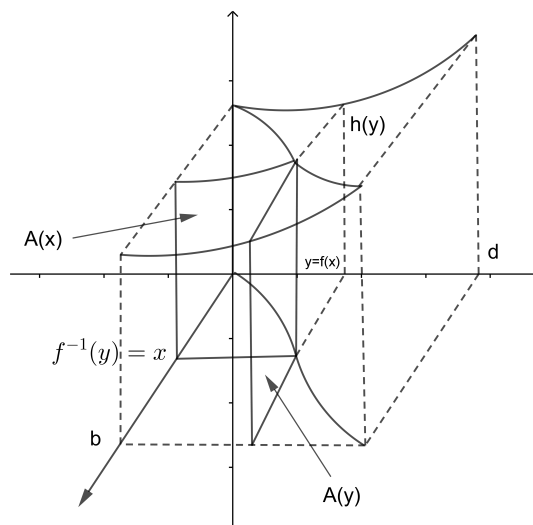
- (b) A área da secção transversal ao eixo  $x$  é dada por  $A(x) = \int_0^x h(y) dy$  e portanto o volume também é dado por

$$V = \int_0^a A(x) dx$$

- (c) Segue que

$$\int_0^a (a - y) h(y) dy = \int_0^a \left( \int_0^x h(y) dy \right) dx$$

- (26) Observe a figura e dê uma interpretação geométrica para o exercício 23).



### 10.2. Cálculo com Integrais.

(1) Calcule as integrais abaixo:

$$1) \int \frac{x^7 + x^2 + 1}{x^2} dx$$

$$5) \int e^{2x} dx$$

$$2) \int \cos(7x) dx$$

$$6) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$3) \int \frac{7}{x-2} dx$$

$$7) \int \log_a x dx$$

$$4) \int \operatorname{tg}^2 x dx$$

$$8) \int a^x dx$$

(2) Calcule usando integral por partes:



1)  $\int x^2 e^x dx$

4)  $\int e^x \cos x dx$

2)  $\int x^2 e^x dx$

5)  $\int x^r \ln x dx$

3)  $\int \sec^3 x dx$

6)  $\int x e^{-x} dx$

(3) Através de uma mudança de variável encontre as integrais abaixo:

1)  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

2)  $\int e^x \cos x dx$

3)  $\int 2x(x+1)^{2010} dx$

4)  $\int x^r \ln x dx, r \in \mathbb{R}$

5)  $\int \operatorname{tg}^3 x dx$

6)  $\int \cos^3 x dx$

7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a > 0$

8)  $\int \frac{x^3}{(4x^2 + 9)^{3/2}} dx$

9)  $\int x^5 e^{-x^3} dx$

10)  $\int \operatorname{tg}^6 x \operatorname{sec}^4 x dx$

11)  $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

12)  $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 2}} dx$

13)  $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\operatorname{cos} x}} dx$

14)  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

15)  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

16)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

17)  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

18)  $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{cos}^2 x} dx$

19)  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

20)  $\int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} dx$

21)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

22)  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$

23)  $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} dx$

24)  $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$

25)  $\int \frac{x}{x^2-4} dx$

(4) Encontre as integrais abaixo pelo método das frações parciais:

1)  $\int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

2)  $\int \frac{3x^2 + 4x + 5}{(x-1)^2(x-2)} dx$

3)  $\int \frac{x^5 + x + 1}{x^3 - 8} dx$

4)  $\int \frac{2}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} dx$

5)  $\int \frac{3x^2 + 5x + 4}{x^3 + x^2 + x - 3} dx$

6)  $\int \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 4)^2} dx$

7)  $\int \frac{4x^2 - 3x + 3}{(x^2 - 2x + 2)(x + 1)} dx$

8)  $\int \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 4)} dx$

**10.3. Aplicações do Cálculo Integral.**

- (1) Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo  $x$  a região limitada pelas funções  $y = x^2 - 4x + 5$  e  $y = -x^2 + 6x - 3$ .
- (2) Gire a região do exercício 1 em torno do eixo  $y$  e encontre seu volume.
- (3) Um sólido tem como base a elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  e cada secção ortogonal ao semi eixo maior é um semi círculo. Ache seu volume.
- (4) Considere a região limitada pela hipérbole  $y = 1/ax$  e pelas retas  $x = 1/a$  e  $x = a$  para  $a \geq 1$ . Para que valor de  $a$  o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo  $x$  é máximo?
- (5) Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo  $x$  a região limitada por  $y = (x - 2)^2$  e  $y = (x - 2)^2/2 + 2$ .
- (6) Determine o comprimento das curvas:
- $y = x^4/4 + 1/8x^2$
  - $y = \ln(\cos x)$  para  $0 \leq x \leq \pi/4$
  - $y = x^{n+1}/(n+1) + 1/4(n-1)x^{n-1}$  para  $a \leq x \leq b$  onde  $a > 0$
  - $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
- (7) Determine a área da superfície de revolução girando-se as curvas abaixo em torno do eixo indicado:
- $y = x^3$  onde  $0 \leq x \leq a$  e eixo  $x$
  - $y = x^2$  onde  $0 \leq x \leq 2$  e eixo  $y$
  - $y = \sqrt{x}$  onde  $1 \leq x \leq a$  e eixo  $x$
  - $y = x^4/4 + 1/8x^2$  onde  $1 \leq x \leq 2$  e eixo  $y$
- (8) Sejam  $a < b$ . Calcule o centro de massa do semi-anel limitado pelas circunferências:
- $$x^2 + y^2 = a^2 \quad e \quad x^2 + y^2 = b^2$$
- (9) Mostre, usando centro de massa, que as medianas de um triângulo se interceptam num ponto e este divide cada uma delas na razão de 2 : 1.

(10) Determine o centro de massa da região limitada pelas parábolas:

$$y = \frac{x^2}{4} \quad e \quad x = \frac{y^2}{4}$$

(11) Determine o centro de massa do arco da parábola:

$$y = x^2; \quad -a \leq x \leq a$$

(12) Determine o centro de massa de um setor circular de raio  $R$  e ângulo  $\alpha$ .

## CAPÍTULO 7

### Curvas

Neste capítulo definimos curvas planas e espaciais e estudamos suas propriedades analíticas. Através delas descrevemos movimento e as grandezas que deles derivam.

#### 1. Curvas

DEFINIÇÃO 7.1.

*Chamamos de Curva Plana uma aplicação diferenciável até a ordem dois*

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

*e Curva no Espaço uma aplicação diferenciável até a ordem dois*

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*Vamos escrever*

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*para englobar os dois casos acima.*

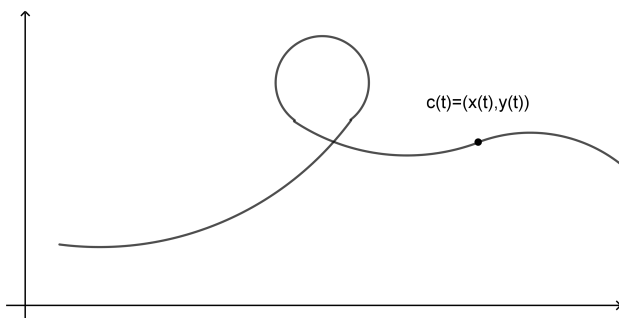
Em coordenadas

$$c(t) = (x(t), y(t))$$

ou

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

As funções  $x(t), y(t), z(t)$  são chamadas de componentes da curva. Elas são pela própria definição funções que admitem derivadas até ordem dois.



A interpretação cinemática de uma curva é de um movimento de um ponto. O intervalo  $I$  é o intervalo de duração do movimento e  $c(t)$  é a posição no instante  $t$ . A imagem da curva

$$Im(c) = \{c(t) : t \in I\}$$

é a trajetória percorrida pelo ponto também chamada de traço da curva.

O sistema de equações

$$c \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

é chamado de equações paramétricas da curva.

EXEMPLO 7.2. *Retas*

$$c(t) = p + vt$$

*Reta que passa por  $p$  com velocidade  $v$ .*

(1) Se  $p = (x_0, y_0)$  e  $v = (a, b)$  a reta é plana.

$$c(t) = (x_0, y_0) + (a, b)t$$

*As equações paramétricas são*

$$c \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

*Então*

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

*que é a equação geral da trajetória.*

(2) Se  $p = (x_0, y_0, z_0)$  e  $v = (a, b, c)$  a reta está no espaço.

$$c \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Eliminando  $t$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

EXEMPLO 7.3. *Circunferências*

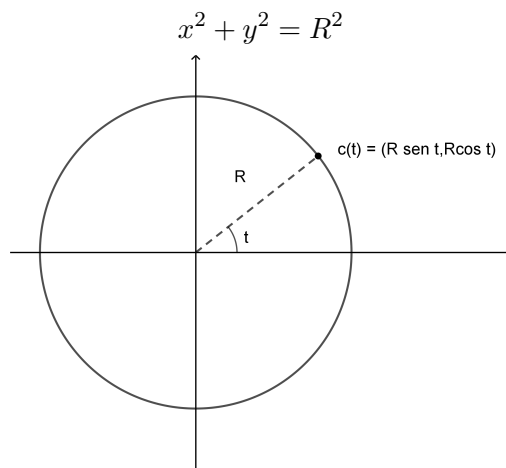
$$c(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

$R > 0$ .

Equações paramétricas:

$$c \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}$$

Equação geral



EXEMPLO 7.4. *Elipses*

$$c(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

Equações paramétricas:

$$c \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$

*Equação geral*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

EXEMPLO 7.5. *Hélices*

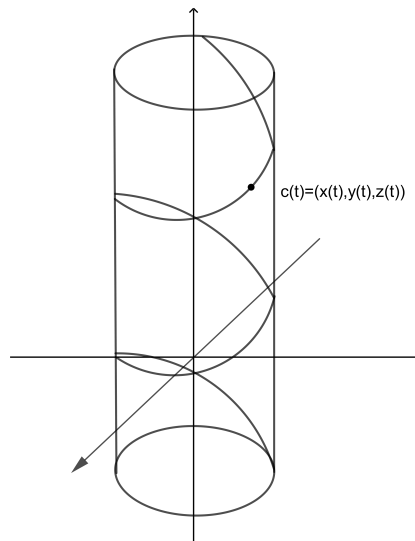
$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$a > 0$ .

*Equações paramétricas:*

$$c \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$$

Observe que como  $x^2 + y^2 = a^2$  a curva está sobre o cilindro com raio  $a$  e eixo o eixo  $z$ .

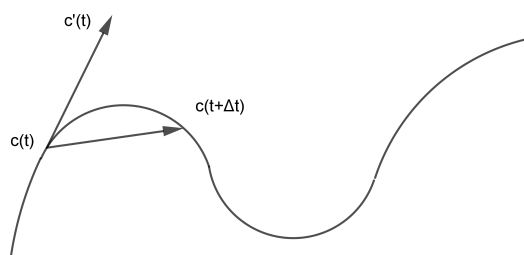


DEFINIÇÃO 7.6. *A Derivada de uma curva  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  em  $t \in I$  é o limite*

$$\frac{dc}{dt} = c'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t}$$

*caso o limite exista.*





Em coordenadas a derivada da curva tem a seguinte expressão

$$\frac{dc}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

ou em termos da base canônica do  $\mathbb{R}^3$ :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dx}{dt}e_1 + \frac{dy}{dt}e_2 + \frac{dz}{dt}e_3$$

A reta tangente à curva no instante  $t_0$  é a reta

$$r(t) = c(t_0) + c'(t_0)t$$

Fórmulas análogas valem para curvas planas.

As propriedades seguintes de curvas são consequência das mesmas propriedades que suas componentes verificam.

**PROPOSIÇÃO 7.7.** *Sejam  $r, c$  curvas e  $f$  uma função diferenciável. Então*

$$(1) (c + r)' = c' + r'$$

$$(2) (f \cdot c)' = f' \cdot c + f \cdot c'$$

$$(3) \langle c, r \rangle = \langle c', r \rangle + \langle c, r' \rangle$$

$$(4) (c \wedge r)' = c' \wedge r + c \wedge r'$$

(5) *(Regra da Cadeia) Se  $c : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva diferenciável  $u \in J \rightarrow c(u) \in \mathbb{R}^n$  e  $u : I \rightarrow J$  uma função derivável  $t \in I \rightarrow u(t) \in J$  então a função composta*

$$r(t) = c(u(t))$$

*é diferenciável e vale*

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{dc}{du}(u(t)) \frac{du}{dt}(t)$$

$r(t) = c(u(t))$  é chamada de uma reparametrização da curva  $c$  pois se a função  $u$  é bijetora então as imagens das curvas são as mesmas. Portanto o que foi feito foi mudar do parâmetro  $u$  para  $t$ .

EXEMPLO 7.8. Se  $c(t) = (R \cos t, R \sin t)$  então  $c'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ . Observe que  $c'(t) \perp c(t)$  como sabemos a tangente à circunferência é perpendicular ao raio.

A reta tangente á circunferência em  $c(t_0)$  é dada por

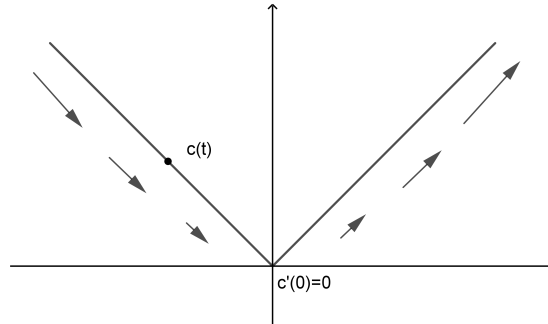
$$r(t) = (R \cos t_0, R \sin t_0) + (-R \sin t_0, R \cos t_0)t$$

EXEMPLO 7.9. Se  $c(t) = (t^3, t^2|t|)$  então suas equações paramétricas são

$$c \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2|t| \end{cases}$$

que são funções diferenciáveis até ordem dois.

A equação geral é a função  $y = |x|$  que não é diferenciável! Isto acontece porque  $c'(0) = 0$ . Do ponto de vista da cinemática a única maneira de um ponto mudar bruscamente de direção é parando.



**1.1. Comprimento de Arco.** Seja  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva e  $P$  uma partição do intervalo  $[a, b]$

$$P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad |P| = \max \Delta t_i$$

$$l(P) = \sum_{i=1}^m \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$$

$l(P)$  é o comprimento da linha poligonal que tem como vértices os pontos da curva  $c(t_i)$ .

Define-se como comprimento da curva o número

$$l(c) = \lim_{P \rightarrow 0} l(P)$$

Então

$$l(c) = \lim_{|P| \rightarrow 0} l(P) = \sum_{i=1}^m \frac{\|c(t_i) - c(t_{i-1})\|}{\Delta t_i} \Delta t_i$$

$$l(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

Se a curva descreve o movimento de um ponto então  $c(t)$  é a posição no instante  $t$ , a derivada  $\frac{dc}{dt}(t)$  sendo a taxa de variação da posição relativa ao tempo é a velocidade no instante  $t$ . O módulo da velocidade é a velocidade escalar

$$v(t) = \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\|$$

Define-se a *Função comprimento de Arco* por

$$s(t) = \int_a^t \|c'(t)\| dt$$

$s(t)$  é a distância percorrida até o instante  $t$ .

Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| = v(t)$$

ou seja a derivada do espaço em relação ao tempo é igual a velocidade.

EXEMPLO 7.10. *Considere a seguinte parametrização da circunferência de raio  $R$ :*

$$c(t) = (R \cos \omega(t), R \sin \omega(t))$$

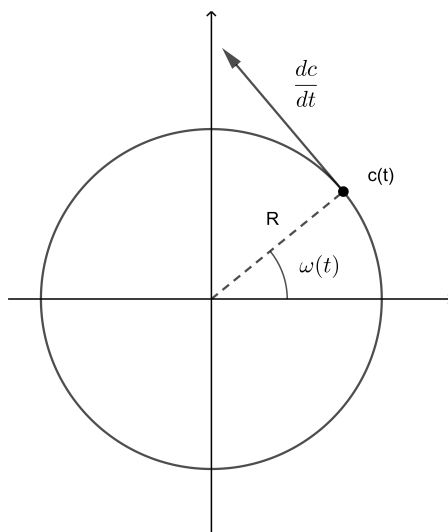
onde  $\omega(t)$  é uma função diferenciável.

$$\frac{dc}{dt}(t) = (-R \sin \omega(t), R \cos \omega(t)) \omega'(t)$$

$$v(t) = \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\| = R \omega'(t)$$

Reconhecemos aqui que  $\omega'(t)$  nada mais é do que a velocidade angular.

$$s(t) = \int_a^t \|c'(t)\| dt = R \omega(t)$$



DEFINIÇÃO 7.11.

Uma curva diz-se Regular se  $c'(t) \neq 0$ . Diremos que uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco (pca) se  $\|c'(t)\| = 1$ . Neste caso como  $s = t$  vamos usar como parâmetro  $s$ .

Claramente de uma curva é pca então ela é regular.

Reciprocamente se ela é regular então  $v(t) = \|c'(t)\| > 0$ . Como  $s'(t) = v(t) > 0$  a função comprimento de arco  $s : [a, b] \rightarrow [0, l(c)]$  é inversível. Seja  $t : [0, l(c)] \rightarrow [a, b]$  a sua inversa. Se

$$r(s) = c(t(s))$$

então

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dc}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$\left\| \frac{dr}{ds} \right\| = \left\| \frac{dc}{dt} \right\| \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1$$

ou seja  $r$  é uma reparametrização de  $c$  sendo  $r$  parametrizada pelo comprimento de arco.

**1.2. Fórmulas de Frenet para Curvas Planas.** Seja

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos usar a notação simplificada para a derivada  $\dot{c}(s) = c'(s)$ .

Definimos

$$e_1(s) = \dot{c}(s)$$

$$e_2(s) \perp e_1(s)$$

tais que  $(e_1(s), e_2(s))$  é uma base ortonormal positiva do  $\mathbb{R}^2$ . Então temos as relações

$$\begin{cases} e_1 \cdot e_1 = 1 \\ e_1 \cdot e_2 = 0 \\ e_2 \cdot e_2 = 1 \end{cases}$$

(Aqui o ponto significa produto escalar para simplificar a notação.)

Vamos abreviar estas relações escrevendo

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

onde  $(\delta_{ij})$  é a matriz identidade.

Derivando a primeira igualdade

$$2 \frac{de_1}{ds} \cdot e_1 = 0$$

Portanto  $\frac{de_1}{ds} \perp e_1$ . Segue que

$$\frac{de_1}{ds}(s) = k(s)e_2(s)$$

O número  $k(s)$  é chamada de *Curvatura* da curva em  $s$ . Intuitivamente a curvatura mede a taxa de rotação do vetor tangente  $e_1$  com relação ao comprimento de arco.

Derivando a segunda igualdade

$$\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 + \frac{de_2}{ds} \cdot e_1 = 0$$

$$\frac{de_2}{ds} \cdot e_1 = -k(s)$$

$$\frac{de_2}{ds}(s) = -k(s)e_1(s)$$

Resumindo,

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = ke_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -ke_1 \end{cases}$$

Estas são chamadas de fórmulas de Frenet da curva plana.

Em termos de matrizes elas são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{de_1}{ds} & \frac{de_2}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.3. Interpretação Cinemática.

Interpretemos uma curva  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  como o movimento de um ponto no plano.

Então

$c(t)$  = posição no instante  $t$ .

$\frac{dc}{dt}(t)$  = velocidade no instante  $t$ .

$v(t) = \left\| \frac{dc}{dt}(t) \right\|$  = velocidade escalar.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{ds} \frac{ds}{dt} = ve_1$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{dv}{dt}e_1 + v \frac{de_1}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{dv}{dt}e_1 + kv^2e_2$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}e_1 + kv^2e_2$$

Pelas definições de aceleração temos

$a(t) = \frac{d^2c}{dt^2}(t)$  = aceleração no instante  $t$ .

$a_t = \frac{d^2s}{dt^2}$  = aceleração tangencial.

$a_c = kv^2$  = aceleração centrípeta.

Através das relações acima podemos deduzir uma fórmula para a curvatura.

$$c'(t) = ve_1$$

$$c''(t) = s''(t)e_1 + kv^2e_2$$

Fazendo o produto vetorial

$$\|c'(t) \wedge c''(t)\| = kv^3$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \wedge c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$$

EXEMPLO 7.12. (*Movimento circular*)

*O movimento circular uniforme é descrito pela curva*

$$c(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$$

*O ângulo em função do tempo é*

$$\omega(t) = \omega t$$

*A velocidade angular  $\omega'(t) = \omega$  é constante igual a  $\omega$ .*

$$c'(t) = R\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t) = R\omega e_1$$

*A velocidade escalar e o comprimento de arco são dados por*

$$v = R\omega \quad s(t) = R\omega t$$

$$c''(t) = R\omega^2(-\cos \omega t, \sin \omega t) = R\omega^2 e_2$$

*Portanto a aceleração tangencial é nula e a centrípeta é*

$$a_c = R\omega^2 = v^2/R$$

*A parametrização pelo comprimento de arco é*

$$c(s) = (R \cos s/R, R \sin s/R)$$

$$c'(s) = (-\sin s/R, \cos s/R) = e_1$$

$$c'(s) = (1/R)(-\cos s/R, \sin s/R) = 1/R e_2$$

A circunferência tem curvatura constante igual a

$$k = 1/R$$

EXEMPLO 7.13. *Vamos mostrar a recíproca. Se uma curva tem curvatura constante então a curva é uma circunferência.*

Seja

$$C(s) = c(s) + \frac{1}{k} e_2(s)$$

Derivando,

$$C'(s) = c'(s) + \frac{1}{k}(-k e_1(s)) = e_1(s) - e_1(s) = 0$$

Portanto  $C = C(s)$  é constante. Segue disto que

$$\|c(s) - C\| = \left|\frac{1}{k}\right|$$

Desta forma  $c(s)$  parametriza a circunferência com centro  $C$  e raio  $R = \left|\frac{1}{k}\right|$ .

EXEMPLO 7.14. *(Curvatura da Elipse)*

O comprimento de arco da elipse  $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

Se  $a \neq b$  esta é uma integral elíptica e não é possível expressi-la em termos das funções elementares, assim como a parametrização pelo comprimento de arco da elipse. Para exprimir a curvatura usamos a fórmula deduzida acima.

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \wedge c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \frac{ab}{(\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t})^3}$$



#### 1.4. Fórmulas de Frenet para Curvas no Espaço.

DEFINIÇÃO 7.15. *Uma curva*

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

*diz-se de Frenet se  $(c'(t), c''(t))$  são linearmente independentes para todo  $t$ .*

Para uma curva ser de Frenet basta que ela seja regular e  $c''(t) \neq 0$ .

No que segue  $c$  é uma curva de Frenet parametrizada pelo comprimento de arco.

Derivando a relação  $c' \cdot c' = 1$  tem-se  $c'' \cdot c' = 0$  ou seja  $c'' \perp c'$ .

DEFINIÇÃO 7.16. *Chama-se Referencial de Frenet da curva a terna de campo de vetores  $(e_1, e_2, e_3)$  ao longo da curva definido por*

$$e_1(s) = c'(s) \quad e_2(s) = c''(s)/\|c''(s)\| \quad e_3(s) = e_1(s) \wedge e_2(s)$$

Para cada  $s$  a terna  $(e_1(s), e_2(s), e_3(s))$  é ortonormal. Derivando as relações

$$e_i(s) \cdot e_j(s) = \delta_{ij}$$

temos

$$\frac{de_i}{ds} \cdot e_j + \frac{de_j}{ds} \cdot e_i = 0$$

A *Curvatura* de  $c$  é a função

$$k(s) = \|c''(s)\|$$

Segue que

$$\frac{de_1}{ds} = c'' = ke_2$$

Como

$$\frac{de_i}{ds} \cdot e_j = -\frac{de_j}{ds} \cdot e_i$$

então

$$\frac{de_2}{ds} \cdot e_1 = -\frac{de_1}{ds} \cdot e_2 = -k$$

$$\frac{de_2}{ds} \cdot e_2 = 0$$

Segue que

$$\frac{de_2}{ds} = -ke_1 + \tau e_3$$

Para alguma função  $\tau$ .

Com os mesmos argumentos mostramos que

$$\frac{de_3}{ds} = -\tau e_2$$

A função  $\tau$  é chamada de *Torção* da curva.

As fórmulas

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = ke_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -ke_1 + \tau e_3 \\ \frac{de_3}{ds} = -\tau e_2 \end{cases}$$

são conhecidas como equações de Frenet da curva.

Usando matrizes elas adquirem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{de_1}{ds} & \frac{de_2}{ds} & \frac{de_3}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz é antisimétrica por causa das relações

$$\frac{de_i}{ds} \cdot e_j = -\frac{de_j}{ds} \cdot e_i$$

EXEMPLO 7.17. *Hélices*

A curva

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

descreve uma hélice no cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .

$$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

$$s = ct$$

A parametrizando pelo comprimento de arco

$$c(s) = (a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c)$$

$$c'(s) = (-a/c \sin(s/c), a/c \cos(s/c), b/c)$$

$$c''(s) = (-a/c^2 \cos(s/c), -a/c^2 \sin(s/c), 0)$$

$$k = \|c''(s)\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

O referencial de Frenet é

$$e_1 = (-a/c \sin(s/c), a/c \cos(s/c), b/c)$$

$$e_2 = (-\cos(s/c), -\sin(s/c), 0)$$

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = (b/c \sin(s/c), -b/c \cos(s/c), a/c)$$

$$\frac{de_3}{ds} = (b/c^2 \cos(s/c), -b/c^2 \sin(s/c), 0)$$

$$\frac{de_3}{ds} = -b/c^2 e_2$$

Concluimos que

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \tau = b/c^2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

As equações de Frenet são

$$\begin{cases} \frac{de_1}{ds} = \frac{a}{a^2 + b^2} e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -\frac{a}{a^2 + b^2} e_1 + \frac{b}{a^2 + b^2} e_3 \\ \frac{de_3}{ds} = -\frac{b}{a^2 + b^2} e_2 \end{cases}$$

### 1.5. Fórmulas par a Curvatura e Torção.

Seja  $c(t)$  uma parametrização de uma curva no espaço. Então  $c(t) = c(s(t))$ . Aqui por simplicidade estamos usando a mesma letra  $c$  para indicar a curva também parametrizada pelo comprimento de arco.

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{ds} \frac{ds}{dt} = ve_1$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{dv}{dt}e_1 + v \frac{de_1}{ds} \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{dv}{dt}e_1 + kv^2e_2$$

$$\frac{d^2c}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2}e_1 + kv^2e_2$$

A derivada terceira é dada por

$$\frac{d^3c}{dt^3} = \square e_1 + \square e_2 + kv^2 \frac{de_2}{dt}$$

onde os coeficientes  $\square$  não serão usados.

$$\frac{d^3c}{dt^3} = \square e_1 + \square e_2 + kv^2 \frac{de_2}{ds} v$$

$$\frac{d^3c}{dt^3} = \square e_1 + \square e_2 + \tau kv^3 e_3$$

Em resumo as derivadas de  $c$  são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} c'(t) = ve_1 \\ c''(t) = v'(t)e_1 + kv^2e_2 \\ c'''(t) = \square e_1 + \square e_2 + \tau kv^3e_3 \end{array} \right.$$

O produto vetorial das duas primeiras equações nos dá

$$\|c'(t) \wedge c''(t)\| = kv^3$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|c'(t) \wedge c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$$

Por outro lado o produto misto das três equações conduz a uma fórmula para a torção

$$(c'(t) \wedge c''(t)) \cdot c''' = \tau k^2 v^6 = \tau \|c'(t) \wedge c''(t)\|^2$$

$$\tau = \frac{(c'(t) \wedge c''(t)) \cdot c'''}{\|c'(t) \wedge c''(t)\|^2}$$

$$\begin{bmatrix} c'(t) & c''(t) & c'''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & v'(t) & \square \\ 0 & kv^2 & \square \\ 0 & 0 & \tau kv^3 \end{bmatrix}$$

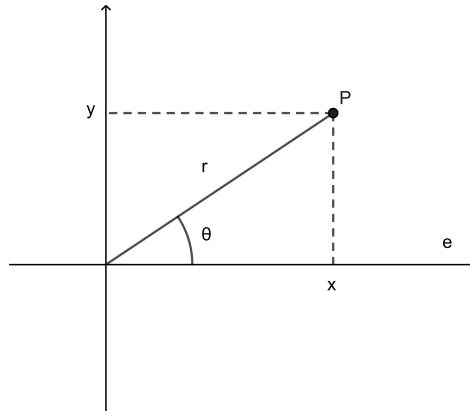
### 1.6. Coordenadas Polares.

Sistemas de coordenadas polares no plano é o mais tradicional sistema de coordenadas curvilíneo do plano. Ele é extremamente importante para descrever figuras ou equações que admitem uma simetria central.

Fixemos no plano um ponto  $O$  e uma semireta  $e$  com origem em  $O$ .

Se  $P \neq O$  é um ponto, seja  $r$  a distância de  $O$  a  $P$  e  $\theta$  o ângulo entre as semiretas  $e$  e  $\overrightarrow{OP}$ .

DEFINIÇÃO 7.18. O par  $(r, \theta)$  é chamado de Coordenadas Polares de  $P$ .



Fixemos um sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y)$  tal que o eixo  $x$  coincide com  $e$ .

A mudança das coordenadas polares para as cartesianas é dada por

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

É preciso prestar atenção para o significado de coordenadas. Se  $P$  é um ponto do  $\mathbb{R}^2$  então quando escrevemos  $P = (x, y)$  esta de fato é uma igualdade pela própria de definição do plano  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso o ponto confunde-se com suas coordenadas. Se  $(r, \theta)$  são as coordenadas polares de  $P$  não podemos escrever  $P = (r, \theta)$ ! O ponto  $P$  é o ponto sôbre a semireta que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $e$  que está a uma distância  $r$  de  $O$  como na figura acima.

Considere a seguir uma curva  $c(t) = (x(t), y(t))$ . Se  $(r(t), \theta(t))$  são as coordenadas polares de  $c(t)$  vamos escrever

$$c_p(t) = (r(t), \theta(t))$$

para indicar as coordenadas polares de  $c(t)$ . Então  $c(t) = (r(t) \cos t, r(t) \operatorname{sen} t)$  é a expressão da curva no plano.

Como exemplo vamos determinar a expressão da curva

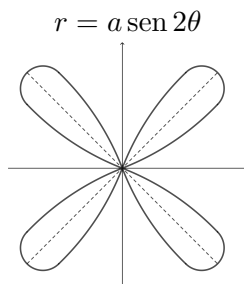
$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$$

em coordenadas polares.

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ x &= r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta \end{aligned}$$

Substituindo,

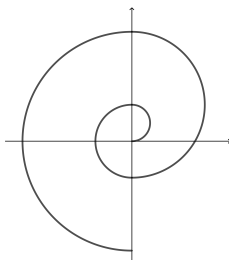
$$r^6 = 4a^2 r^2 \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$



EXEMPLO 7.19. Se as coordenadas polares da curva verifica  $r = \theta$  então a expressão da curva é dada por

$$c(t) = (t \cos t, t \sin t)$$

Observe que  $t \geq 0$ .



### 1.7. Área em Coordenadas Polares.

Nesta secção vamos nos restringir às curvas tais que a coordenada polar  $r$  é uma função do ângulo  $\theta$  ou seja  $r = r(\theta)$  onde  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Portanto a curva tem como expressão, colocando  $t = \theta$ ,

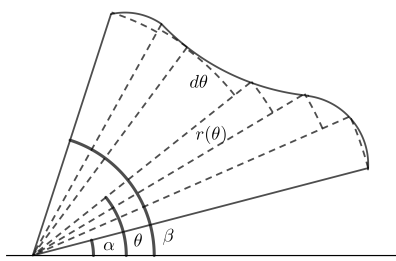
$$c(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$$

com  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Vamos determinar uma fórmula para calcular a área da região  $D$  formada pelos pontos  $P$  cujas coordenadas polares  $(r, \theta)$  verificam  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  e  $0 \leq r \leq r(\theta)$ .

$$D \begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ 0 \leq r \leq r(\theta) \end{cases}$$

É um fato elementar que a área  $A$  de um setor circular com raio  $r$  e ângulo  $\theta$  é  $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ .



$$dA = \frac{1}{2}r(\theta)^2 d\theta$$

Subdividindo a região  $D$  em pequenos setores como na figura o elemento de área

$$dA = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$$

Portanto a área de  $D$  é dada por  $A(D) = \int dA = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta$

**1.8. Velocidade e Aceleração em Coordenadas Polares.** Considere a curva

$$c(t) = (x(t), y(t)) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t))$$

$$c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

Derivando

$$c'(t) = r'(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) + r(t)\theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$$

Definindo-se

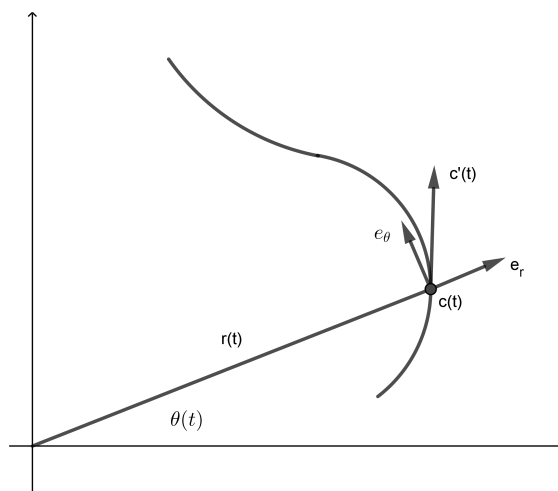
$$e_r(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

$$e_{\theta}(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$$

temos

$$c'(t) = r'(t)e_r(t) + r(t)\theta'(t)e_{\theta}(t)$$

O par  $(e_r(t), e_{\theta}(t))$  constitui uma base ortonormal no ponto  $c(t)$ .





A velocidade é dada em coordenadas polares por

$$v(t)^2 = \|c'(t)\|^2 = r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2$$

e o comprimento de arco por

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\theta'(t)^2} dt$$

Passemos a derivada segunda.

Derivando

$$c'(t) = r'(t)e_r(t) + r(t)\theta'(t)e_\theta(t)$$

$$c''(t) = r''(t)e_r(t) + (r(t)\theta'(t))'e_\theta(t) + r'(t)e_r'(t) + r(t)\theta'(t)e_\theta'(t)$$

$$\begin{cases} \frac{de_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}e_\theta \\ \frac{de_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}e_r \end{cases}$$

Substituindo na expressão da derivada segunda:

$$c''(t) = (r''(t) - r(\theta')^2)e_r + (r'\theta' + r'\theta' + r\theta'')e_\theta(t)$$

$$c''(t) = (r''(t) - r(\theta')^2)e_r + (r\theta'' + 2r'\theta')e_\theta(t)$$

**OBSERVAÇÃO 7.20.** *Como no referencial de Frenet o par  $(e_r, e_\theta)$  é um referencial ortonormal. Suas derivadas são dadas por uma matriz antisimétrica como naquele caso.*

**1.9. Movimento num Campo Central.** Um campo de forças diz-se *Central* se sua expressão e da forma

$$F = \phi(r)e_r$$

Um ponto de massa  $m$  move-se no plano satisfazendo a equação de Newton

$$mc'' = F = \phi(r)e_r$$

Então devemos ter

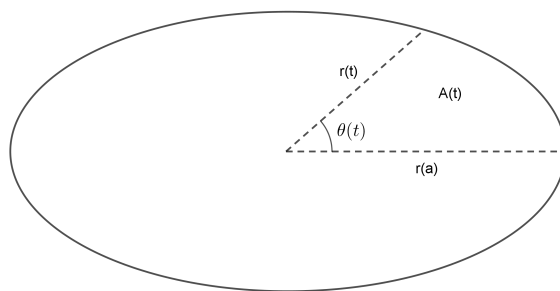
$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0$$

multiplicando por  $r$ :

$$r^2\theta'' + 2rr'\theta' = 0$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\theta') = 0$$

O que implica que  $r^2\theta'$  é constante digamos  $k$ .



Suponha que a curva  $c$  está definida num intervalo  $[a, b]$ . Sendo  $c_p(t) = r(t), \theta(t)$  as coordenadas polares de  $c$  podemos supor sem perder em generalidade que  $\theta(a) = 0$ . Suponhamos também que  $r = r(\theta)$ . Então

$$r(t) = r(\theta(t))$$

Pela fórmula acima a área entre os ângulos  $\theta(a) = 0$  e  $\theta(t)$  é dada por

$$A(t) = (1/2) \int_0^{\theta(t)} r(\theta)^2 d\theta$$

Derivando temos

$$\frac{dA}{dt} = (1/2)r(\theta)^2 \frac{d\theta}{dt} = k$$

$$\frac{dA}{dt} = k$$

Como  $A(a) = 0$  então

$$A(t) = k(t - a)$$

Entre dois instantes quaisquer  $t_1$  e  $t_2$  obtemos

$$A(t_2) - A(t_1) = k(t_2 - t_1)$$

Esta é a "Segunda Lei de Kepler" do movimento planetário:

O movimento de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

## 2. Exercícios

(1) Determine e faça um desenho do traço (imagem) das seguintes curvas:

(a)  $r(t) = (t^3, t^2|t|)$

(b)  $f(t) = (\cos^2 t, \text{sen}^2 t)$

(c)  $r(t) = (\cos t, \text{sen} t, 1)$

(d)  $p(t) = (t, t, t^2)$

(e) 
$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases} \quad -\pi/2 < t < \pi/2$$

(f) 
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen} t \\ z = \text{sen} 2t \end{cases}$$

(g) 
$$\begin{cases} x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases}$$

(2) Parametrize as seguintes curvas:

(a)  $y^2 = x^3$

(b)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(c) A intersecção de  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  e  $z = y + 1$ .

(d) (*Cardióide*) A trajetória de um ponto de uma circunferência que rola sem escorregar sobre uma circunferência de mesmo raio.

(e) (*Folium de Descartes*)  $x^3 + y^3 = 3axy$

**Sugestão:** faça  $y/x = t$ .

(f) (*Lemniscata*)  $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$

**Sugestão:** coordenadas polares.

(3) Encontre o comprimento de arco das seguintes curvas:

$$(a) \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(b) \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$(c) y = x^{\frac{3}{2}} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

(4) Parametrize as seguintes curvas pelo comprimento de arco:

$$(a) r(t) = (5t + 1, t + 1, 2 - t)$$

$$(b) r(t) = (\cos t^2, \sin t^2, 2t^2 + 1)$$

(c) A intersecção de  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  com o plano  $z = x + y + 1$ .

$$(d) r(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$$

$$(e) r(t) = (\cos t, \ln(\cos t), \sin t)$$

(5) Seja  $c : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  uma curva plana dada por  $c(t) = (x(t), y(t))$  satisfazendo

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

Mostre que  $f(t) = \|c(t)\|^2$  é estritamente decrescente e que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = (0, 0)$ .

(6) A *catenária* é a curva parametrizada por  $c(t) = (t, \cosh t)$ .

(a) Determine a função comprimento de arco  $s(t) = \int_0^t |\dot{c}(t)| dt$ .

(b) Parametrize a catenária pelo comprimento de arco.

- (c) Determine a função curvatura.
- (7) Mostre que se a curvatura é nula, então a curva é um segmento de reta.
- (8) Mostre que se a torção é nula, então a curva está num plano.
- (9) Determine a curvatura e a torção da curva  $c(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$ .
- (10) Considere dois vetores unitários  $n$  e  $v$  formando um ângulo constante  $\theta$ . Seja  $c(t)$  uma curva tal que  $\dot{c}(t) = n \wedge c(t)$  e  $c(0) = v$ . Calcule sua curvatura em termos do ângulo  $\theta$ .
- (11) Defina o que é uma circunferência com centro  $C$  e raio  $R$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Parametrize-a pelo comprimento de arco e calcule sua curvatura e sua torção.
- (12) Determine a curvatura e a torção das seguintes curvas:
- (a)  $x = t, y = t^2, z = t^3$
- (b)  $x = t, y = \frac{1+t}{t}, z = \frac{1-t^2}{t}$
- (c)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = bt$
- (13) Determine a curvatura das seguintes curvas:
- (a)  $c(t) = (at, bt^2)$
- (b)  $c(t) = (t, t + 1/t)$
- (c)  $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$
- (d)  $c(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$
- (e)  $c(t) = (a \cos t, b \cos t, c \sin t)$
- (f)  $c(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$
- (14) Determine a torção das seguintes curvas:
- (a)  $c(t) = (3 \cos t, 4 \cos t, 5 \sin t)$
- (b)  $c(t) = (a \cos t, b \cos t, c \sin t)$
- (c)  $c(t) = (a \cos t, b \sin t, ct)$
- (15) Uma curva  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem curvatura nula se e somente se a curva é uma reta.
- (16) Uma curva  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem torção nula se e somente se a curva é plana.

- (17) Determine as curvas espaciais que tem curvatura e torção constantes.
- (18) Determine o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:
- (a) (Cardioide)  $r = a(1 - \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (b) (Espiral de Arquimedes)  $r = a\theta$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (c) (Espiral de Logarítmica)  $r = e^{-\theta}$  onde  $0 \leq \theta$
- (19) Represente graficamente as curvas dadas em coordenadas polares e calcule a área limitada por elas:
- (a) (Cardióide)  $r = a(1 - \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (b) (Trevo de quatro folhas)  $r = \text{sen } 2\theta$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (c) (Limaçon ou Caracol)  $r = a(2 + \cos \theta)$  onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$

## CAPÍTULO 8

### Fórmula de Taylor

As funções polinomiais constituem a classe mais simples de funções. Para calcular seus valores num determinado número basta operar com a adição e a multiplicação. Para outras classes de funções não algébricas como seno, exponencial, logaritmo só podemos, em geral, encontrar seus valores aproximadamente. Existem vários caminhos para fazer esta aproximação. Um deles é através da fórmula de Taylor que é o tema deste capítulo.

#### 1. Funções Polinomiais

Como já sabemos uma função polinomial é uma função  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Os coeficientes de  $p(x)$  podem ser obtidos através de derivadas na origem,

$$p(0) = a_0, p'(0) = a_1, p''(0) = 2a_2, \dots, p^{(k)}(0) = k!a_k$$

Assim, para  $k = 0, 1, \dots, n$

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}$$

PROPOSIÇÃO 8.1. *Se*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x^k} = 0$$

*então*

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^k \frac{p(x)}{x^k} = 0$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = a_0$  então  $a_0 = 0$ . Segue que

$$\frac{p(x)}{x^k} = \frac{a_1 + a_2x^1 + \dots + a_nx^{n-1}}{x^{k-1}}$$

Repetindo o processo mostra-se que  $a_1 = 0$  até  $a_k = 0$ . □

Todo polinômio pode ser escrito como soma de termos do tipo  $a(x-c)^k$ . Neste caso dizemos que  $p(x)$  está centrado em  $c$ .

$$p(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \dots + b_n(x-c)^n$$

EXEMPLO 8.2. *Determine a expressão de  $p(x) = x^2 - x + 1$  com centro em  $c = 1$ . Completando o quadrado tem-se*

$$p(x) = x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + 2x - x + 1 = (x-1)^2 + (x-1) + 2$$

Os coeficientes  $b_k$  são determinados pelas derivadas em  $c$ :

$$b_k = \frac{p^{(k)}(c)}{k!}$$

EXEMPLO 8.3. *Determine os coeficientes do polinômio  $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$  com centro em  $c = 1$ .*

*Calculando as derivadas  $p'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ ,  $p''(x) = 6x - 2$ ,  $p^{(3)}(x) = 6$ . Então,*

$$p(1) = 1, \quad p'(1) = 3, \quad p''(1) = 4, \quad p^{(3)}(1) = 6$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 1$$

*A expressão do polinômio centrado em 1 é*

$$p(x) = 1 + 3(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Observe que este método é mais eficiente do que completar as potências.

## 2. Polinômio de Taylor

DEFINIÇÃO 8.4. *Seja  $f$  uma função definida numa vizinhança do 0 e  $n \in \mathbb{N}$ . Diz-se que  $f$  anula-se até ordem  $n$  na origem se*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Se  $0 \leq k \leq n$  então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-k} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Conclui-se que  $f$  anula-se até ordem  $k$ .

Nesta linguagem o que fizemos acima diz que um polinômio anula-se até ordem  $k$  se e somente se os coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$  são nulos. Em particular se  $k = n$  então o polinômio é nulo.



DEFINIÇÃO 8.5. Diz-se que  $f, g$  coincidem até ordem  $n$  na origem se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^n} = 0$$

Se  $p, q$  são polinômios de grau  $\leq n$  coincidem até ordem  $n$  então eles são iguais.

TEOREMA 8.6. Seja  $f$  uma função derivável até ordem  $n$  na origem.  $f$  anula-se até ordem  $n$  se e somente se

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos primeiramente que

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^0} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2}$$

Aplicando o TVM,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c)x}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f'(c)}{c} \right) \left( \frac{c}{x} \right)^2 = 0$$

pois  $c$  está entre 0 e  $x$  então  $|c/x| < 1$  e como  $c \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$  tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c)}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f'(c)}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{f'(c) - f'(0)}{c} = f''(0) = 0$$

Se  $n = 2$  a demonstração acabou. Caso  $n > 2$  considere a função  $g(x) = f'(x)$ . Então

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

Pelo que foi feito  $g$  anula-se até ordem 2, isto é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} = 0$$

Segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c)x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(c)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(c)}{c^2}\right)\left(\frac{c}{x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(c)}{c^2}\right)\left(\frac{c}{x}\right)^2 = 0$$

Conclui-se que  $f$  anula-se até a ordem 3. A mesma conclusão vale para  $g(x)$  ou seja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^3} = 0$$

Substituindo  $g(x) = f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^3} = 0$$

Semelhante ao que fizemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f'(c)}{c^3}\right)\left(\frac{c}{x}\right)^3 = 0$$

portanto  $f$  anula-se até a ordem 4. Indutivamente mostramos que  $f$  anula-se até a ordem  $n$ .

Reciprocamente suponha que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ . Considere a função

$$g(x) = f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$$

É fácil ver que  $g^{(k)}(0) = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Pela primeira parte tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^n} = 0$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x^n} - \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{x^n}\right) = 0$$

Por hipótese

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

Disto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}{x^n} = 0$$

o que implica

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$$

□

**DEFINIÇÃO 8.7.** *Seja  $f$  uma função definida numa vizinhança do  $c$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Diz-se que  $f$  anula-se até ordem  $n$  em  $c$  se*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{(x-c)^n} = 0$$

Se  $h = x - c$  então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)}{h^n} = 0$$

Portanto a função  $g(h) = f(c+h)$  anula-se até ordem  $n$  na origem e como

$$g(0) = f(c), \quad g'(0) = f'(c), \quad g''(0) = f''(c), \quad \dots, \quad g^{(n)}(0) = f^{(n)}(c)$$

tem-se a seguinte Proposição:

**PROPOSIÇÃO 8.8.** *Seja  $f$  uma função derivável até ordem  $n$  em  $c$ .  
 $f$  anula-se até ordem  $n$  em  $c$  se e somente se*

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$$

**DEFINIÇÃO 8.9.** *Chama-se Polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em  $c$  ao polinômio*

$$p_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Outra notação para o polinômio de Taylor mais específica é  $p_{n,c}(x)$  que faz referência ao centro  $c$ . Vamos também usar a forma condensada de somatória

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i$$

**DEFINIÇÃO 8.10.** *A função*

$$r_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

*é chamada o resto de ordem  $n$  em  $c$ .*

Como

$$r_n(c) = r'_n(c) = \dots = r_n^{(n)}(c) = 0$$

da proposição anterior  $r_n$  anula-se até ordem  $n$  em  $c$  o que prova

**TEOREMA 8.11.** *Se  $f$  é derivável até ordem  $n$  e  $r_n$  é tal que*

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

*então*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{r_n(x)}{(x-c)^n} = 0$$

### 3. Formas do Resto

O que foi feito acima mostra que quando  $x$  se aproxima de zero o polinômio de Taylor aproxima-se da função mais rápido do que  $(x - c)^n$ . A seguir veremos para um valor fixo de  $x$  como o polinômio de Taylor aproxima o valor  $f(x)$  da função aumentando o grau do polinômio.

#### 3.1. Forma Integral do Resto.

**TEOREMA 8.12.** (*Resto Integral*) Se  $f$  é derivável até ordem  $n + 1$  no intervalo com extremos  $c$  e  $x$  ( $c < x$  ou  $x < c$ ) e a derivada  $(n + 1)$ -ésima é contínua então

$$r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Para chegarmos na fórmula acima vamos aplicar sucessivamente integração por parte.

Como  $f'$  é contínua,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t) dt$$

Fazendo

$$\begin{aligned} u &= f'(t) \longrightarrow du = f''(t) dt \\ dv &= dt \longrightarrow v(t) = (t - x) \end{aligned}$$

$$f(x) - f(c) = f'(t)(t - x) \Big|_{t=c}^{t=x} - \int_c^x f''(t)(t - x) dt$$

$$f(x) - f(c) = f'(c)(x - c) + \int_c^x f''(t)(x - t) dt$$

Novamente fazendo,

$$\begin{aligned} u &= f''(t) \longrightarrow du = f'''(t) dt \\ dv &= (x - t) dt \longrightarrow v(t) = -(1/2)(x - t)^2 \end{aligned}$$

Substituindo,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \left(-\frac{f''(t)(x - t)^2}{2}\right) \Big|_{t=c}^{t=x} + \int_c^x \frac{f'''(t)(x - t)^2}{2} dt$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(t)(x - t)^2}{2} + \int_c^x \frac{f'''(t)(x - t)^2}{2} dt$$

de onde

$$r_2(x) = \int_c^x \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2!} dt$$

repetimos este processo até a potência  $n$  e temos,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(t)(x-t)^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^n}{n!} + \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

Segue que,

$$r_n(x) = \int_c^x \frac{f^{(n+1)}(t)(x-t)^n}{n!} dt$$

□

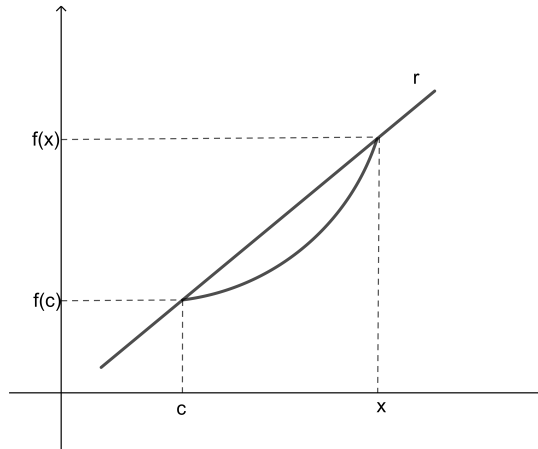
### 3.2. Forma de Lagrange do Resto.

**TEOREMA 8.13.** (*Resto de Lagrange*) Se  $f$  é derivável até ordem  $n+1$  no intervalo com extremos  $c$  e  $x$  ( $c < x$  ou  $x < c$ ) e a derivada  $(n+1)$ -ésima é contínua então

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

Esta forma do resto é de certa maneira uma extensão do TVM. Recordemos a demonstração dele pois é uma motivação para a demonstração que faremos. Seja  $f : [c, x] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável.

Se  $r$  é uma reta que passa por  $(c, f(c))$  sua equação é  $y = f(c) + m(t-c)$  (Observe que estamos usando a variável  $t$  pois  $x$  está fixo.). Escolhemos  $m$  de forma que ela também passe por  $(x, f(x))$  ou seja  $m = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ .



Considere a função

$$\varphi(t) = f(t) - (f(c) + m(t - c))$$

Pela nossas escolhas  $\varphi(c) = 0$  e  $\varphi(x) = 0$ . Pelo teorema de Rolle existe  $\theta$  entre  $c$  e  $x$  tal que  $\varphi'(\theta) = 0$  e portanto  $f'(\theta) = m$ . Então

$$\varphi(x) = 0 = f(x) - (f(c) + f'(\theta)(x - c))$$

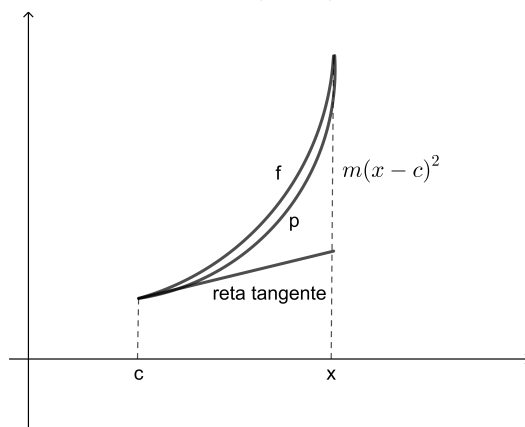
$$f(x) = f(c) + f'(\theta)(x - c)$$

A reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(c, f(c))$  tem equação  $y = f(c) + f'(c)(t - c)$ . Se  $p$  é uma parábola que passa por  $(c, f(c))$  e cuja derivada em  $c$  é  $f'(c)$  então sua equação é

$$y = f(c) + f'(c)(t - c) + m(t - c)^2$$

Escolhemos  $m$  tal que ela passe por  $(x, f(x))$ .

$$m = \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{(x - c)^2}$$



Considere a função

$$\varphi(t) = f(t) - (f(c) + f'(c)(t - c) + m(t - c)^2)$$

Então  $\varphi(c) = 0$  e  $\varphi(x) = 0$  de novo pelo teorema de Rolle existe  $\theta_1$  entre  $c$  e  $x$  tal que  $\varphi'(\theta_1) = 0$ .

Derivando  $\varphi(t)$ ,

$$\varphi'(t) = f'(t) - (f'(c) + 2m(t - c))$$

Como  $\varphi'(c) = 0$  e  $\varphi'(\theta_1) = 0$  novamente o teorema de Rolle garante que existe  $\theta$  entre  $c$  e  $\theta_1$  tal que  $\varphi''(\theta) = 0$  e como

$$\varphi''(t) = f''(t) - 2m$$

$$\varphi''(\theta) = f''(\theta) - 2m = 0$$

Conclui-se que

$$m = f''(\theta)/2$$

$$\varphi(x) = 0 = f(x) - (f(c) + f'(c)(x - c) + (f''(\theta)/2)(x - c)^2)$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + (f''(\theta)/2)(x - c)^2$$

$$r_1(x) = \frac{f''(\theta)(x - c)^2}{2!}$$

o que demonstra o teorema para  $n = 1$ .

Em geral seja

$$p_{n+1}(t) = f(c) + f'(c)(t - c) + \frac{f''(c)}{2}(t - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(t - c)^n + m \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t - c)^{n+1}$$

um polinômio tal que todas as suas derivadas até ordem  $n$  coincidem com as derivadas de  $f$ .

Escolhemos  $m$  de forma que  $p_{n+1}(x) = 0$ .

e seja

$$\varphi(t) = f(t) - (f(c) + f'(c)(t - c) + \frac{f''(c)}{2}(t - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(t - c)^n + m(t - c)^{n+1})$$

Como  $\varphi(c) = 0$  e  $\varphi(x) = 0$  de novo pelo teorema de Rolle existe  $\theta_1$  entre  $c$  e  $x$  tal que  $\varphi'(\theta_1) = 0$ .

Derivando  $\varphi(t)$ ,

$$\varphi'(t) = f'(t) - (f'(c) + f''(c)(t - c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(t - c)^{n-1} + m(n+1)(t - c)^n)$$

Tome  $\theta_2$  tal que  $\varphi''(\theta_2) = 0$

$$\varphi''(t) = f''(t) - (f''(c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-2)!}(t - c)^{n-2} + m(n+1)n(t - c)^{n-1})$$

e assim sucessivamente até a derivada de ordem  $n + 1$  para as quais encontramos

$$c < \theta < \theta_n < \theta_{n-1} < \dots < \theta_2 < \theta_1 < x$$

$$\varphi^{n+1}(\theta) = 0 = f^{n+1}(\theta) - (n+1)!m$$

portanto

$$m = \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

$$\varphi(x) = 0 = f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + m(x-c)^{n+1})$$

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

#### 4. Exercícios

(1) Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em  $c$  dado nos seguintes casos:

a)  $f(x) = \operatorname{sen}x$ ;  $c = 0$

b)  $f(x) = \operatorname{cos}x$ ;  $c = 0$

c)  $f(x) = \ln x$ ;  $c = 1$

d)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ;  $c = 1$

e)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ;  $c = 0$ , onde  $\alpha \neq 0$  é um número real dado.

(2) Determine a fórmula de Taylor de ordem  $n$  em  $c$  com resto de Lagrange para as funções do exercício 1.

(3) a) Determine o polinômio de Taylor de  $f(x) = e^x$ , de ordem  $n$ , em  $c = 0$ ;

b) Mostre que, para todo  $x$  em  $[0, 1]$ ,

$$\left| e^x - \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

c) Avalie  $e$  com erro, em módulo, inferior a  $10^{-5}$ .



(4) Sejam  $n$  um natural ímpar e  $f(x) = \text{sen}x$ . Mostre que, para todo  $x$ ,

$$\left| \text{sen}x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

(5) Use o exercício 4 para avaliar  $\text{sen}1$  com erro inferior a  $10^{-5}$ .

(6) Mostre que, para todo  $x$ ,

$$\text{sen}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

(7) Seja  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

a) Mostre que  $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$  é o polinômio de Taylor, de ordem 10, de  $f$  em  $c = 0$  sem calcular as derivadas. (Use a fórmula da soma de uma P.G.)

b) Observando o polinômio do item (a), calcule  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$ , etc.

(8) Se  $p(x)$  é um polinômio de grau  $n$  mostre que

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \dots + \frac{p^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

onde  $c, x \in \mathbb{R}$ .

(9) Mostre que o polinômio de Taylor da derivada  $f'$  de uma função  $f$  é a derivada do polinômio de Taylor de  $f$ .

(10) Se  $P_{n,c}$  é o polinômio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  então o polinômio de Taylor de ordem  $n+1$  de  $g(x) = \int_c^x f(t)dt$  é a integral  $\int_c^x P_{n,c}(t)dt$ .

(11) Mostre que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

(12) Se  $g(x) = f(x-c)$  e  $P_n(x)$  é o polinômio de Taylor de  $f$  na origem então  $P_n(x-c)$  é o polinômio de  $g$  com centro em  $c$ .

## Rudimentos de Equações Diferenciais

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) envolve uma função e suas derivadas e suas soluções são funções. Uma grande variedade de problemas são enunciados e resolvidos através das equações diferenciais tais como determinar a corrente num circuito elétrico, a velocidade de uma reação química, a variação da concentração em uma mistura, o tempo gasto para gelar um corpo, a oscilação de um corpo que flutua, a distância para frear um carro e evitar a colisão e muitos outros. Apresentamos neste capítulo exemplos elementares de equações diferenciais e faremos algumas aplicações.

### 1. Noções de Equações Diferenciais

O exemplo mais simples de uma equação diferencial é

$$\frac{dy}{dx} - f(x) = 0$$

onde  $f$  é uma dada função contínua.

Suas soluções são obtidas por integração:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \longleftrightarrow y(x) = \int f(x)dx$$

Se  $f(x) = x^2$  então  $y(x) = (1/3)x^3 + c$ .

Para cada valor da constante  $c$  tem-se uma solução da equação. Existem portanto uma infinidade de soluções.

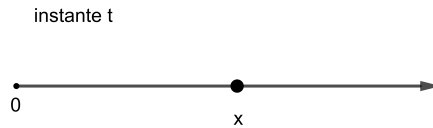
Outro exemplo

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Observe que neste caso a função incógnita aparece em ambos os lados da equação. Como veremos mais adiante suas soluções são exponenciais.

$$y(x) = ce^x$$

Um exemplo da cinemática: Um ponto movimenta-se numa reta. Em cada instante sua velocidade é proporcional a sua posição. Descreva sua posição  $x$  em função do tempo  $t$ .



A equação que governa o movimento é

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Onde  $k$  é a constante de proporcionalidade. Suas soluções são dadas por

$$x(t) = ce^{kt}$$

A constante  $c$  é o valor da posição inicial do ponto, isto é  $x(0) = c$ .

**DEFINIÇÃO 9.1.** *Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de primeira ordem é uma equação da forma*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

onde  $f$  é uma função contínua definida em  $U \subset \mathbb{R}^2$ .

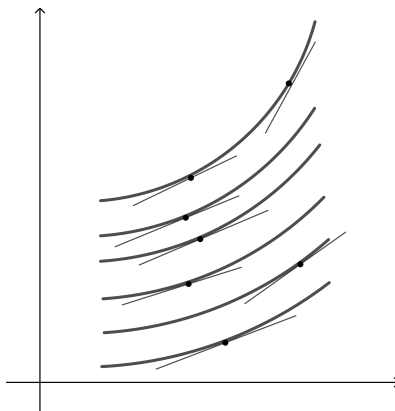
Uma Solução da equação é uma função  $x = x(t)$  definida num intervalo  $I$  tal que para todo  $t \in I$ :

$$(1) (t, x(t)) \in U$$

$$(2) \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

Dizemos que a solução satisfaz a condição inicial  $(t_0, x_0)$  se  $x(t_0) = x_0$ . Isto é a solução passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$ .

Geometricamente a equação diferencial nos dá em cada ponto a inclinação da reta tangente ao gráfico da solução que passa por ele.



Enunciamos a seguir o teorema que garante a existência de soluções de uma EDO.

**TEOREMA 9.2.** *(Teorema de Existência e Unicidade)*

Se  $f(t, x)$  é diferenciável com  $\frac{\partial f}{\partial x}$  contínua então para cada  $(t_0, x_0) \in U$  passa uma solução  $x = x(t)$ ,  $t \in I$  da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Além disto se  $x = u(t)$ ,  $t \in J$  for outra solução tal que  $u(t_0) = x_0$  então  $x(t) = u(t)$  para todo  $t \in I \cap J$ . Como consequência por cada  $(t_0, x_0)$  passa uma única solução maximal.

**EXEMPLO 9.3.** As funções  $x(t) = 0$  e  $x(t) = t^3$  são soluções da equação

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}$$

que passam pelo ponto  $(0, 0)$ .

Encontre uma infinidade de soluções que passam pelo ponto  $(0, 0)$ .

Este fato contradiz o teorema de existência e unicidade?

## 2. Equações Especiais

### (1) Equações lineares

São equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)$$

Se  $b(t) = 0$  a equação

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x$$

chama-se homogênea.

Começemos resolvendo a equação homogênea:

Separando variáveis (veja o item seguinte)

$$\int \frac{dx}{x} = \int a(t) dt$$

$$\ln x = A(t) + k$$

aqui  $A(t)$  é uma primitiva de  $a(t)$ .

$$x(t) = ce^{A(t)}$$

onde  $c = e^k$ .

Para integrarmos a equação completa procedemos como se segue.

$$\frac{dx}{dt} - a(t)x = b(t)$$

Multiplicamos ambos os lados por  $e^{-A(t)}$ ,

$$e^{-A(t)} \frac{dx}{dt} - a(t)e^{-A(t)}x = b(t)e^{-A(t)}$$

$$(e^{-A(t)}x)' = b(t)e^{-A(t)}$$

$$e^{-A(t)}x = \int b(t)e^{-A(t)} dt + c$$

Finalmente,

$$x(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} \left( \int b(t)e^{-A(t)} dt \right)$$

EXEMPLO 9.4. *Seja*

$$\frac{dx}{dt} = x + \cos t$$

*Neste caso  $A(t) = t$  e as soluções são dadas por*

$$x(t) = ce^t + e^t \left( \int e^{-t} \cos t dt \right)$$

$$x(t) = ce^t + (\sin t - \cos t)/2$$

## (2) Variáveis Separadas

São equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$$

Se  $f(x_0) = 0$  então a função constante  $x(t) = x_0$  é uma solução da equação. Assim as raízes da equação  $f(x) = 0$  constituem o conjunto das soluções constantes. Fora deste conjunto podemos separar variáveis: Seja  $x = x(t)$  uma solução. Então

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= f(x(t))g(t) \\ \frac{1}{f(x(t))} \frac{dx}{dt}(t) &= g(t)\end{aligned}$$

Integrando

$$\int \frac{1}{f(x(t))} \frac{dx}{dt}(t) dt = \int g(t) dt$$

Fazendo a mudança de variável na primeira integral  $x = x(t)$   $dx = \frac{dx}{dt}(t) dt$ ,

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt$$

Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $\frac{1}{f(x)}$  e  $G(t)$  de  $g(t)$  então,

$$F(x(t)) = G(t) + k$$

Observando que  $F(x)$  é inversível as soluções não constantes da equação são dadas por:

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + k)$$

EXEMPLO 9.5. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2$$

$x(t) = 0$  é a única solução constante.

Separando variáveis:

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int 2t dt$$

$$-\frac{1}{x} = t^2 + k$$

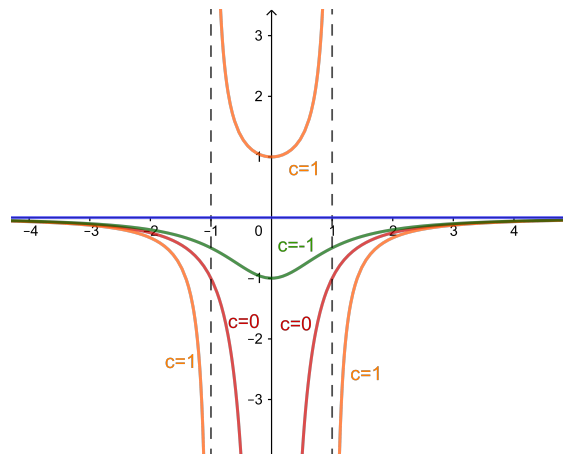
$$x(t) = \frac{1}{c - t^2}$$

onde fizemos  $c = -k$

$$c = 0 \longrightarrow x(t) = \frac{-1}{t^2}$$

$$c = 1 \longrightarrow x(t) = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$c = -1 \longrightarrow x(t) = \frac{-1}{1 + t^2}$$



### (3) Equações Autônomas

São aquelas que o segundo membro da equação não depende do "tempo"  $t$ .

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Se a função  $f$  está definida num intervalo  $I$  então o domínio da equação é o conjunto  $U = \mathbb{R} \times I \subset \mathbb{R}^2$ .

#### (2.3.1) PROPRIEDADES QUALITATIVAS DAS EQUAÇÕES AUTÔNOMAS

- Se  $x_0$  é tal que  $f(x_0) = 0$  então  $x(t) = x_0$  é uma solução constante da equação que chamaremos de solução de equilíbrio.
- Se  $x = x(t)$  é uma solução então sua translação  $u(t) = x(t - c)$  também é solução.

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t - c) = f(x(t - c)) = f(u(t))$$

- (c) Se  $x = x(t)$  e  $t_0$  é um ponto crítico, isto é,  $\frac{dx}{dt}(t_0) = 0$  e  $x(t_0) = x_0$  então a solução  $x = x(t)$  é constante igual a  $x_0$ .  
Como  $x = x(t)$  é solução então

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t))$$

em particular para  $t = t_0$

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = 0 = f(x(t_0)) = f(x_0)$$

Então a  $u(t) = x_0$  é uma solução constante e como  $u(t_0) = x_0 = x(t_0)$  elas coincidem.

- (d) Uma solução da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

é constante ou estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Esta afirmação é uma consequência da anterior pois se a derivada não se anula pelo teorema do anulamento como a função derivada é contínua ela não muda de sinal. Se for positiva a solução é crescente e se negativa decrescente caso contrário ela identicamente nula e portanto a solução é constante.

- (e) Se  $x = x(t)$  é uma solução não constante, limitada e definida para  $t \geq a$  então existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \text{ e } f(x_0) = 0$$

Como consequência a solução constante  $u(t) = x_0$  é uma assíntota da solução  $x = x(t)$ .

Provemos esta afirmação. Como a solução é não constante então ela é monótona. Se for crescente como é limitada então existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = \sup\{x(t)\} = x_0$$

Caso seja decrescente então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = \inf\{x(t)\} = x_0$$

Então



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt}(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x(t)) = f(x_0)$$

Falta mostrar que  $f(x_0) = 0$ . Caso  $f(x_0) > 0$ , pela definição de limite, existe um  $t_0$  tal que para

$$t \geq t_0 \text{ tem-se } \left| \frac{dx}{dt}(t) - f(x_0) \right| < f(x_0)/2$$

o que acarreta

$$\frac{dx}{dt}(t) > f(x_0)/2$$

Integrando,

$$\int_{t_0}^t \frac{dx}{dt}(t) dt > \frac{f(x_0)}{2}(t - t_0)$$

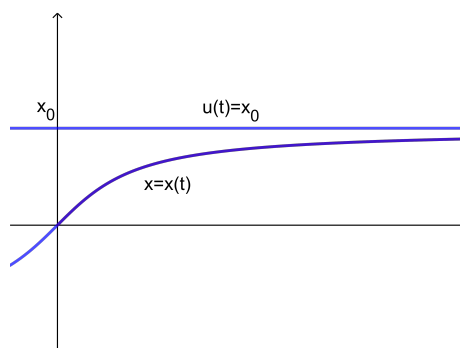
$$x(t) > x(t_0) + \frac{f(x_0)}{2}(t - t_0)$$

Tomando-se o limite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) > \lim_{x \rightarrow \infty} (x(t_0) + \frac{f(x_0)}{2}(t - t_0)) = \infty$$

o que contradiz o fato de que a solução é limitada.

De maneira inteiramente semelhante mostra-se que  $f(x_0) < 0$  conduz a uma contradição.



(f) Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

definida em  $\mathbb{R}$ . Se  $x = x(t)$  é uma solução crescente definida num domínio  $a < t < b$  maximal, isto é que não pode ser estendido então

$$\lim_{x \rightarrow b} x(t) = \infty$$

Caso seja decrescente

$$\lim_{x \rightarrow b} x(t) = -\infty$$

Analisemos o caso em que é crescente. Basta mostrar que ela não é limitada. Caso contrário

$$\lim_{x \rightarrow b} x(t) = x_0$$

Então

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{dx}{dt}(t) = \lim_{x \rightarrow b} f(x(t)) = f(x_0) = \frac{dx}{dt}(b)$$

Pelo ponto  $(b, x_0)$  passa uma solução  $u = u(t)$  definida num intervalo  $]b - r, b + r[$ .

Então

$$u(b) = x_0 = x(b) \text{ e } \frac{dx}{dt}(b) = f(x_0) = \frac{du}{dt}(b)$$

Isto garante que podemos estender a solução colocando  $x(t) = u(t)$  para  $b \leq t < b + r$  o que contradiz o fato que  $x = x(t)$  é maximal.

O próximo item dá uma condição suficiente para que uma solução esteja definida num intervalo  $]a, \infty[$ .

- (g) Suponha que  $f$  esteja definida em  $\mathbb{R}^+$ . Se  $0 \leq f(x) \leq x$  então toda solução que passa por  $(t_0, x_0)$  está definida para todo  $t \geq t_0$ .

Como  $\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \leq x(t)$  então  $\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt}(t) \leq 1$

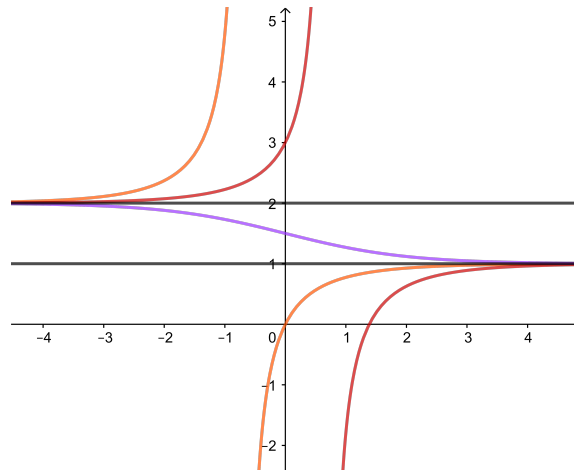
integrando,

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt}(t) dt = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{x} dx = \ln(x(t)) - \ln x_0 \leq t - t_0$$

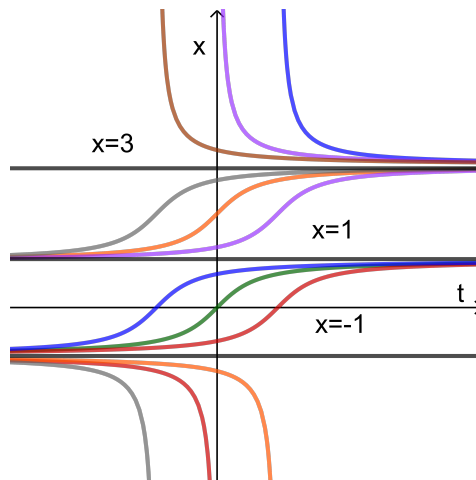
Portanto

$$x(t) \leq ke^t$$

para uma conveniente constante  $k$ .



Soluções de equilíbrio  $x = 1$  e  $x = 2$ .



Soluções de equilíbrio  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

EXEMPLO 9.6. Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - 1)$$

As soluções de equilíbrio são

$$y = -1 \quad y = 0 \quad y = 1$$

Separando variáveis

$$\frac{dx}{x(x^2 - 1)} = dt$$

Pelo método das frações parciais encontramos

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x}$$

Então

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)} = \int \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln(x-1)(x+1) - \ln x = \ln \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)} = \int dt$$

$$\ln \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x} = t + c$$

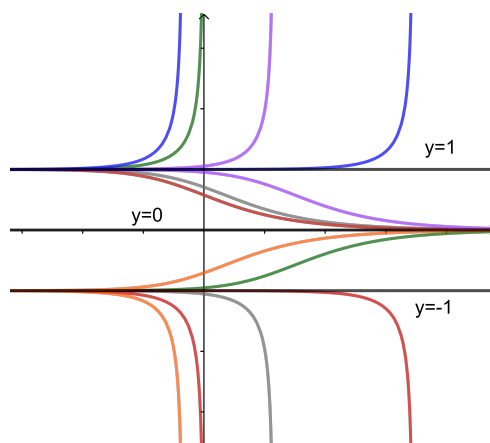
$$\frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x} = ke^t$$

Resolvendo em  $x$

$$x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - ke^{2t}}}$$

que são as soluções da equação.

O gráfico abaixo mostra as soluções para  $k = 1, 2, 0.1, 0.01, -1, -2, -0.1, -0.01$  e as soluções de equilíbrio.



### 3. Equações de 2ª Ordem Redutíveis

A forma de uma equação de segunda ordem é

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

A condição inicial é uma terna  $(t_0, x_0, v_0)$ . Existe uma única solução  $x = x(t)$  tal que  $x(t_0) = x_0$  e  $\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$ . Em certos casos uma equação de segunda ordem reduz-se a uma de primeira ordem. Vejamos alguns tipos.

#### 3.1. Casos Especiais.

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f(t)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{dx}{dt}$  a equação reduz-se a  $\frac{du}{dt} = f(t)$ . Integrando,

$$u(t) = \int f(t)dt + b$$

Integrando novamente

$$x(t) = \int u(t)dt + c$$

EXEMPLO 9.7. *Considere a equação*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos t$$

*Então*

$$\frac{du}{dt} = \cos t$$

*Integrando*

$$u(t) = \text{sen } t + b$$

*Integrando novamente*

$$x(t) = -\cos t + bt + c$$

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, \frac{dx}{dt}\right)$$

Fazendo a mesma mudança esta equação recai numa equação de primeira ordem  $\frac{du}{dt} = f(t, u)$ .

EXEMPLO 9.8. *Vamos encontrar as soluções de equação*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

*Fazendo a mudança*

$$u = \frac{dx}{dt}$$

*Recaímos na equação*

$$\frac{du}{dt} = u^2$$

*Separando variáveis e integrando,*

$$\int \frac{du}{u^2} = \int dt$$

$$-\frac{1}{u} = t + b$$

$$\frac{dx}{dt} = u = -\frac{1}{t + b}$$

$$x(t) = \ln\left(\frac{1}{t + b}\right) + c$$

$$(3) \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)$$

Para reduzir esta façamos

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Então

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

e a equação é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} f(x, v) \\ \frac{dx}{dt} = v \end{cases}$$

EXEMPLO 9.9. *Seja*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x}$$

*Recaímos na equação*

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

*Separando variáveis e integrando obtemos*

$$v = b/x$$

*Substituindo na segunda equação*

$$\frac{dx}{dt} = b/x$$

*Novamente separando variáveis obtem-se finalmente*

$$x(t) = \sqrt{bt + c}$$

*que são as soluções da equação.*

#### 4. EDO nas Ciências Naturais

Nesta seção vamos utilizar equações diferenciais para enunciar e resolver problemas tais como movimento de um ponto sobre uma reta, determinar a corrente elétrica num circuito, a variação da concentração num tanque que contém uma determinada solução, a proliferação de uma epidemia numa população, etc.

**4.1. Movimento Unidimensional.** Exemplos de um movimento unidimensional são movimento retilíneo, movimento circular, mais geralmente movimento de um ponto material sobre uma curva.

Seja  $x = x(t)$  a coordenada da posição de um ponto material  $P$  de massa  $m$ . Suponhamos que uma força  $F = F(x)$  age sobre o ponto. Força esta que só depende da posição ou seja um campo de forças estacionário.



Recordemos que a velocidade do ponto em movimento é dada por

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

e a aceleração,

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{dv}{dt}(t)$$

A Equação de Newton da dinâmica nos diz que

$$ma = F$$

Precisamente,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Uma solução é uma função  $x = x(t)$  tal que para todo  $t \in I$

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = F(x(t))$$

Na notação de Newton,

$$mx''(t) = F(x(t))$$

Multiplicando ambos os lados e integrando,

$$mx''(t)x'(t) = F(x(t))x'(t)$$

$$m \int x''(t)x'(t)dt = \int F(x(t))x'(t)dt$$

fazendo a mudança de variável



$$\begin{aligned}u &= x(t) \\ du &= x'(t)dt\end{aligned}$$

na segunda integral obtemos,

$$\int F(x(t))x'(t)dt = \int F(u)du$$

Seja  $U$  uma primitiva de  $-F(u)$ . Então,

$$\int F(x(t))x'(t)dt = -U(x(t))$$

A seguir façamos a mudança de variável,

$$\begin{aligned}u &= x'(t) \\ du &= x''(t)dt\end{aligned}$$

na primeira integral,

$$\int x''(t)x'(t)dt = \int udu = (1/2)u^2 = (1/2)(x'(t))^2$$

Segue que

$$m \int x''(t)x'(t)dt = \int F(x(t))x'(t)dt$$

$$(1/2)m(x'(t))^2 + U(x(t)) = E$$

onde  $E$  é a constante de integração.

A equação acima nada mais é que o "Princípio da Conservação da Energia" que diz : A soma da energia cinética  $(1/2)m(x'(t))^2$  mais a energia potencial  $U(x)$  é constante durante o movimento e igual a energia total  $E$ .

Observe que a equação acima é de primeira ordem com variáveis separadas:

$$(1/2)m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}} = \int \frac{1}{\sqrt{m}}dt = \frac{t}{\sqrt{m}} + c$$

Conhecida a energia potencial e resolvendo a primeira integral determinamos o movimento.

#### 4.1.1. Aspectos Qualitativos de um Movimento Unidimensional.

DEFINIÇÃO 9.10. *Chama-se Plano de Fase do sistema mecânico ao plano*

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, v) : x \in \mathbb{R} \text{ e } v \in \mathbb{R}\}$$

onde  $x$  é a posição do ponto e  $v$  sua velocidade.

Cada valor da energia total  $E$  determina uma curva no plano de fase cuja equação é dada pela equação da energia

$$(1/2)mv^2 + U(x) = E$$

Como  $(1/2)mv^2$  é sempre positivo o movimento se dá para valores de  $x$  tais que  $U(x) \leq E$ . Quando  $U(x) = E$  a velocidade anula-se.

Como

$$(1/2)mv^2 = E - U(x) \geq 0$$

então a velocidade máxima é atingida quando  $E - U(x)$  é máximo ou seja quando  $U(x)$  é mínimo durante o movimento.

Seja  $x_0$  um ponto crítico da energia potencial, isto é,  $\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$ . Então

$$F(x_0) = -\frac{dU}{dx}(x_0) = 0$$

Se  $x(t) = x_0$  então

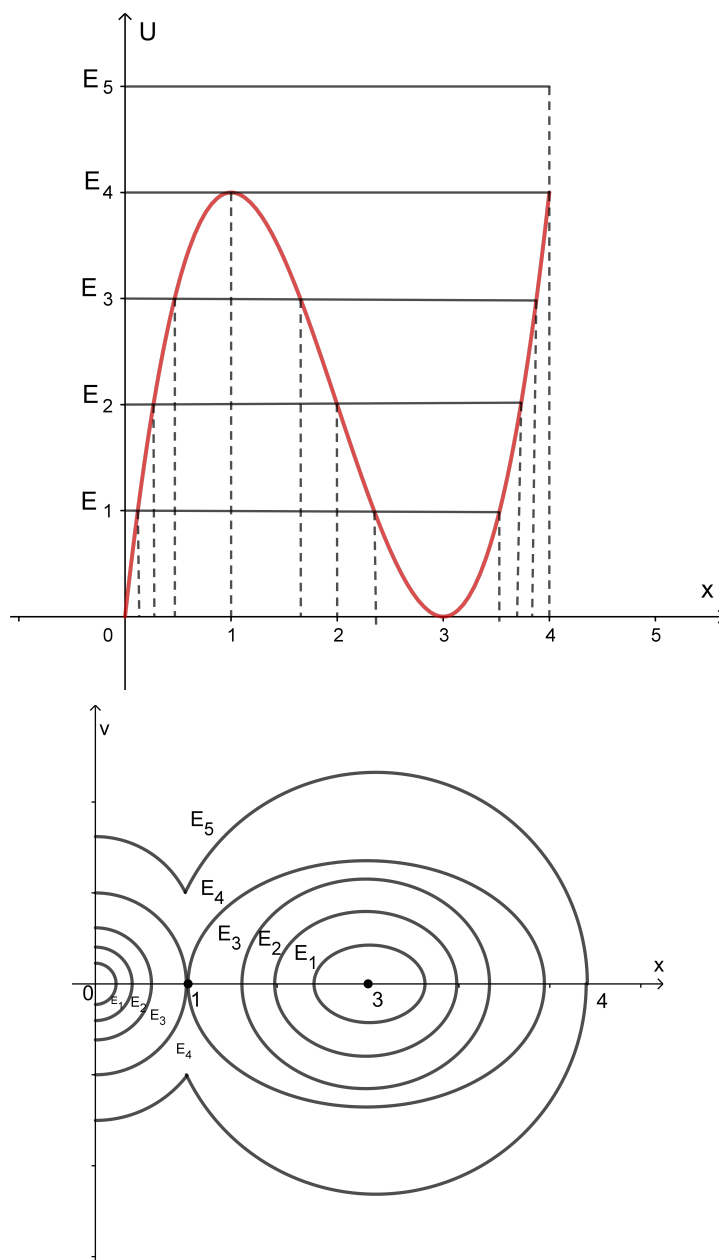
$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t) = 0$$

$$\frac{dv}{dt}(t) = a(t) = 0$$

Segue que a função constante  $x(t) = x_0$  verifica a equação de Newton. Assim se colocarmos o corpo na posição  $x_0$  ele permanece em repouso.

DEFINIÇÃO 9.11. *Os pontos críticos da energia potencial são de Pontos de Equilíbrio. Um ponto de mínimo local é chamado de Ponto de Equilíbrio Estavel e um ponto de máximo local de Ponto de Equilíbrio Instavel.*

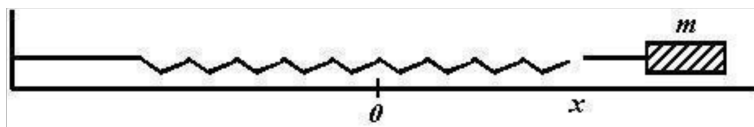
A justificativa para esta nomenclatura é a seguinte: Se considerarmos um movimento com energia total próxima de um valor mínimo da energia potencial então o movimento se dá ao redor da posição de equilíbrio. Por outro lado se a energia total está próxima de um valor máximo da energia potencial, como esta só pode diminuir então o ponto afasta-se do posição de equilíbrio. Nas figuras abaixo ilustramos as curvas de fase para a energia potencial e para alguns valores da energia total.



$x_0 = 1$  equilíbrio instável     $x_0 = 3$  equilíbrio estável

EXEMPLO 9.12. (Mola) Considere um corpo de massa  $m$  sujeito à ação de uma mola cuja constante é  $k$ . Desprezando o atrito a força que age no corpo é

$$F = -kx$$



A energia potencial é dada por

$$U(x) = kx^2/2$$

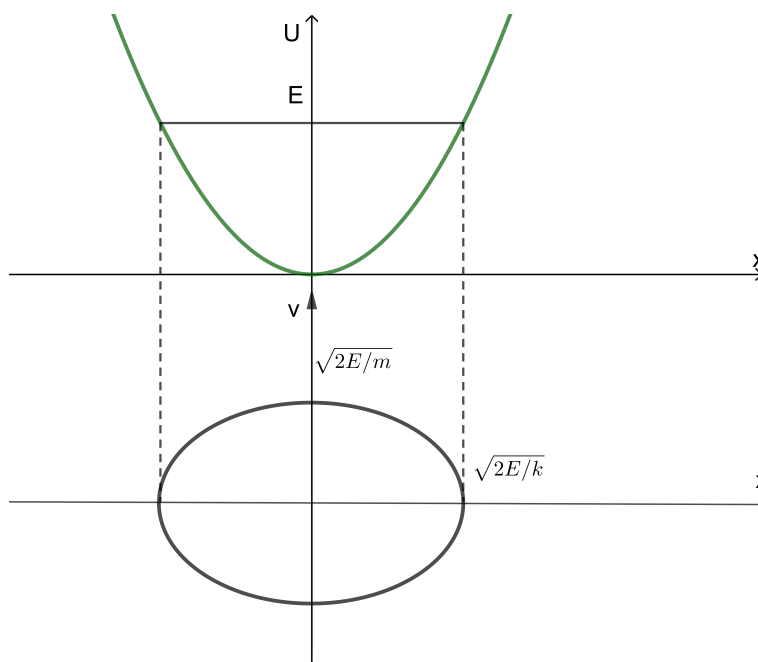
e a equação da energia é

$$(1/2)mv^2 + (1/2)kx^2 = E$$

$x_0 = 0$  é a única posição de equilíbrio estável.

O gráfico da função potencial é uma parábola.

As curvas de fase são elipses.



Vamos encontrar as soluções da equação da mola.

Da equação da energia temos

$$m \frac{dx^2}{dt} + kx^2 = 2E$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}}$$

Separando variáveis e integrando,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E - kx^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{m}} dt = \frac{t}{\sqrt{m}} + c$$

Façamos a mudança de variável na primeira integral

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \theta$$

$$dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \theta d\theta$$

Substituindo e simplificando obtém-se,

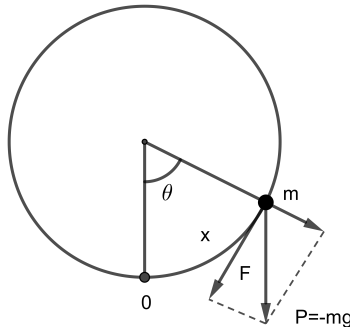
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2E - kx^2}} dx = \int \sqrt{1/k} d\theta = \sqrt{1/k} \theta = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{k}{2E}} x$$

De onde

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \delta \right)$$

onde  $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$  é a amplitude,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência, e  $\delta$  é o ângulo de fase.

Resumindo, as soluções da equação da mola são as funções  $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$



EXEMPLO 9.13. (*Pêndulo*) O movimento do pêndulo se dá sobre a circunferência de raio  $l$  como na figura acima. A força que contribui para o movimento é dada por

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta$$

A posição do ponto é dada por  $x = x(t) = l\theta(t)$

A título de exemplo vamos escolher  $l = 1$  e  $mg = 1$ . Assim  $x = x(t) = \theta(t)$   $F = -\operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen} x$ .

A energia potencial para este campo de forças é  $U(x) = -\cos x$ .

A equação da energia toma a forma

$$(1/2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \cos x = E$$

Vamos separar variáveis.

$$\frac{dx}{\sqrt{2(E + \cos x)}} = dt$$

Integrando,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2(E + \cos x)}} = t + c$$

Até este ponto seguimos as mesmas etapas como no exemplo da mola. O próximo passo seria encontrar uma primitiva da integral acima. Acontece que esta integral está entre as chamadas integrais elípticas que não podem ser resolvidas em termos de funções elementares.

Resta-nos dois caminhos a seguir, a saber estudamos o movimento do pêndulo para pequenos deslocamentos próximo da posição de equilíbrio usando a aproximação  $\operatorname{sen} x \simeq x$  e recaímos no caso da mola com constante  $k = 1$  ou fazemos um estudo qualitativo através do plano de fase. Seguiremos este último caminho.

Fixemos nossa atenção para o intervalo  $[-\pi, \pi]$  pois como o potencial é periódico podemos estender periodicamente para a toda a reta.

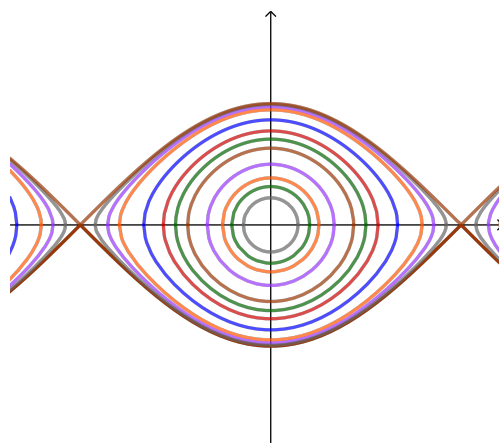
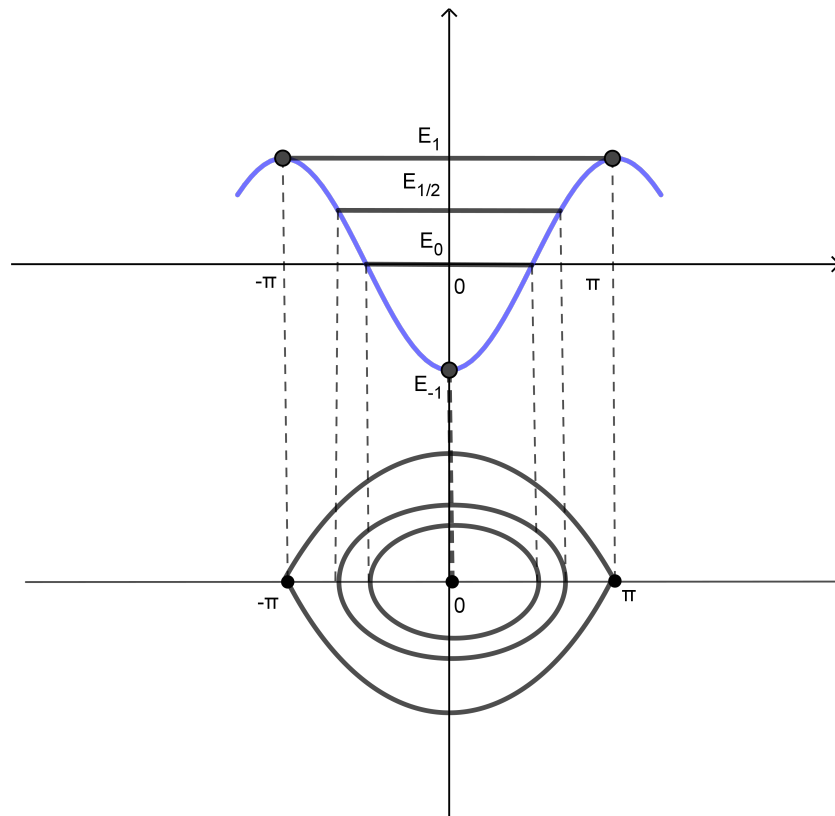
Os pontos críticos da função potencial  $U(x) = -\cos x$  no intervalo acima são  $x_0 = 0$  que é ponto de mínimo cujo valor mínimo da energia potencial é  $-1$ ,  $x_1 = -\pi$ ,  $x_2 = \pi$  que são pontos de máximo com valores 1. Assim  $x_0$  é um ponto de equilíbrio estável e  $x_1, x_2$  são instáveis.

Para cada valor da energia total  $E \geq -1$  temos uma curva de fase cuja equação é

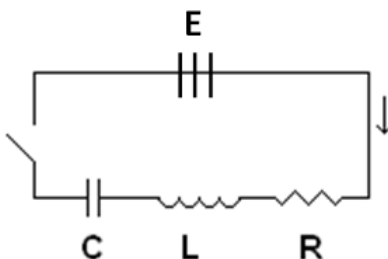
$$(1/2)v^2 - \cos x = E$$

ou

$$v = \pm \sqrt{2(\cos x + E)}$$



**4.2. Circuitos Elétricos.** Nesta seção vamos enunciar e equacionar a variação da corrente elétrica e da carga num circuito composto por uma resistência, um capacitor, um indutor e uma fonte de energia.



No circuito acima  $E$  é uma fonte de energia. A lei de Ohm diz que a queda de voltagem na resistência  $R$  é proporcional a corrente:

$$V_R = RI$$

A lei de Coloumb diz que a queda voltagem no capacitor  $C$  é proporcional a carga:

$$V_C = \frac{1}{C}Q$$

A lei de Faraday diz que a queda de voltagem no indutor  $L$  é proporcional a velocidade da corrente:

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$

Finalmente a lei de Kirchoff estabelece que a soma das quedas de voltagem é igual a voltagem imposta pela fonte de energia:

$$V_R + V_C + V_L = E$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E$$

Levando em conta que  $I = \frac{dQ}{dt}$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E$$

ou ainda, derivando a equação acima

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$



EXEMPLO 9.14. Considere o seguinte circuito consistindo de uma resistência  $R = 10$  ohms, uma impedância  $L = 100$  henrys e uma fonte de energia  $E = 40$  volts. Vamos determinar a corrente no circuito.

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{E}{L}$$

$$A(t) = \int -\frac{R}{L} dt = -\frac{R}{L}t$$

$$I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt$$

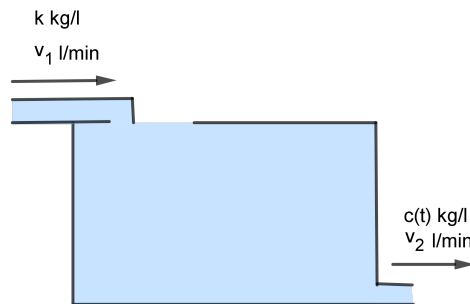
$$I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

Como  $I(0) = 0$  tiramos  $c = -\frac{E}{R}$

Substituindo os valores dados obtemos

$$I(t) = 4(1 - e^{-0,1t})$$

**4.3. Misturas.** Nesta seção vamos estudar a variação da concentração de uma mistura dentro de um tanque onde entra e sai a mesma mistura com concentração diferente da inicial. Mais precisamente considere o seguinte problema.



Um tanque com volume  $V$  (em litros) está cheio de uma certa solução, sendo a massa dissolvida igual a  $m_0$  quilogramas no instante inicial. Uma outra solução da mesma substância cuja concentração é  $k$  kg/l penetra no recipiente a uma velocidade de  $v_1$  litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de  $v_2 \geq v_1$  litros por minuto. Vamos determinar a massa  $m(t)$  e a concentração  $x(t)$  da solução no instante  $t$ .

A variação da massa num determinado instante é dada pela quantidade de massa que entra menos a que sai. Como entra  $k$  kilogramas por litro com uma velocidade de  $v_1$  litros por minuto então entra  $kv_1$  kilogramas por minuto. No instante  $t$  o volume da solução no tanque é igual a  $V(t) = V - vt$  onde  $v = v_2 - v_1$  e a concentração  $c(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$ . Assim sai do tanque  $\frac{m(t)}{V - vt}v_2$  kilograma por minuto.

Desta forma temos

$$\frac{dm}{dt} = kv_1 - \frac{m}{V - vt}v_2$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{v_2}{V - vt}m + kv_1$$

Esta é uma equação linear da forma

$$\frac{dm}{dt} = a(t)m + b(t)$$

onde

$$a(t) = -\frac{v_2}{V - vt} \text{ e } b(t) = kv_1$$

Vamos considerar dois casos.

1)  $v_2 = v_1$

Então  $v = 0$ . Renomeando coloquemos  $v = v_2 = v_1$ . Então

$$a(t) = -\frac{v}{V} \text{ e } b(t) = kv$$

Usando a fórmula

$$m(t) = ce^{A(t)} + e^{A(t)} \left( \int b(t)e^{-A(t)} dt \right)$$

deduzida no item 2.1 temos

$$A(t) = - \int \frac{v}{V} dt = -\frac{v}{V}t$$

Substituindo,

$$m(t) = ce^{-\frac{v}{V}t} + e^{-\frac{v}{V}t} \left( \int kve^{\frac{v}{V}t} dt \right)$$

de onde

$$m(t) = ce^{-\frac{v}{V}t} + kV$$

Impondo a condição inicial  $m(0) = m_0$  obtemos  $c = m_0 - kV$  finalmente temos

$$m(t) = (m_0 - kV)e^{-\frac{v}{V}t} + kV$$

e a concentração

$$c(t) = m(t)/V = (k_0 - k)e^{-\frac{v}{V}t} + k$$

onde  $k_0 = m_0/V$  é a concentração inicial.

2)  $v_2 > v_1$

Então  $v = v_2 - v_1 > 0$

e tem-se

$$A(t) = - \int \frac{v_2}{V - vt} dt = \frac{v_2}{v} \ln(V - vt) = \ln(V - vt)^{v_2/v}$$

Substituindo,

$$m(t) = c(V - vt)^{v_2/v} + kv_1(V - vt)^{v_2/v} \left( \int (V - vt)^{-v_2/v} dt \right)$$

$$m(t) = c(V - vt)^{v_2/v} + kv_1(V - vt)^{v_2/v} \left( (1 - v_2/v)^{-1} / -v \right) (V - vt)^{(1-v_2/v)}$$

Simplificando

$$m(t) = c(V - vt)^{v_2/v} + k(V - vt)$$

Impondo a condição inicial  $m(0) = m_0$  determinamos a constante  $c$ :

$$c = \frac{m_0 - kV}{V^{v_2/v}}$$

Finalmente,

$$m(t) = \frac{m_0 - kV}{V^{v_2/v}}(V - vt)^{v_2/v} + k(V - vt)$$

e a concentração,

$$c(t) = m(t)/V(t) = \frac{k_0 - k}{V^{v_1/v}}(V - vt)^{v_1/v} + k$$

Dividimos em dois casos pois no primeiro  $v = 0$  e no segundo aparece  $v$  no quociente de frações. Aparentemente as soluções obtidas no caso 1) é bem distintas daquelas obtidas no segundo caso. Para compreendermos o que se passa vamos fazer  $v$  tender a zero para a concentração do caso 2). Para esclarecer as idéias e não se perder na quantidade de símbolos façamos as seguintes simplificações.

No exemplo 1)  $k_0 = 2$ ,  $k = 1$  e  $v = v_1 = v_2 = 1$  de forma que,

$$c(t) = e^{-t} + 1$$

No exemplo 2)  $k_0 = 2$ ,  $k = 1$  e  $v = v_1 = 1$  assim,

$$c(t) = (1 - (v_2 - 1)t)^{\frac{1}{(v_2 - 1)}} + 1$$

$$c(t) = e^{\frac{\ln(1 - (v_2 - 1)t)}{(v_2 - 1)}} + 1$$

Com as devidas mudanças de variáveis tem-se

$$\lim_{v_2 \rightarrow 1+} \frac{\ln(1 - (v_2 - 1)t)}{(v_2 - 1)} =$$

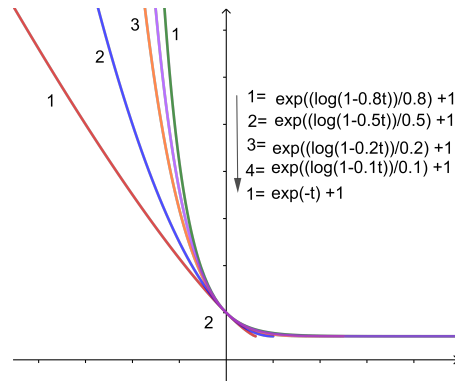
$$\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 - ut)}{u} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-t) \frac{\ln(1 + x)}{x} = -t$$

Concluimos que

$$\lim_{v_2 \rightarrow 1+} c(t) = e^{\frac{\ln(1 - (v_2 - 1)t)}{(v_2 - 1)}} + 1 = e^{-t} + 1$$

que é a concentração do caso 1). A figura abaixo ilustra as concentrações para alguns valores de  $v_2$ .



**5. Exercícios**

(1) Resolva as equações:

a)  $y' = e^{x-2y}$

b)  $(\operatorname{sen}x)y' + (\operatorname{cos}x)y = 1$

c)  $y' = x^3 - 2xy$

(2) Encontre as soluções que verificam a condição inicial dada:

a)  $y' = x + y; y(0) = 1$

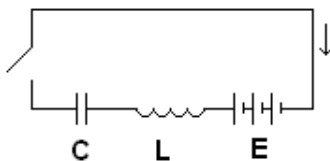
b)  $y' = x(y + 1); y(0) = -1$

(3) Determine as soluções constantes da equação

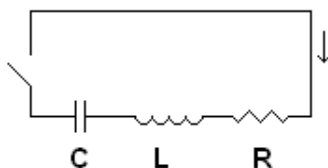
$$\frac{dx}{dt} = 9 - x^2$$

e faça um esboço das soluções.

(4) Determine a corrente  $I$  em função do tempo no circuito  $LC$ , onde  $L = 10\text{henry}$ ,  $C = 0,05\text{farad}$ ,  $E = 120V$  e a carga no capacitor é nula no instante inicial.



(5) Num circuito RLC, carrega-se o capacitor com uma carga de 2 coulombs. Qual a corrente no circuito depois de ligada a chave, sabendo-se que  $R = 20$  ohms,  $L = 10$  henrys e  $C = 0,05$  farad?



(6) A lei do resfriamento de Newton diz que: "A taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente". Uma latinha de cerveja inicialmente  $20^{\circ}C$  é colocada em um refrigerador

cuja temperatura é de  $-10^{\circ}C$ . Sabendo-se que depois de 1 minuto a temperatura da cerveja é  $18^{\circ}C$  depois de quanto tempo estará a  $0^{\circ}C$  ?

- (7) A população de uma cidade é de 1.000.000 habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em 7 dias, esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos sãos e enfermos, sendo a taxa de variação na porcentagem de enfermos proporcional ao número de contatos e este, proporcional ao produto das porcentagens de sãos e enfermos. Supondo a população fixada, pergunta-se: após quanto tempo os enfermos serão 50% da população?
- (8) Uma bola de naftalina esférica perde massa a uma razão que é proporcional à sua área total. Se ela perde metade de massa em 75 dias, quanto tempo levará para desaparecer completamente?
- (9) Determine a velocidade que um projétil deve ser lançado na direção radial de forma que ele não retorne mais a Terra.
- (10) Suponha que uma sala contendo inicialmente  $60m^3$  de ar esteja inicialmente livre de monóxido de carbono. Começa-se a fumar cigarros e o ar expelido a uma taxa de  $0,003m^3/min$  contém 4% de monóxido de carbono. A mistura homogeneizada deixa a sala na mesma taxa.
- a) Encontre a porcentagem em volume do monóxido de carbono em um instante qualquer  $t$ .
- b) Uma exposição prolongada ao monóxido de carbono à uma porcentagem de 0,012 é prejudicial ao organismo humano. Depois de quanto tempo é atingida esta concentração na sala?
- (11) Um recipiente contém um volume  $V$  (em litros) de uma solução salina, sendo a massa de sal dissolvida igual a  $m_0$  quilogramas no instante inicial. Uma outra solução de concentração  $k$  (em  $kg/l$ ) penetra no recipiente a uma razão constante de  $r$  litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de  $r$  litros por minuto. Seja  $x(t)$  a concentração da solução no recipiente no instante  $t$ .
- a) Determine a equação diferencial que admite  $x(t)$  como solução.
- b) Resolva a equação obtida no item (a).
- c) Usando o item (b), determine em que condições  $x(t)$  é crescente e em que condições  $x(t)$  é

decrecente. Interprete os resultados.

*d)* Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ . Interprete o resultado.



## Funções de Várias Variáveis

Neste capítulo estudaremos as noções de diferenciabilidade das funções de duas ou três variáveis e suas consequências.

### 1. Funções de Duas ou três Variáveis

Lembremos que o *Produto Escalar* do  $\mathbb{R}^n$  é definido por

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

O *Módulo* (ou Norma) de um vetor  $x$  é o número

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

e a *Distância*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Chama-se *Bola Aberta* com centro  $c$  e raio  $r$  ao conjunto

$$B_c(r) = \{x : \|x - y\| < r\}$$

a *Bola Fechada*

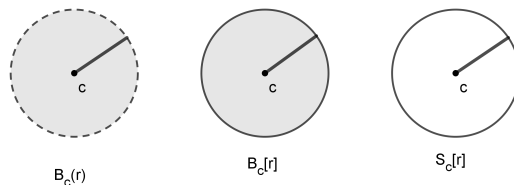
$$B_c[r] = \{x : \|x - y\| \leq r\}$$

e a *Esfera*

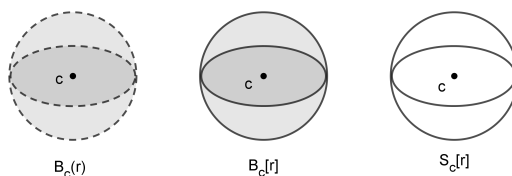
$$S_c[r] = \{x : \|x - y\| = r\}$$

Quando o centro é a origem  $c = 0$  escreveremos  $B(r)$ ,  $B[r]$ ,  $S(r)$  para a bola aberta, fechada, esfera.

No plano  $\mathbb{R}^2$  temos as seguintes ilustrações:



e no espaço  $\mathbb{R}^3$



Os domínios das funções de uma variável são essencialmente intervalos e quando se trata de diferenciabilidade estes seus domínios são considerados intervalos abertos. Para funções de várias variáveis os intervalos são substituídos por conjuntos abertos que vamos definir a seguir.

DEFINIÇÃO 10.1. *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ .*

- (1) *Um ponto  $p$  diz-se Interior a  $D$  se para algum  $r > 0$  tem-se que  $B_p(r) \subset D$ .  $D$  diz-se Aberto se todos os seus pontos são interiores.*
- (2)  *$p$  é um Ponto de fronteira se para todo  $r > 0$  tem-se que  $B_p(r) \cap D \neq \emptyset$  e  $B_p(r) \cap (\mathbb{R}^n - D) \neq \emptyset$ . O conjunto dos pontos de fronteira será denotado por  $\partial D$ .*
- (3)  *$D$  diz-se Fechado se  $\mathbb{R}^n - D$  for aberto.*

Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é chamada função de  $n$  variáveis a valores reais.

EXEMPLO 10.2.

- (1)  $f(x) = a \cdot x$  ou explicitamente  $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$  é uma função linear.
- (2)  $f(x) = 1/\|x\|$  seu domínio é o conjunto  $D = \mathbb{R}^n - \{0\}$ .
- (3)  $f(x) = \text{sen}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

Quando  $n = 2$  vamos escrever  $f(x, y)$  ao invés de  $f(x_1, x_2)$  e se  $n = 3$  escreveremos  $f(x, y, z)$ .

- (1)  $f(x, y) = e^{xy}$
- (2)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- (3)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

DEFINIÇÃO 10.3. Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto,  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor não nulo. A Derivada Direcional de  $f$  em  $p \in D$  na direção  $v$  é o número

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

Como  $D$  é aberto então para  $t$  suficientemente pequeno  $p + tv \in D$ .

Se  $g(t) = f(p + tv)$  então  $\frac{\partial f}{\partial v}(p) = g'(0)$ .

DEFINIÇÃO 10.4. Seja  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

A  $i$ -ésima Derivada parcial de  $f$  em  $p$  é o número  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  igual a derivada direcional de  $f$  em  $p$  na direção  $e_i$ .

Se  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}$$

De uma maneira mais simples a  $i$ -ésima Derivada parcial é a derivada de  $f$  supondo as outras variáveis constantes.

EXEMPLO 10.5. Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $p = (1, 2)$  e  $v = (1, 1)$ . Então

$$f(p + tv) = (1 + t)^2 + (2 + t)^2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = 2 + 4 = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4$$

Se  $p = (x, y)$  é um ponto genérico as derivadas parciais serão

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

DEFINIÇÃO 10.6. - Diferenciabilidade

A função  $f$  diz-se diferenciável em  $p$  se existem as derivadas parciais em  $p$  e

$$f(p + v) - f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i + \|v\|R(v)$$

onde

$$\lim_{v \rightarrow 0} R(v) = 0$$

$f$  diz-se diferenciável se for diferenciável em todo  $p \in D$ .

Se  $f$  é diferenciável em  $p$  então

$$f(p + tv) - f(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)tv_i + \|tv\|R(v)$$

Dividindo por  $t$

$$\frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i + \frac{|t|}{t}\|v\|R(tv)$$

Como  $\lim_{v \rightarrow 0} R(v) = 0$  então  $\lim_{t \rightarrow 0} R(tv) = 0$  e concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i$$

Define-se a *Diferencial* de  $f$  em  $p$  por

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i$$

Deste modo se  $f$  for diferenciável temos

$$df_p(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(p)$$

Considere a função

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$$

Então

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1$$

e todas as outras derivadas parciais são nulas.

Portanto

$$df_p(v) = v_i = f(v)$$

Assim  $df_p = f$  independentemente de  $p$ . Em outras palavras  $df$  é constante.

A notação para esta diferencial é

$$dx_i = df$$

Desta forma

$$dx_i(v) = v_i$$

Voltando para a diferencial de uma função  $f$  arbitrária temos

$$df_p(v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dx_i(v)$$

Como esta igualdade vale para todo  $v$  então

$$df_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dx_i$$

Deixando a variável  $p$  implícita

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

que é a expressão clássica da diferencial.

EXEMPLO 10.7. *Se*

$$f(x, y) = x^2 + y^3$$

*então*

$$df = 2xdx + 3y^2dy$$

*e a diferencial no ponto (1, 1) é dada por*

$$df_{(1,1)} = 2dx + 3dy$$

Caso  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$  existe para todo  $p \in D$  então a função

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$$

é chamada de  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$ .

As derivadas parciais destas funções em  $p$  são as derivadas segundas de  $f$  em  $p$  e designadas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(p)$$

TEOREMA 10.8. (SCHWARZ)

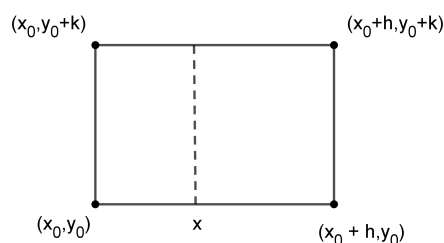
Se as derivadas  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  existem em  $D$  e são contínuas então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta demonstrar o teorema no plano. Seja  $p = (x_0, y_0)$ . Considere os pontos  $(x_0 + h, y_0)$ ,  $(x_0, y_0 + k)$ ,  $(x_0 + h, y_0 + k)$  e as funções

$$K(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

$$H(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$



□

$$K(x_0 + h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$$

$$K(x_0) = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

$$K(x_0 + h) - K(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Pelo TVM existe  $x_1$  entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  tal que

$$K(x_0 + h) - K(x_0) = K'(x_1)h$$

Calculando a derivada de  $K$

$$K'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0)$$

Aplicando novamente o TVM agora na variável  $y$  existe  $y_1$  entre  $y_0$  e  $y_0 + k$  tal que

$$K'(x_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1)k$$

Segue que

$$K(x_0 + h) - K(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1)kh$$

Seguindo os mesmos passos para a função  $H$  existem  $x_2$  e  $y_2$  tais que

$$H(y_0 + k) - H(y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2)hk$$

Como

$$H(y_0 + k) - H(y_0) = K(x_0 + h) - K(x_0)$$

temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_1, y_1)$$

onde  $x_1, x_2$  estão entre  $x_0$  e  $x_0 + h$  e  $y_1, y_2$  entre  $y_0$  e  $y_0 + k$ .

Como as derivadas segundas são contínuas fazendo  $(h, k) \rightarrow 0$  concluímos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

PROPOSIÇÃO 10.9. (LEIBNIZ)

Seja  $f : [c, d] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  existe para  $(x, t) \in ]c, d[ \times [a, b]$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} : ]c, d[ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Se

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

então  $g$  é derivável e

$$\frac{dg}{dx}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Em outras palavras : a derivada da integral é a integral da derivada.

DEMONSTRAÇÃO.

$$\frac{dg}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(x+h, t) - f(x, t)}{h} dt$$

Pelo TVM para algum  $\theta \in ]0, 1[$

$$f(x+h, t) - f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t)h$$

Substituindo,

$$\frac{dg}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t) dt$$

Como a função  $\frac{\partial f}{\partial x} : ]c, d[ \times ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e seu domínio é um retângulo fechado ela é uniformemente contínua. Assim dado  $\epsilon > 0$  podemos encontrar um  $\delta > 0$  tal que

$$|x_2 - x_1| < \delta \quad \text{e} \quad |t_2 - t_1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, t_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, t_1) \right| < \epsilon$$

Em particular se  $x_2 = x + \theta h$ ,  $x_1 = x$  e  $t_2 = t_1 = t$  temos

$$|h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| < \epsilon$$

Assim para  $|h| < \delta$  temos

$$\left| \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right) dt \right| \leq \int_a^b \left| \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right) \right| dt < \epsilon(b-a)$$

demonstrando que

$$\frac{dg}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta h, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

□

PROPOSIÇÃO 10.10. *Seja  $B_p[r] \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : B_p[r] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$  existe para  $(x, t) \in B_p(r) \times [a, b]$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : B_p(r) \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Se*

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$$

então  $g$  é derivável e

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt$$



Esta proposição estende a anterior para dimensões superiores. A sua demonstração é uma consequência daquela. Fixe todas as variáveis exceto  $x_i$  e considere o plano  $(x_i, t)$ .

## 2. Regra da Cadeia I

Nesta secção vamos enunciar e demonstrar uma forma da regra da cadeia que será generalizada posteriormente.

PROPOSIÇÃO 10.11. *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $c : I \rightarrow D$  diferenciáveis. Então a função composta  $g(t) = (f \circ c)(t) = f(c(t))$  é derivável e*

$$\frac{dg}{dt}(t) = df_{c(t)} \left( \frac{dc}{dt}(t) \right)$$

DEMONSTRAÇÃO.

$$g(t+h) - g(t) = f(c(t+h)) - f(c(t))$$

Abreviando

$$\Delta c = c(t+h) - c(t)$$

$$g(t+h) - g(t) = f(c(t) + \Delta c) - f(c(t)) = df_{c(t)}(\Delta c) + \Delta c R(\Delta c)$$

Dividindo por  $h$  e tirando o limite,

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = df_{c(t)} \left( \frac{\Delta c}{h} \right) + \frac{\Delta c}{h} R(\Delta c)$$

$$\frac{dg}{dt}(t) = df_{c(t)} \left( \frac{dc}{dt} \right) (t)$$

□

## 3. Gradiente, Conjuntos de Nivel

DEFINIÇÃO 10.12. *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $k$  uma constante. O conjunto*

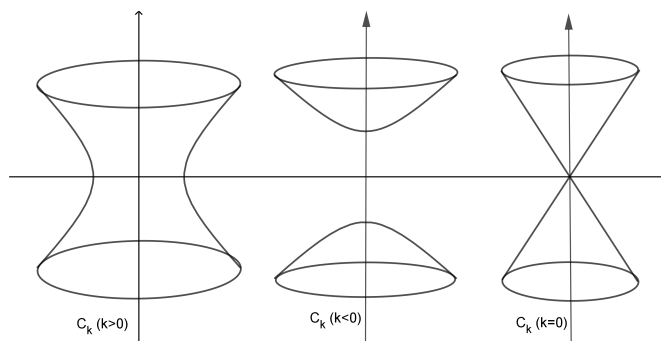
$$C_k = \{p \in D : f(p) = k\}$$

*é chamado Conjunto de nivel  $k$  da função  $f$ .*

Caso  $n = 2$  o conjunto  $C_k$  é chamado de Curva de Nivel. Quando  $n = 3$  diremos que  $C_k$  é uma Superfície de Nivel.

EXEMPLO 10.13. *Se  $f(x, y) = x^2 + y^2$  então  $C_k$  é uma circunferência se  $k > 0$ , um ponto quando  $k = 0$  e o conjunto vazio para  $k < 0$ .*

EXEMPLO 10.14. Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2 - z^2$ .  
então  $C_k$  é um hiperbolóide de uma folha se  $k > 0$ , um cone quando  $k = 0$  e um hiperbolóide de duas folhas para  $k < 0$ .



DEFINIÇÃO 10.15. O Gradiente em  $p$  de uma função  $f$  diferenciável em  $p$  é o único vetor  $\nabla_p f$  que verifica

$$df_p(v) = \nabla_p f \cdot v$$

Se  $v = e_i$  então

$$df_p(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \nabla_p f \cdot e_i$$

Segue que

$$\nabla_p f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) e_i$$

Por exemplo se  $f(x, y) = x^2 + y^3$  então  $\nabla_{(x,y)} f = 2xe_1 + 3y^2e_2$

PROPOSIÇÃO 10.16.

- (1)  $f$  é crescente na direção do gradiente.
- (2) O gradiente é ortogonal a um conjunto de nível da função.

DEMONSTRAÇÃO.

- (1) Seja  $c(t)$  uma curva de campo do gradiente, isto é

$$\frac{dc}{dt}(t) = \nabla_{c(t)} f$$

Considere a função  $F(t) = f(c(t))$ .

Derivando,

$$\frac{dF}{dt}(t) = df\left(\frac{dc}{dt}\right) = \nabla_{c(t)} f \cdot \frac{dc}{dt} = \|\nabla_{c(t)} f\|^2 \geq 0$$

conclui-se que  $f$  é crescente.

(2) Considere um conjunto de nível  $C_k$  e  $p \in C_k$ . A seguir tome uma curva  $c(t)$  tal que  $c(0) = p$ ,  $c(t) \in C_k$ .

A função  $F(t) = f(c(t)) = k$  é constante. Derivando

$$\nabla_{c(0)} f \cdot \frac{dc}{dt}(0) = 0$$

mostrando que  $\nabla_p f$  é ortogonal a todos os vetores tangentes a  $C_k$  em  $p$ .

□

#### 4. Campos de Vetores

DEFINIÇÃO 10.17. *Um Campo de Vetores num aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$  é uma função diferenciável  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

EXEMPLO 10.18.

*O gradiente de uma função diferenciável*

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

*é um campo de vetores definido em  $D$*

$$\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

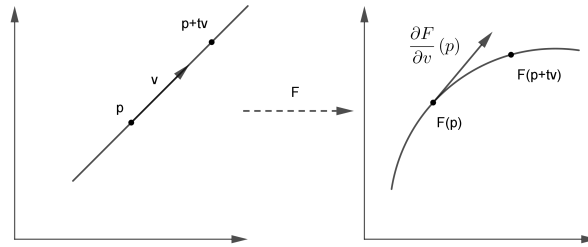
A definição de diferenciabilidade de tais funções é formalmente a mesma que aquela para funções escalares apesar da sua interpretação ser bem diferente.

DEFINIÇÃO 10.19. *Seja  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto,  $v \in \mathbb{R}^n$  um vetor não nulo. A Derivada Direcional de  $F$  em  $p \in D$  na direção  $v$  é o número*

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t}$$

Observe que  $c(t) = F(p + tv)$  é uma curva no  $\mathbb{R}^n$  e a derivada direcional é o vetor tangente a esta curva no instante  $t = 0$ .

$$\frac{\partial F}{\partial v}(p) = \frac{dc}{dt}(0)$$



DEFINIÇÃO 10.20.  $F$  diz-se *Diferenciável em  $p$*  se existem as derivadas parciais em  $p$  e

$$F(p+v) - F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(p)v_i + \|v\|R(v)$$

onde

$$\lim_{v \rightarrow 0} R(v) = 0$$

## 5. Sistemas de Coordenadas

DEFINIÇÃO 10.21.

Um *Sistema de Coordenadas* num aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  é uma aplicação

$$\varphi : U \rightarrow V$$

*diferenciável, sobrejetora e inversível com inversa também diferenciável.*

Se

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

diremos que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  são as coordenadas de  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  neste sistema.

Para  $n = 2$  vamos escrever

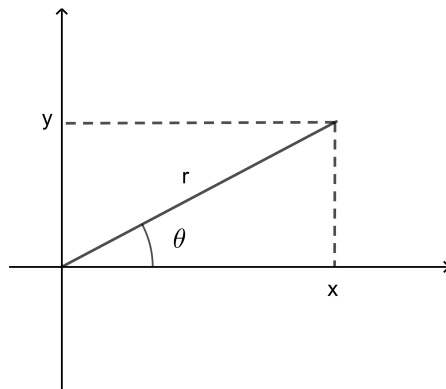
$$\varphi(u, v) = (x, y)$$

ou usaremos outras letras que sugiram a natureza das coordenadas utilizadas.

EXEMPLO 10.22. - Coordenadas polares

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$$

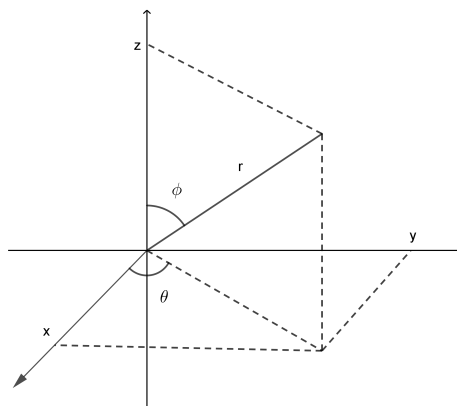
$(r, \theta)$  são as coordenadas polares de  $(x, y)$ .



EXEMPLO 10.23. - Coordenadas Esféricas

$$\varphi(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) = (x, y, z)$$

$(r, \theta, \phi)$  são as coordenadas esféricas de  $(x, y, z)$ .



DEFINIÇÃO 10.24. As curvas

$$c_i(t) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, t, x_i, \dots, x_n)$$

são chamadas de curvas coordenadas e os campos de vetores

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{dc_i}{dt}(x_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

são chamados de campos coordenados.

EXEMPLO 10.25. Continuando com os exemplos acima e usando uma indexação sugestiva as curvas coordenadas para o sistema polar são

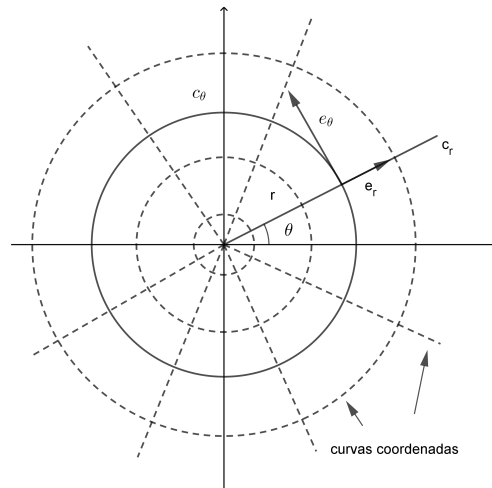
$$c_r(t) = (t \cos \theta, t \operatorname{sen} \theta)$$

$$c_\theta(t) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

sendo a primeira uma semireta e a segunda uma circunferência ambas passando pelo ponto  $(x, y) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$  e os campos coordenados são

$$e_r(r, \theta) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$$

$$e_\theta(r, \theta) = (-r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$$



No sistema de coordenadas esféricas temos

$$c_r(t) = (t \operatorname{sen} \phi \cos \theta, t \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, t \cos \phi)$$

$$c_\theta(t) = (r \operatorname{sen} \phi \cos t, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} t, r \cos \phi)$$

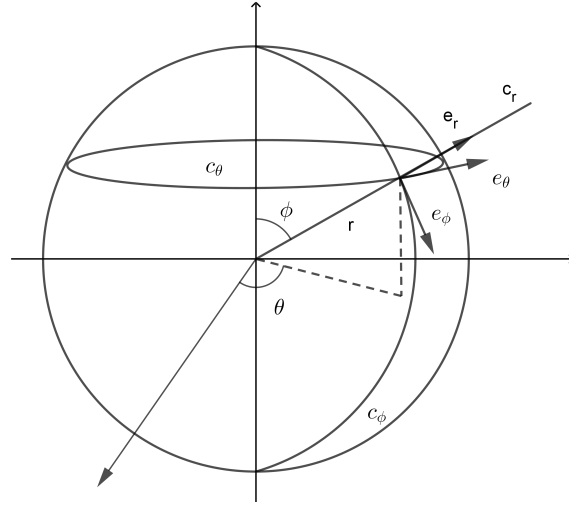
$$c_\phi(t) = (r \operatorname{sen} t \cos \theta, r \operatorname{sen} t \operatorname{sen} \theta, r \cos t)$$

e os campos coordenados são

$$e_r(r, \theta, \phi) = (\operatorname{sen} \phi \cos \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \phi)$$

$$e_\theta(r, \theta, \phi) = (-r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 0)$$

$$e_\phi(r, \theta, \phi) = (r \cos \phi \cos \theta, r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{sen} \phi)$$



## 6. Regra da Cadeia II

Vamos enunciar uma segunda forma da regra da cadeia que será utilizada nas próximas secções.

**TEOREMA 10.26.** *Seja  $\varphi : U \rightarrow V$  uma aplicação diferenciável onde  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  são abertos e  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  também diferenciável. Se  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  é a composta  $g = f \circ \varphi$  então*

$$dg_p = df_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p$$

A demonstração segue os mesmos passos da regra da cadeia I. Deixaremos de fazê-la. Se  $v \in \mathbb{R}^n$  então

$$dg_p(v) = df_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v)) = df_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(p)\right)$$

Em coordenadas

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n v_i e_i \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} v_i \\ dg_p(v) &= \sum_{i=1}^n df_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) v_i \\ dg_p &= \sum_{i=1}^n df_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx_i \end{aligned}$$

Decompondo

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_n) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= (y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} e_j$$

Substituindo na expressão de  $dg_p$ :

$$dg_x = \sum_{i=1}^n df_{\varphi(x)} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} e_j \right) dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x) dx_i$$

$$dg_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

Observemos que numa versão dual pode-se escrever

$$\begin{aligned} d\varphi_x &= \sum_{j=1}^n dy_j e_j \\ dg_x &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) (dy_j)_x \end{aligned}$$

Então

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) (dx_j(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) (dy_j)_{\varphi(x)}$$

o que mostra que a diferencial é invariante por mudança de coordenadas.

## 7. Teorema das Funções Implícitas

Os teoremas da função inversa e da função implícita constituem dois resultados básicos importantes do Cálculo Diferencial. Na maioria dos textos o teorema da função implícita (TFI) é obtido como uma consequência do teorema da função inversa. No que segue daremos uma demonstração deste teorema utilizando basicamente a Regra de Cramer para sistemas lineares e o Teorema do Valor Médio.



Utilizaremos as seguintes notações:

$$\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$$

$p = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  onde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_p)$ .

Se  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é uma aplicação definida em  $U$   $\varphi(x) = (y_1(x), \dots, y_p(x))$ .

TEOREMA 10.27. (Teorema das Funções Implícitas)

Sejam  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  para  $i = 1, \dots, p$  funções de classe  $C^1$  definidas no aberto  $D \subset \mathbb{R}^{n+p}$  e  $(a, b) \in D$  tal que  $f_i(a, b) = 0$ . Se o determinante jacobiano

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(a, b) \neq 0$$

então existe uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $a$ , uma vizinhança compacta  $K \subset \mathbb{R}^p$  e uma função

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow K \\ \varphi(x) &= (y_1(x), \dots, y_p(x)) \end{aligned}$$

tal que:

(i)  $\varphi(a) = b$

(ii) Se  $(x, y) \in U \times K$  então

$$y = \varphi(x) \iff f_i(x, \varphi(x)) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, p$$

(iii) A diferencial de  $\varphi$  tem matriz jacobiana dada por

$$J(\varphi) = \left( \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) = - \left( \frac{\Delta_j^k}{\Delta} \right)$$

onde

$$\Delta_j^k = \det \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial y_{k+1}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p} \right)$$

sendo as derivadas parciais calculadas no ponto  $(x, \varphi(x))$  e  $f = (f_1, \dots, f_p)$ .

Quando  $p = 1$  temos apenas uma função  $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ . A função implícita  $\varphi(x) = y(x)$  verifica para todo  $x \in U$

$$f(x_1, \dots, x_n, y(x))$$

e suas derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(x) = - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$$

Neste caso uma demonstração simples e elegante pode ser vista no livro de E.L.Lima- Análise Real, volume 2.

Para comodidade do leitor incluiremos esta demonstração com pequenas modificações assim como uma demonstração de uma forma da Regra de Cramer adaptada aos nossos propósitos.

**7.1. Regra de Cramer.** Considere o sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Se colocarmos  $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$  e  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  o sistema se reduz a uma única equação vetorial:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Considerando os vetores  $a_i$  como colunas temos a matriz do sistema:  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Se  $\det[a_1, a_2, \dots, a_n] \neq 0$  o sistema tem um única solução  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A solução constitui as coordenadas do vetor  $b$  na base  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Sejam

$$\Delta = \det[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\Delta_j = \det[a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, b, \dots, a_n]$$

Substituindo

$$b = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

em  $\Delta_j$  obtemos:

$$\Delta_j = \det[a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \sum_1^n a_i x_i, \dots, a_n]$$

$$\Delta_j = \det[a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j x_j, \dots, a_n]$$

$$\Delta_j = \Delta \cdot x_j$$

Disto segue regra de Cramer:

**PROPOSIÇÃO 10.28.** *Se  $\Delta \neq 0$  então a solução do sistema é dada por  $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ .*

Podemos dar a seguinte interpretação geométrica para a solução do sistema: cada  $x_j$  é dado como uma razão de dois volumes de paralelepípedos  $n$ - dimensionais orientados.

A Regra de Cramer permite resolver o Teorema da Função implícita no caso linear.



DEMONSTRAÇÃO.

Sem perder em generalidade podemos supor que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$ .

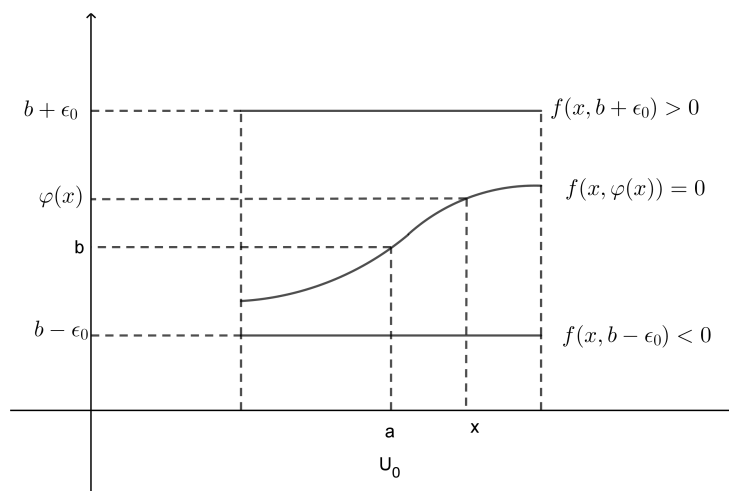
Como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  é contínua existe uma vizinhança  $U_0$  de  $a$  e  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$  para  $x \in U_0$  e  $y \in [b - \epsilon_0, b + \epsilon_0]$ .

Para cada  $x \in U_0$  considere a função  $f_x : [b - \epsilon_0, b + \epsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_x(y) = f(x, y)$ . Como  $f'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$  então  $f_x$  é estritamente crescente.

Como  $f_a(b) = 0$  e  $f_a$  é estritamente crescente então  $f_a(b - \epsilon_0) < 0$  e  $f_a(b + \epsilon_0) > 0$ .

Como  $f$  é contínua diminuindo eventualmente  $U_0$  podemos supor que para  $x \in U_0$  temos  $f_x(b - \epsilon_0) < 0$  e  $f_x(b + \epsilon_0) > 0$ .

Sendo  $f_x$  estritamente crescente existe um único  $y = \varphi(x) \in [b - \epsilon_0, b + \epsilon_0]$  tal que  $f_x(\varphi(x)) = 0$ . Assim para cada  $x \in U_0$  temos  $f(x, \varphi(x)) = 0$ .



Note que se  $f(x, y) = 0$  para  $(x, y) \in U_0 \times [b - \epsilon_0, b + \epsilon_0]$  então  $f_x(y) = 0$  e necessariamente devemos ter  $y = \varphi(x)$ .

Observe também que se  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  então  $f_a(b - \epsilon) < 0$  e  $f_a(b + \epsilon) > 0$ . Segue que existe um aberto  $U \subset U_0$  vizinhança de  $a$  onde a função  $\varphi$  está definida e para todo  $x \in U$  teremos  $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \epsilon$ . De onde  $\varphi$  é contínua em  $a$ .

Substituindo  $(a, b)$  por  $(x_0, y_0)$  o mesmo argumento mostra que  $\varphi$  é contínua em  $x_0 \in U_0$ . Ou seja  $\varphi$  é contínua.

Nosso próximo passo é mostrar que  $\varphi$  tem derivadas parciais contínuas.

Designemos por  $e_i$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

$$f(x + he_i, \varphi(x + he_i)) - f(x, \varphi(x)) = 0$$

Se  $\Delta\varphi = \varphi(x + he_i) - \varphi(x)$  então

$$f(x + he_i, \varphi(x) + \Delta\varphi) - f(x, \varphi(x)) = 0$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe  $\theta = \theta(h) \in ]0, 1[$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta he_i, \varphi(x) + \theta\Delta\varphi)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta he_i, \varphi(x) + \theta\Delta\varphi)\Delta\varphi = 0$$

Dividindo por  $h$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta he_i, \varphi(x) + \theta\Delta\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta he_i, \varphi(x) + \theta\Delta\varphi)\frac{\Delta\varphi}{h} = 0$$

Como  $\varphi$  é contínua temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta\varphi = 0$ . Na expressão acima tomando-se o limite de ambos os lados obtemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x)) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$$

o que demonstra o teorema. □

### 7.3. Demonstração do Teorema da Função Implícita.

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a demonstração por indução em  $p$ . Para  $p = 1$  é o teorema anterior. Considere  $p \geq 2$ . Por hipótese,

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(a, b) \neq 0$$

Desenvolvendo o determinante pela primeira coluna podemos supor que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_2, \dots, y_p)}(a, b) \neq 0$$

(reordenando eventualmente as funções) Para  $i = 2, \dots, p$  considere  $f_i(x, y_1, \tilde{y}) = f_i(x, y_1, y_2 \dots y_p)$  como funções  $f_i : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{p-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Então

$$\frac{\partial(f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_2, \dots, y_p)}(a, b_1, \tilde{b}) \neq 0$$

Pela hipótese de indução existem uma vizinhança  $U_0$  de  $(a, b_1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , uma vizinhança compacta  $K_0$  de  $\tilde{b} = (b_2, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$  e uma função  $\xi : U_0 \rightarrow K_0$  de classe  $C^1$  tais que :

$$(1) \xi(a, b_1) = \tilde{b} = (b_2, \dots, b_p)$$

(2) Se  $(x, y_1, \tilde{y}) \in U_0 \times K_0$  então

$$f_i(x, y_1, \tilde{y}) = 0 \iff \tilde{y} = \xi(x, y_1)$$

para todo  $i = 2, \dots, p$ .

Considere a seguir as novas funções  $g_i(x, y_1) = f_i(x, y_1, \xi(x, y_1))$  definidas em  $U_0$ . Então  $g_1(x, y_1) = f_1(x, y_1, \xi(x, y_1))$ ,  $g_2 = 0, \dots, g_p = 0$ .

Se  $\xi(x, y_1) = (y_2(x, y_1), \dots, y_p(x, y_1))$ , derivando em relação a  $y_1$  obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial y_1} = \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial y_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} + \frac{\partial f_p}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial y_1} = 0 \end{array} \right.$$

Se  $f = (f_1, \dots, f_p)$  e  $g = (g_1, 0, \dots, 0)$  então o sistema é equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_p} \frac{\partial y_p}{\partial y_1} = \frac{\partial g}{\partial y_1}$$

Portanto  $(1, \frac{\partial y_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial y_1})$  é uma solução do sistema. Da regra de Cramer temos

$$\det \left[ \frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p} \right] = 1 \cdot \det \left[ \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p} \right]$$

Como  $\frac{\partial g}{\partial y_1} = (\frac{\partial g_1}{\partial y_1}, 0, \dots, 0)$  segue que:

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial(f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_2, \dots, y_p)} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)} \cdot 1$$

De onde concluímos que  $\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a, b_1) \neq 0$ .

Aplicando o Teorema da Função Implícita para a função escalar  $g_1 : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  concluímos que existem um vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $a$ ,  $\epsilon > 0$  e uma função  $\phi : U \rightarrow [b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon]$  tais que  $\phi(a) = b_1$  e se  $(x, y_1) \in U \times [b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon]$  então  $g_1(x, \phi(x)) = 0$ .

Segue que  $f_i(x, \phi(x), \xi(x, \phi(x))) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Se definirmos

$$\begin{aligned}\varphi : U &\rightarrow [b_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon] \times K_0 = K \\ \varphi(x) &= (\phi(x), \xi(x, \phi(x)))\end{aligned}$$

$\varphi$  verifica a função implícita.

Para a última parte do teorema basta diferenciarmos as equações  $f_i(x, \varphi(x))$ . Para isto coloquemos  $\varphi(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_p(x))$ . Então temos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x) = 0$$

Se  $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  então

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(x, \varphi(x)) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x, \varphi(x))$$

Aplicando a regra de Cramer:

$$\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right) = -\left(\frac{\Delta_j^k}{\Delta}\right)$$

onde

$$\Delta = \det\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p}\right)$$

e

$$\Delta_j^k = \det\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_p}\right)$$

□

Uma versão concisa do teorema das funções implícitas e a seguinte.

Considere a função

$$F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_p(x, y))$$

Se  $D_x = \{y : (x, y) \in D\}$  e  $F_x : D_x \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a aplicação

$$F_x(y) = F(x, y)$$

defina a diferencial parcial de  $F$  em relação a  $y$  por

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = d(F_x)_y$$

Se  $y = \varphi(x)$  é a aplicação implícita então  $F(x, \varphi(x)) = 0$  e temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

$$\varphi'(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

### 8. Teorema da Função Inversa

No que segue vamos usar a notação  $f'(x)$  para a diferencial de  $f$  em  $x$ , isto é  $f'(x) = df_x$ .

**TEOREMA 10.31.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação diferenciável definida no aberto  $D$  com derivadas parciais contínuas e  $x_0 \in D$ .*

*Se  $f'(x_0)$  é inversível então  $f$  é um difeomorfismo de uma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$  sobre uma vizinhança aberta  $V$  de  $y_0 = f(x_0)$ .*

*Se  $f^{-1} : V \rightarrow U$  é a inversa de  $f$  então para  $y = f(x) \in V$*

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$$

**DEMONSTRAÇÃO.**

Considere a aplicação  $F : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$F(x, y) = f(x) - y$$

Então

$$(i) \quad F(x_0, y_0) = f(x_0) - y_0 = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(x_0)$$

Pelo teorema das funções implícitas existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $y_0$ , uma vizinhança  $U_0$  de  $x_0$  e uma aplicação  $\varphi : V \rightarrow U_0$  diferenciável com as propriedades:

$$(i) \quad \varphi(y_0) = x_0$$

(ii) Se  $(y, x) \in V \times U_0$  então

$$x = \varphi(y) \iff F(x, y) = 0 \iff f(x) - y = 0$$

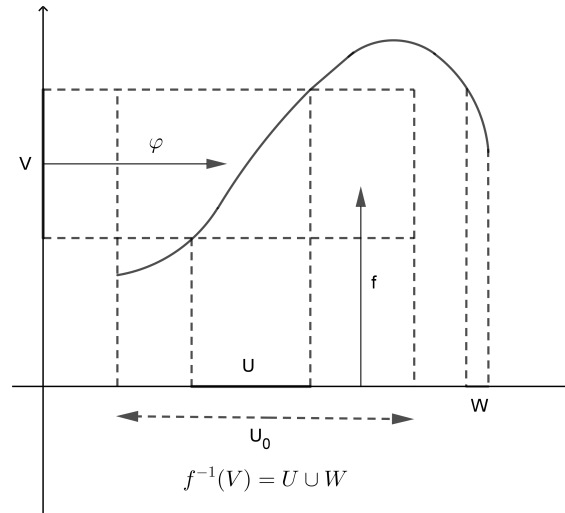
Portanto se  $y \in V$  então  $\varphi(y) \in U_0$  e tem-se

$$x = \varphi(y) \implies f(x) = f(\varphi(y)) \implies y = f(\varphi(y))$$

Assim  $f(\varphi(y)) = y$  para todo  $y \in V$ . O que mostra que  $f \circ \varphi = Id|_V$ .



Como não sabemos se  $f(U_0) \subset V$  não podemos fazer a composta  $\varphi \circ f$ . Como  $f(\text{Im}(\varphi)) \subset V$  então  $\text{Im}(\varphi) \subset f^{-1}(V)$ . Como  $f$  é contínua então  $f^{-1}(V)$  é aberto. Se  $U = U_0 \cap f^{-1}(V)$  então  $U$  é aberto,  $\varphi(V) \subset U$  e  $f(U) \subset V$ .



Se  $x \in U$  então  $y = f(x) \in V$  e  $F(x, y) = 0$ . Logo  $x = \varphi(y)$  e teremos

$$y = f(x) \implies \varphi(y) = \varphi(f(x)) = x$$

Em resumo a função  $\varphi : V \rightarrow U$  é a inversa de  $f : U \rightarrow V$ .

Aplicando a regra da cadeia na igualdade  $\varphi \circ f = Id$  obtém-se  $\varphi'(f(x)) \circ f'(x) = Id$  o que mostra a segunda parte do teorema. □

## 9. Expressão de Funções num Sistema de Coordenadas

Seja

$$\varphi : U \rightarrow V$$

sistema de coordenadas e  $f$  uma função cujo domínio está contido em  $V$ . A expressão de  $f$  em  $\varphi$  é a função

$$\hat{f}(x) = f(\varphi(x))$$

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Se  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  são coordenadas em  $V$  então

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, y_2, \dots, y_n) = f(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

Por exemplo se  $f$  é uma função de duas variáveis então a expressão de  $f$  em coordenadas polares é

$$\hat{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

A diferencial de  $f$  nas coordenadas cartesianas é dada por

$$df_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)(dy_j)_p$$

A seguir vamos deduzir a expressão da diferencial num sistema de coordenadas qualquer. Lembremos que se  $p \in V$  suas coordenadas  $(x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$  verificam

$$\varphi(x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) = p$$

ou seja a função

$$p \in V \longrightarrow (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)) \in U$$

é a inversa de  $\varphi$  e como tal tem-se que

$$x_i(\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_i$$

É importante observar que estamos usando o símbolo  $x_i$  com dois significados diferentes. Significando uma das funções coordenadas da inversa de  $\varphi$  e também como a  $i$ -ésima coordenada do ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Derivando em relação a  $x_j$  a igualdade acima tem-se

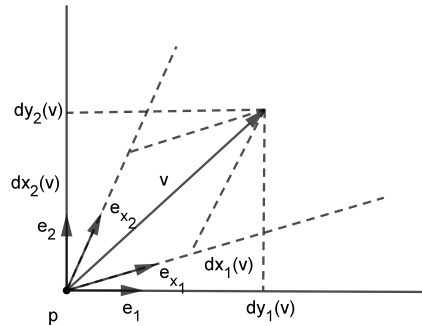
$$dx_i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij}$$

Se denotarmos os campos coordenados por

$$e_{x_j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$$dx_i(e_{x_j}) = \delta_{ij}$$

mostrando que  $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  é a base dual da base formada pelos campos coordenados  $(e_{x_1}), (e_{x_2}), \dots, (e_{x_n})$ .



Da definição de inversa temos

$$f(p) = \hat{f}(x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p))$$

Aplicando a regra da cadeia

$$df_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(p)(dy_j)_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p$$

OBSERVAÇÃO 10.32.

Podemos verificar esta igualdade diretamente calculando os dois lados nos campos coordenados lembrando que

$$e_{x_i} = \frac{\partial y_1}{\partial x_i} e_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_i} e_2 + \dots + \frac{\partial y_n}{\partial x_i} e_n$$

EXEMPLO 10.33. A expressão em coordenadas polares de uma função diferenciável  $f$  é

$$\hat{f}(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

A diferencial de  $f$  tem a seguinte expressão

$$df = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} dr + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} d\theta$$

Os campos coordenados  $e_r, e_\theta$  verificam

$$e_r \cdot e_r = 1 \quad e_r \cdot e_\theta = 0 \quad e_\theta \cdot e_\theta = r^2$$

Assim se  $u = u_r e_r + u_\theta e_\theta$  e  $v = v_r e_r + v_\theta e_\theta$  seu produto escalar é

$$u \cdot v = u_r v_r + r^2 u_\theta v_\theta$$

O gradiente de  $f$  verifica

$$\nabla f_p \cdot v = df_p(v) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} v_r + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} v_\theta$$

Comparando com o produto escalar chegamos a conclusão que

$$\nabla f_p = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} e_\theta$$

Esta é a expressão do gradiente em coordenadas polares.

EXEMPLO 10.34. A expressão de uma função  $f$  em coordenadas esféricas é dada por

$$\hat{f}(r, \theta, \phi) = f(r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi)$$

e a diferencial

$$df = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} dr + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi} d\phi$$

Os campos coordenados  $e_r, e_\theta, e_\phi$  verificam

$$e_r \cdot e_r = 1 \quad e_\theta \cdot e_\theta = (r \operatorname{sen} \phi)^2 \quad e_\phi \cdot e_\phi = r^2$$

sendo dois a dois ortogonais.

Se  $u$  e  $v$  são vetores escritos na base  $e_r, e_\theta, e_\phi$  então

$$u \cdot v = u_r v_r + (r \operatorname{sen} \phi)^2 u_\theta v_\theta + r^2 u_\phi v_\phi$$

Como no exemplo anterior conclui-se que

$$\nabla f_p = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} e_r + \frac{1}{(r \operatorname{sen} \phi)^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi} e_\phi$$

Um exemplo importante é quando  $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi} = 0$  isto é,  $\hat{f}$  é uma função na variável  $r$ .

$$\nabla f_p = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} e_r = \frac{d\hat{f}}{dr} e_r$$

$$f(x, y) = \hat{f}(r) = \hat{f}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Reciprocamente se  $F$  é um campo central tem-se que

$$F(p) = g(r(p))e_r(p)$$

Se

$$\hat{f} = \int g(r)dr \text{ e } f(x, y, z) = \hat{f}(r) = \hat{f}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

então

$$\nabla f = \frac{\partial \hat{f}}{\partial r} e_r = \frac{d\hat{f}}{dr} e_r = F$$

ou seja todo campo central é gradiente (conservativo).

## 10. Exercícios

### Parte 1 - Diferenciabilidade.

(1) Represente graficamente os campos de vetores:

- (a)  $F(x, y) = e_1 + e_2$
- (b)  $e_\theta(x, y) = -ye_1 + xe_2$
- (c)  $F(x, y) = x^3 e_2$
- (d)  $r(x, y) = xe_1 + ye_2$
- (e)  $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e_1$

(2) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{|y|} \sqrt{x^2 + y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Mostre que existem todas as derivadas direcionais de  $f$  na origem e, também, que  $f$  não é contínua na origem.

(3) Dado  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , calcule  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  usando a definição de derivada direcional e interprete geometricamente:

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $f(x, y) = (x^2 + y^2, -x^2 - y^2)$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $f(x, y) = (x + y, xy)$

(c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $f(x, y) = (x^2y^2, xy)$

(4) Estude a diferenciabilidade das seguintes funções:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x, y) = |xy|$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

(5) Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

(a) Prove que  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{R}^3$  e calcule sua matriz jacobiana.

(b) Mostre que  $df_{(x_1, x_2, x_3)}$  é injetora, exceto quando  $x_1 = x_2 = 0$ .

(c) Determine a imagem de  $df_{(0, 0, x_3)}$ .

(6) Se  $F(u, v) = (a(u) \cos v, a(u) \sin v)$  determine  $a$  para que  $\det(dF_{(u, v)}) = 1$ .

(7) (a) Se  $a \in \mathbb{R}^3$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = \langle a, x \rangle$ , calcule  $df_x$ .

(b) Se  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é linear e  $f(x) = \langle x, T(x) \rangle$ , calcule  $df_x$ .

(8) Dado  $p \in \mathbb{R}^3$ , mostre que não existe  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $df_p(v) > 0$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

(9) Mostre que se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma função tal que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ , quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , então  $f$  é constante.

(10) Considere a equação

$$e^{2x-y} + \cos(x^2 + xy) - 2 - 2y = 0, \text{ onde } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

O conjunto de soluções desta equação próximo de  $(0, 0)$  define implicitamente uma das variáveis como função da outra? Se sim, determine a derivada desta função (ou destas funções, se for o caso) no ponto 0.

- (11) Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$ .
- (a) Mostre que existem um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  contendo o ponto  $(0, 1, -1)$ , um aberto  $W$  de  $\mathbb{R}^2$  contendo o ponto  $(1, -1)$  e uma função  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  tal que  $g(1, -1) = 0$  e
- $$\{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = 0\} = \{(g(y, z), y, z) : (y, z) \in W\}$$
- (b) Determine  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, -1)$  e  $\frac{\partial g}{\partial z}(1, -1)$ .
- (12) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ .
- (a) Mostre que  $f$  tem um ponto de máximo e um ponto de mínimo em  $\mathbb{S}^1$ .
- (b) Se  $p$  é um ponto de mínimo ou de máximo de  $f$  em  $\mathbb{S}^1$ , mostre que  $\nabla f(p) = \lambda p$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (c) Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação linear tal que  $\langle T(x), y \rangle = \langle T(y), x \rangle$ . Considere  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \langle x, T(x) \rangle$ . Mostre que se  $p$  é ponto de máximo ou de mínimo de  $f$ , então  $T(p) = \lambda p$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (13) Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Mostre que se  $f(x) \geq f(0)$ , então  $\nabla f(0) = 0$ .
- (14) Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que  $\nabla(f \circ g)(p) = f'(p)\nabla g(p)$ .
- (15) Sejam  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $e_r = \frac{xe_1 + ye_2 + ze_3}{r}$ .
- (a) Mostre que  $\nabla r = e_r$ .
- (b) Se  $U = F \circ r$ , então  $\nabla U = F'(r)e_r$ .
- (c) Determine uma função  $U$  tal que  $\nabla U = -\frac{e_r}{r^2}$ .
- (16) Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. Se  $\nabla f(p) = \lambda(p) \cdot p$ , para alguma função  $\lambda$ , mostre que  $f(p) = f(-p)$ , para todo  $p \in \mathbb{R}^3$ .
- (17) Para cada um dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  descritos pelas equações abaixo, determine seus pontos mais próximos da origem:
- (a)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- (b)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(18) Mostre que se  $x_1, \dots, x_n$  são números reais não negativos, então

$$(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

(19) Ache o máximo e o mínimo da função  $f(x, y, z) = x + 2y + z + \sqrt{2}$  sujeita aos vínculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y + z = 1$ .

(20) Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivada contínua. Defina  $U = I \times I \subset \mathbb{R}^2$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F(x, y) = \int_y^x f(s) ds.$$

Determine os pontos críticos de  $F$  e analise-os. Especifique seu estudo para o caso particular  $f(s) = 3s^2 - 1$ , onde  $s \in \mathbb{R}$ .

(21) Os exercícios abaixo são sobre coordenadas polares  $\varphi(r, \theta) = (x, y)$  onde

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0$$

- (a) Represente graficamente os campos  $e_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  e  $e_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ .
- (b) Seja  $c(t) = (x(t), y(t))$  uma curva plana diferenciável. As coordenadas polares de  $c$  são dadas pelos pares  $(r(t), \theta(t))$  de modo que  $c(t) = \varphi(r(t), \theta(t))$ . Dê a expressão de  $\frac{dc}{dt}$  em termos de  $e_r$  e  $e_\theta$ .
- (c) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável. A expressão de  $f$  em coordenadas polares é a função<sup>1</sup>  $f(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta$$

Mostre também que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta, \quad df(e_r) = \frac{\partial f}{\partial r} \quad \text{e} \quad df(e_\theta) = \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

<sup>1</sup>Observe que usamos a mesma letra "f" para denotar a nova função



(d) Mostre que

$$e_r = \frac{x}{r}e_1 + \frac{y}{r}e_2 \quad \text{e} \quad e_\theta = -ye_1 + xe_2$$

(e) Mostre que

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r} \quad \text{e} \quad d\theta = \frac{-ydx + xdy}{r^2}$$

Mostre também que

$$dr(e_r) = 1, \quad dr(e_\theta) = 0, \quad d\theta(e_r) = 0 \quad \text{e} \quad d\theta(e_\theta) = 1$$

Logo, se  $v = xe_1 + ye_2$ , então  $v = dx(v)e_1 + dy(v)e_2 = dr(v)e_r + d\theta(v)e_\theta$ .

## CAPÍTULO 11

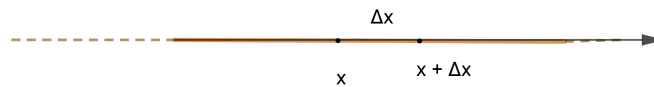
### Aplicações do Cálculo

Neste capítulo apresentamos algumas das possíveis, dentre muitas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral.

#### 1. A equação de ondas

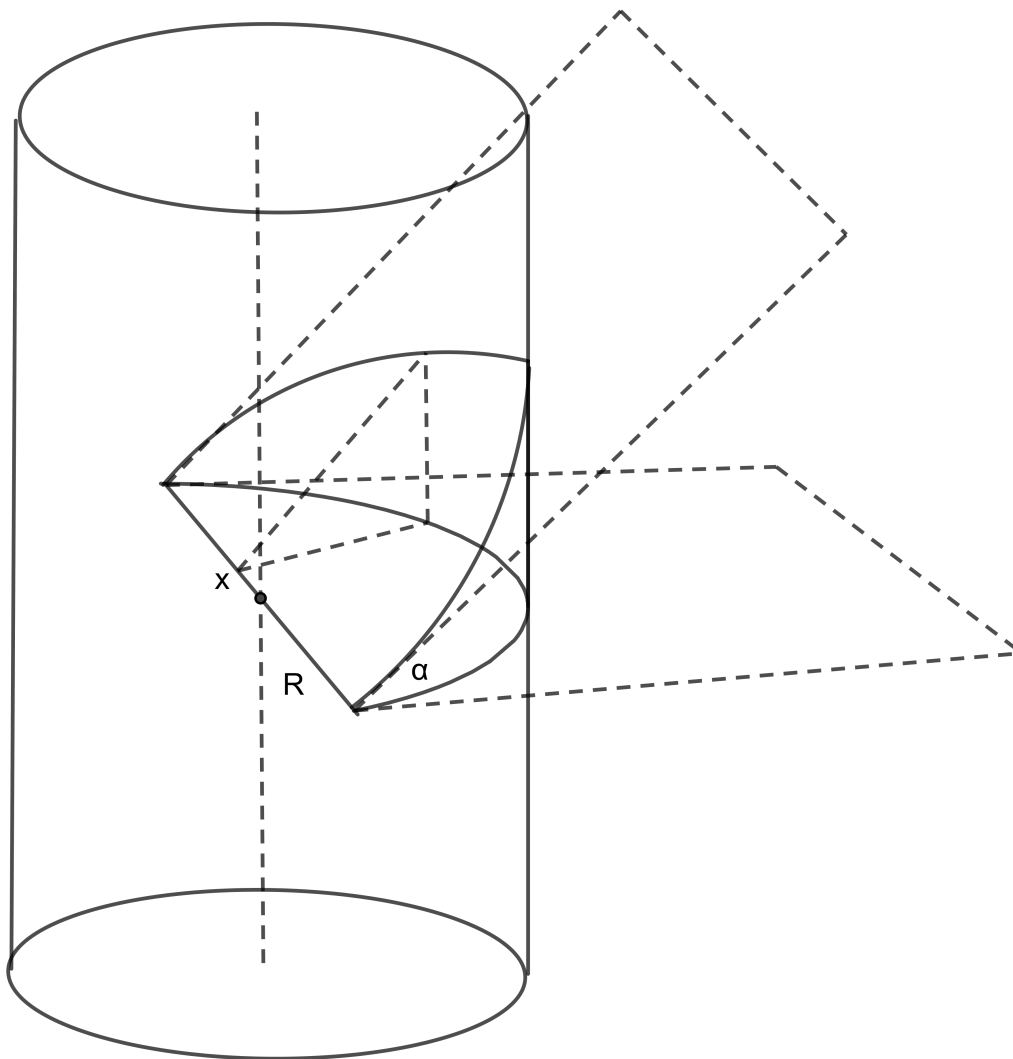
Considere uma corda elástica infinita como de um instrumento musical, homogênea com densidade linear  $\rho$  e que no instante  $t = 0$  coincide com o eixo  $x$ .

Isolando um elemento  $\Delta x$  da corda sua massa é  $\Delta m = \rho \Delta x$ .

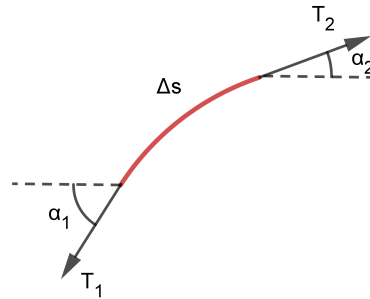


Dedilhando, a corda ela entra em oscilação.

Seja  $u = u(x, t)$  a posição do ponto  $x$  no instante  $t$ . O elemento  $\Delta x$  transforma-se num elemento  $\Delta s$  com a mesma massa.



No instante  $t$  o elemento  $\Delta x$  está sujeito a tensões  $T_1$  e  $T_2$  agindo em suas extremidades.



No instante  $t$  o elemento  $\Delta x$  está sujeito a tensões  $T_1$  e  $T_2$  agindo em suas extremidades.

Como a corda é elástica as forças  $T_1$  e  $T_2$  são tangentes à corda.

As componentes horizontais e verticais da resultante sobre o elemento da corda são dados por:

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1$$

$$T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1$$

Supondo também que a corda desloca-se somente na direção vertical então

$$T_2 \cos \alpha_2 = T_1 \cos \alpha_1 = T$$

e a resultante vertical será:

$$F = T_2 \cos \alpha_2 \tan \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 \tan \alpha_1$$

$$F = T(\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1)$$

$$F = T \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)$$

Se  $f$  é uma força externa que age na corda por unidade de comprimento (por exemplo a gravidade) então da equação de Newton obtemos:

$$T \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + f \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Note que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  é a aceleração do ponto  $x$  no instante  $t$ . Dividindo por  $\Delta x$  e tomando-se o limite obtemos:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Dividindo por  $T$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{f}{T}$$

Se  $f = 0$  e fazendo  $c^2 = \frac{T}{\rho}$  obtemos a *Equação clássica de ondas*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

**2. Solução da equação de ondas**

Começemos observando que uma forma quadrática

$$q = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

através da seguinte mudança de coordenadas que corresponde a uma rotação dos eixos coordenados

$$u = x + y \qquad v = x - y$$

transforma-se em

$$q = uv$$

Consideremos então a equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (u) = 0$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = r + s \\ t = \frac{1}{c}(r - s) \end{cases}$$

e considerando a nova função

$$f(r, s) = u(x, t) = u\left(r + s, \frac{1}{c}(r - s)\right)$$

teremos

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

e recaímos na equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s} = 0$$

cujas soluções são obtidas por integração elementar:

$$f(r, s) = a(r) + b(s)$$

onde  $a$  e  $b$  são funções de uma variável.

Invertendo o sistema acima

$$\begin{cases} r = 1/2(x - ct) \\ s = 1/2(x + ct) \end{cases}$$

e substituindo obtemos as soluções da equação de ondas.

$$u(x, t) = f(r, s) = a(1/2(x - ct)) + b(1/2(x + ct))$$

onde  $a$  e  $b$  são funções diferenciáveis quaisquer de uma variável.

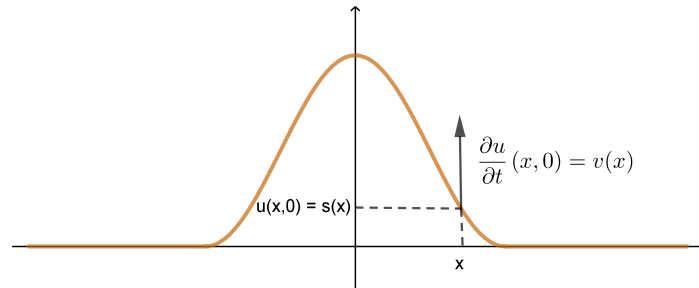
Para determinarmos uma particular solução vamos colocar as seguintes condições iniciais:

(1) Posição inicial da corda no instante  $t = 0$ :

$$u(x, 0) = s(x)$$

(2) Velocidade inicial de cada ponto da corda no instante  $t = 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v(x)$$



$$u(x, t) = a(1/2(x - ct)) + b(1/2(x + ct))$$

$$u(x, 0) = a(x/2) + b(x/2) = s(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = (-c/2)a'(x/2) + (c/2)b'(x/2) = v(x)$$

Segue que

$$\begin{cases} a'(x/2)/2 + b'(x/2)/2 = s'(x) \\ -a'(x/2)/2 + b'(x/2)/2 = v(x)/c \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\begin{cases} a'(x/2) = s'(x) - v(x)/c \\ b'(x/2) = s'(x) + v(x)/c \end{cases}$$

Integrando

$$2a(x/2) = (s(x) - s(0)) - \frac{1}{c} \int_0^x v(x)dx + a(0)$$

$$2b(x/2) = (s(x) - s(0)) + \frac{1}{c} \int_0^x v(x)dx + b(0)$$

$$a(x/2) = (s(x) - s(0))/2 - \frac{1}{2c} \int_0^x v(x)dx + a(0)$$

$$b(x/2) = (s(x) - s(0))/2 + \frac{1}{2c} \int_0^x v(x)dx + b(0)$$

$$u(x, t) = a(1/2(x-ct)) + b(1/2(x+ct)) = (s(x-ct) - s(0))/2 - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} v(x)dx + a(0) + (s(x+ct) - s(0))/2 + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} v(x)dx$$

Levando em conta  $s(0) = a(0) + b(0)$  a solução que verifica as condições iniciais é dada por

$$u(x, t) = \frac{s(x-ct) + s(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x)dx$$

### 3. Equações a Derivadas Parciais Lineares com Coeficientes Constantes

DEFINIÇÃO 11.1.

Uma Equação a Derivadas Parciais (EDP) Linear é uma equação do tipo

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = a$$

onde os coeficientes e  $a$  são funções diferenciáveis em  $n$  variáveis.

Uma solução é uma função diferenciável  $f$  que a verifica.

Vamos tratar nesta seção das equações cujos coeficientes são constantes e que são homogêneas, isto é  $a = 0$ .

O exemplo mais simples de tais equações é o seguinte:



$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

Suas soluções são as funções que não depende da variável  $x_1$ . Mais precisamente

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2, x_3, \dots, x_n)$$

onde  $g$  é uma função diferenciável arbitrária de  $(n-1)$  variável. Veremos que através de uma mudança de coordenadas qualquer equação linear homogênea com coeficientes constantes recai no exemplo acima.

Considere a equação

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Se

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

(Aqui os vetores  $e_i$  constituem a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .)

então a equação acima reduz-se a

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Seja  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  uma nova base onde  $v_1 = v$  e  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  as coordenadas nesta base do vetor

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Assim

$$x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

e teremos

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial v_1}$$

e nossa equação na nova base vem a ser

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

cujas soluções são dadas por

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(y_2, y_3, \dots, y_n)$$

Exprimindo as coordenadas  $y$  em função das coordenadas  $x$  encontramos as soluções da equação original.

É instrutivo observar que a igualdade

$$v_1 = v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

pode ser escrita

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

que corresponde à igualdade

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Na prática podemos proceder da seguinte forma.

Supondo que  $a_1 \neq 0$  escolhemos

$$\begin{cases} v_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \\ v_2 = e_2 \\ v_3 = e_3 \\ \vdots \\ v_n = e_n \end{cases}$$

As coordenadas relacionam-se

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1 \\ x_2 = y_2 + a_2 y_1 \\ x_3 = y_3 + a_3 y_1 \\ \vdots \\ x_n = y_n + a_n y_1 \end{cases}$$

Invertendo,

$$\begin{cases} y_1 = (1/a_1)x_1 \\ y_2 = x_2 - (a_2/a_1)x_1 \\ y_3 = x_3 - (a_3/a_1)x_1 \\ \vdots \\ y_n = x_n + (a_n/a_1)x_1 \end{cases}$$

As soluções da equação original são dadas por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_2 - (a_2/a_1)x_1, x_3 - (a_3/a_1)x_1, \dots, x_n - (a_n/a_1)x_1)$$

Podemos verificar diretamente que estas funções satisfazem a dada equação:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \\ & = a_1 \left( \frac{\partial g}{\partial y_2}(-a_2/a_1) + \frac{\partial g}{\partial y_3}(-a_3/a_1) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_n}(-a_n/a_1) \right) + \\ & \quad + a_2 \frac{\partial g}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial g}{\partial y_3} + \dots + a_n \frac{\partial g}{\partial y_n} = 0 \end{aligned}$$

EXEMPLO 11.2. Resolver a equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Considere a nova base

$$v_1 = e_1 + 2e_2 \quad v_2 = e_2$$

Usando coordenadas  $(u, v)$  temos  $xe_1 + ye_2 = uv_1 + vv_2$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v + 2u \end{cases}$$

Invertendo

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - 2x \end{cases}$$

As funções que verificam a equação são

$$f(x, y) = g(y - 2x)$$

EXEMPLO 11.3. *Encontrar as soluções da equação*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

*Neste caso usamos a base*

$$v_1 = e_1 + 2e_2 + 4e_3 \quad v_2 = e_2 \quad v_3 = e_3$$

*e coordenadas  $(u, v, w)$ .*

*As fórmulas de mudança de coordenadas são facilmente encontradas*

$$\begin{cases} u = x \\ v = y - 2x \\ w = z - 4y \end{cases}$$

*As soluções nas coordenadas  $(u, v, w)$  são*

$$f(u, v, w) = g(v, w)$$

*Substituindo achamos as soluções nas coordenadas  $(x, y, z)$*

$$f(x, y, z) = g(y - 2x, z - 4y)$$

Para finalizar esta seção daremos uma interpretação geométrica para as soluções da equação

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

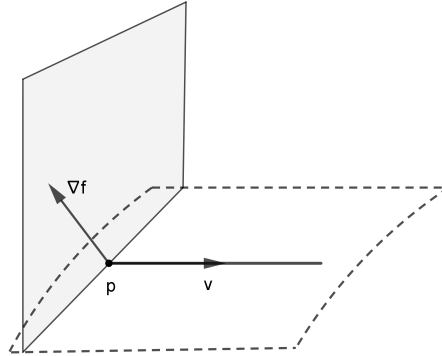
Uma solução verifica

$$\nabla f \cdot v = 0$$

onde

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$$

o que implica que a superfície de nível que passa pelo ponto  $p$  contém a reta que passa por  $p$  e tem direção  $v$ . portanto as soluções são tais que seu gradiente em cada ponto pertence ao plano ortogonal ao vetor  $v$ .



### 3.1. Sistemas de Equações a Derivadas Parciais Lineares com Coeficientes Constantes.

DEFINIÇÃO 11.4.

Um Sistema de Equações a Derivadas Parciais (SEDP) Linear e homogêneo é formado por  $k \leq n$  equações lineares

$$\begin{aligned} a_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_1^n \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0 \\ a_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_2^n \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0 \\ &\vdots \\ a_k^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_k^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + a_k^n \frac{\partial f}{\partial x_n} &= 0 \end{aligned}$$

onde os coeficientes são constantes. Suporemos também que as equações são independentes. Uma solução é uma função diferenciável  $f$  que verifica todas as equações.

Os vetores dos coeficientes

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \dots + a_1^n e_n \\ v_2 &= a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + \dots + a_2^n e_n \\ &\vdots \\ v_k &= a_k^1 e_1 + a_k^2 e_2 + \dots + a_k^n e_n \end{aligned}$$

por hipótese são independentes.

Se  $f$  é uma solução então

$$\frac{\partial f}{\partial v_1} = \frac{\partial f}{\partial v_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0$$

Completando a uma base  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  e usando coordenadas  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de forma que um vetor  $y$  escreve-se

$$y = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

Por definição das derivadas parciais tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i}$$

Assim se  $f$  é uma solução então

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$$

o que mostra que uma solução e qualquer função que depende somente das últimas  $n - k$  variáveis:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = g(y_{k+1}, y_{k+2}, \dots, y_n)$$

Observe que se  $k = n$  então o sistema só admite soluções constantes.

A seguir vamos considerar  $n = 3$ . O caso geral segue os mesmos passos. Na seção anterior resolvemos para  $k = 1$ . Resta portanto  $k = 2$ .

$$\begin{aligned} a_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_1^3 \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 0 \\ a_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_2^3 \frac{\partial f}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Sem perder em generalidade suponha que

$$\det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Escolhemos  $v_3 = e_3$  completando a uma base

$$\begin{cases} v_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + a_1^3 e_3 \\ v_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + a_2^3 e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases}$$

Comparando  $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$  obtém-se as mudanças de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = a_1^1 y_1 + a_2^1 y_2 \\ x_2 = a_1^2 y_1 + a_2^2 y_2 \\ x_3 = y_3 + a_1^3 y_1 + a_2^3 y_2 \end{cases}$$

Para invertermos, como é habitual, considere os determinantes

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} x_1 & a_2^1 \\ x_2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_1^1 & x_1 \\ a_1^2 & x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \Delta_1 / \Delta \\ y_2 = \Delta_2 / \Delta \\ y_3 = x_3 - a_1^3 \Delta_1 / \Delta - a_2^3 \Delta_2 / \Delta \end{cases}$$

As soluções do sistemas são as funções do tipo

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(y_3) = g(x_3 - a_1^3 \Delta_1 / \Delta - a_2^3 \Delta_2 / \Delta)$$

EXEMPLO 11.5. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + 3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

*Neste caso temos a base*

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ v_2 = e_2 + 3e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases}$$

*e as mudanças de coordenadas são dadas por*

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u + v \\ z = w - u + 3z \end{cases}$$

*Invertendo,*

$$\begin{cases} u &= x \\ v &= y - 2x \\ w &= z + 7x - 3y \end{cases}$$

As soluções do sistema são dadas por

$$f(x, y, z) = g(z + 7x - 3y)$$

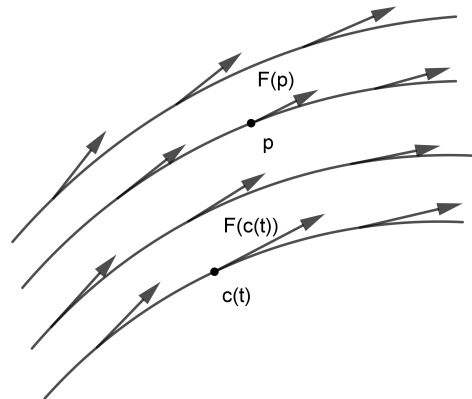
#### 4. Equações autônomas e Campos Gradientes

Considere um campo de vetores  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definido no aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Uma *Curva Integral* do campo é uma curva  $c : I \rightarrow D$  tal que

$$\frac{dc}{dt}(t) = F(c(t))$$

para todo  $t \in I$ . Uma curva integral também é chamada uma linha de campo.



Seja  $t_0 \in I$  e  $x_0 \in D$ . Se a curva integral verifica

$$c(t_0) = x_0$$

diremos que a curva passa por  $x_0$  no instante  $t_0$ . Diremos também que a curva verifica a condição inicial  $(t_0, x_0)$ .



O teorema central das equações diferenciais ordinárias garante que para cada  $(t_0, x_0)$  passa uma solução  $c : I \rightarrow D$  e esta solução é única definida em  $I$ . Resulta deste teorema os seguintes fatos:

- (1) Se  $t_0 \in I = I_1 \cap I_2$  e  $c_i : I_i \rightarrow D$  são duas soluções que verifica a condição inicial  $(t_0, x_0)$  então para todo  $t \in I$

$$c_1(t) = c_2(t)$$

Este resultado mostra que podemos estender a solução para o intervalo  $I_1 \cup I_2$ .

- (2) A reunião de todas as soluções que verifica a condição inicial  $(t_0, x_0)$  constitui uma solução maximal  $c : I_m \rightarrow D$  no sentido que se  $c_1 : I \rightarrow D$  é outra solução que verifica a mesma condição inicial então  $I \subset I_m$  e  $c_1(t) = c(t)$  para todo  $t \in I$ .
- (3) A solução maximal  $c : I_m \rightarrow D$  é a única que verifica a condição inicial  $(t_0, x_0)$ .
- (4) Se  $c : I \rightarrow D$  é uma solução então a curva trasladada  $\gamma(t) = c(t + k)$  definida no intervalo  $I - k$  também é solução. Se  $c$  verifica a condição inicial  $(t_0, x_0)$  então a curva  $\gamma(t) = c(t + t_0)$  verifica a condição  $(0, x_0)$ .

Está associada ao campo  $F$  a equação diferencial autônoma

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

cujas soluções são as curvas integrais do campo.

Uma solução maximal pode ter como domínio  $\mathbb{R}$ , um intervalo aberto  $]a, b[$  ou um dos intervalos ilimitados  $]a, \infty[$ ,  $]\infty, b[$ . A seguinte proposição dá informação a este respeito.

**PROPOSIÇÃO 11.6.** *Seja  $c : ]a, b[ \rightarrow D$  uma solução maximal que passa pelo ponto  $x_0$  no instante  $t_0$ , isto é  $c(t_0) = x_0$ . Suponha que  $b < \infty$ .*

*Então dado um conjunto limitado e fechado  $K \subset D$  tal que  $x_0 \in K$  então existe  $t$  para o qual  $c(t) \in D - K$ .*

*Em outras palavras a curva integral sai fora de qualquer conjunto limitado e fechado.*

O mesmo resultado vale para o extremo inferior do intervalo com as devidas modificações.

**DEMONSTRAÇÃO.** Suponha que exista  $K$  tal que para todo  $c(t) \in K$  para todo  $t$ . O campo  $F$  sendo contínuo é limitado em  $K$ . Portanto  $\|F(x)\| \leq M$  para algum  $M$ .

Integrando

$$\frac{dc}{dt}(t) = F(c(t))$$

$$c(t_2) - c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(c(t)) dt$$

$$\|c(t_2) - c(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|F(c(t))\| dt \leq M|t_2 - t_1|$$

Considere a seguir uma sequência  $(t_n)$  que converge para  $b$ , isto é  $\lim t_n = b$ . Dado  $\delta > 0$  existe  $n_0$  tal que se  $n, m > n_0$  então

$$|t_n - b| < \delta/2 \quad \text{e} \quad |t_m - b| < \delta/2$$

Da desigualdade triangular segue que  $|t_n - t_m| < \delta$ .

Como consequência  $|c(t_n) - c(t_m)| < M\delta = \epsilon$ .

Portanto a sequência  $(c(t_n))$  é de Cauchy e como tal converge. Seja  $x_1 = \lim c(t_n)$ . Se  $(s_n)$  é outra sequência com  $\lim t_n = b$  então também  $x_1 = \lim c(s_n)$  pois se consideramos a sequência  $(r_n)$  definida por

$$r_1 = t_1 \quad r_2 = s_1 \quad r_3 = t_2 \quad r_4 = s_2 \dots r_{2n-1} = t_n \quad r_{2n} = s_n$$

temos que  $\lim r_n = b$  e portanto existe o limite  $\lim c(r_n)$ . Como as sequências  $(t_n)$  e  $(s_n)$  são subsequências tem-se que

$$\lim c(r_n) = \lim c(s_n) = \lim c(t_n) = x_1$$

Por um resultado conhecido segue que existe  $\lim_{t \rightarrow b^-} c(t)$ . Estendemos a  $c$  colocando

$$c(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} c(t)$$

Passemos a calcular a derivada lateral em  $b$ .

$$\frac{dc}{dt}(b_-) = \lim_{t \rightarrow b^-} \frac{c(t) - c(b)}{t - b}$$

Pelo teorema do valor médio existe  $\theta_t$  onde  $t < \theta_t < b$  tal que

$$\frac{c(t) - c(b)}{t - b} = \frac{dc}{dt}(\theta_t) = F(c(\theta_t))$$

Como  $F$  é contínua temos

$$\frac{dc}{dt}(b_-) = \lim_{t \rightarrow b_-} \frac{c(t) - c(b)}{t - b} = \lim_{t \rightarrow b_-} F(c(t)) = F(c(b))$$

Pelo ponto  $(b, c(b))$  passa uma solução  $c_1 : ]b - \epsilon, b + \epsilon[ \rightarrow D$ . Assim

$$c_1(b) = c(b) \quad \text{e} \quad \frac{dc}{dt}(b) = F(c_1(b)) = F(c(b))$$

Disto concluímos que a curva  $\gamma : ]b - \epsilon, b + \epsilon[ \rightarrow D$  dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} c(t) & a < t \leq b \\ c_1(t) & b < t < b + \epsilon \end{cases}$$

é solução e estende a solução maximal o que é uma contradição.

□

**COROLÁRIO 11.7.** *Qualquer solução maximal da equação*

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

*que está dentro de um conjunto limitado e fechado está definida em  $\mathbb{R}$ .*

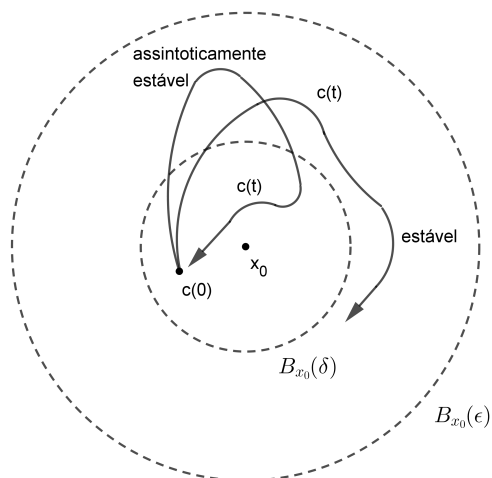
A seguir vamos introduzir a noção de estabilidade das soluções de equilíbrio e em virtude da última proposição vamos supor todas as soluções definidas em toda a reta real.

**DEFINIÇÃO 11.8.** *Uma Solução de Equilíbrio da equação  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  é uma solução constante. Se  $c(t) = x_0$  é uma tal solução então  $F(x_0) = 0$ . Portanto as Soluções de Equilíbrio corresponde as raízes da equação  $F(x) = 0$ . Chamaremos  $x_0$  de Ponto de Equilíbrio.*

*Diremos que  $x_0$  é Estável se para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para toda solução  $c$  caso  $\|c(0) - x_0\| < \delta$  então  $\|c(t) - x_0\| < \epsilon$  para todo  $t > 0$ .*

*$x_0$  diz-se Assitoticamente Estável se for estável e existe um  $\delta > 0$  tal que se  $\|c(0) - x_0\| < \delta$  então  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = x_0$ .*

*Caso esta possibilidades não aconteça diremos que  $x_0$  é Instável.*



#### 4.1. Funções de Liapunov.

DEFINIÇÃO 11.9. Seja  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável definida no aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $0 \in \Omega$ .

$V$  diz-se uma Função de Liapunov para a equação autônoma  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  se :

- (1)  $V(0) = 0$
- (2)  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$
- (3)  $\dot{V}(x) = \nabla_x V \cdot F(x) \leq 0$

Uma função de Liapunov diz-se Estrita se  $\dot{V}(x) = \nabla_x V \cdot F(x) < 0$  para todo  $x \neq 0$ .

A seguir usaremos as funções de Liapunov para caracterizar os pontos críticos. Se  $x_0$  é um ponto crítico através de uma translação do sistema de coordenadas podemos supor  $x_0 = 0$ . É que faremos.

PROPOSIÇÃO 11.10. Se  $V$  é uma função de Liapunov para a equação autônoma  $\frac{dx}{dt} = F(x)$  então  $x_0 = 0$  é um ponto de equilíbrio estável.

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $S(r) \subset \Omega$  a esfera de raio  $r$  com centro na origem. Considere

$$m = \min_{x \in S(r)} V(x) \quad \text{e} \quad x_m \in S(r) \quad \text{tal que} \quad V(x_m) = m$$

Como  $V$  é contínua existe  $\epsilon > 0$  ( $\epsilon < r$ ) tal que

$$\|x\| < \epsilon \implies V(x) < m$$

Se  $c$  é uma solução tal que  $\|c(0)\| < \epsilon$  mostremos que para todo  $t \geq 0$  tem-se  $\|c(t)\| < r$ .  
Seja  $V(t) = V(c(t))$ .

$$\frac{dV}{dt}(t) = \nabla_{c(t)} V \cdot \frac{dc}{dt}(t) = \nabla_{c(t)} V \cdot F(c(t)) \leq 0$$

Portanto  $V(t)$  é decrescente.

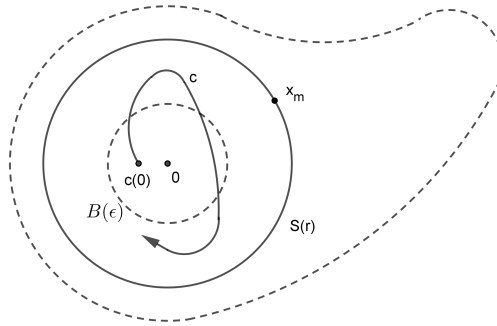
Caso existe um  $t$  tal que  $\|c(t)\| \geq r$  então existe um  $t_1$  tal que  $\|c(t_1)\| = r$  e temos  $V(t_1) = V(c(t_1)) \geq m$  pois  $c(t_1) \in S(r)$ . Por outro lado como  $\|c(0)\| < \epsilon$  então  $V(0) = V(c(0)) < m$ .

Como  $V(t)$  é decrescente segue que

$$t_1 > 0 \implies V(t_1) \leq V(0) < m$$

o que gera uma contradição. Segue que para todo  $r > 0$  existe um  $\epsilon > 0$  tal que se  $c$  é uma solução com  $\|c(0)\| < \epsilon$  então para todo  $t \geq 0$  tem-se  $\|c(t)\| < r$  provando a estabilidade da origem.

□



**PROPOSIÇÃO 11.11.** *Se  $V$  é uma função de Liapunov estrita, isto é  $\dot{V} < 0$  então a origem é assintoticamente estável.*

**DEMONSTRAÇÃO.** De acordo com a demonstração anterior a função  $V(t) = V(c(t))$  é decrescente. Então existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \inf_{t \geq 0} V(t)$$

Iremos mostrar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ .

Isto implica que  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$  pois caso contrário para algum  $\epsilon > 0$  existe uma sequência  $(t_n)$  tal que  $\lim t_n = \infty$  e  $c(t_n) > \epsilon$ . Como  $c(t_n) \in B(r)$  podemos substituir a sequência por uma subsequência que converge.

Seja  $x_1 = \lim c(t_n) \geq \epsilon > 0$ . Como  $V$  é positiva fora da origem  $V(x_1) \neq 0$ . Por outro lado

$$V(x_1) = \lim V(c(t_n)) = 0$$

o que conduz a uma contradição.

Suponhamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_0 > 0$ .

Da proposição anterior vimos que existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\|c(0)\| < \epsilon \implies \|c(t)\| < r$$

Da continuidade de  $V$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| < \delta \implies V(x) < V_0$$

Como  $V(t) = V(c(t)) \geq V_0$  tem-se que  $\|c(t)\| > \delta$ . Concluimos que a solução fica dentro da coroa  $\delta \leq x \leq r$  e sendo esta limitada e fechada a função  $\dot{V}(x) = \nabla_x V \cdot F(x) < 0$  assume um valor máximo negativo  $-m$  onde  $m > 0$ . Segue que

$$\frac{dV}{dt}(t) = \nabla_{c(t)} V \cdot \frac{dc}{dt}(t) = \nabla_{c(t)} V \cdot F(c(t)) \leq -m$$

Integrando

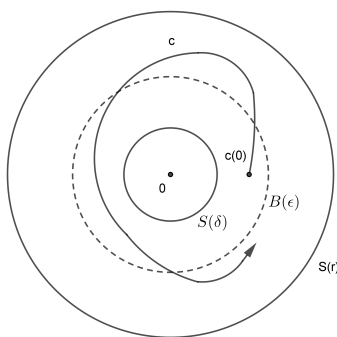
$$\frac{dV}{dt}(t) \leq -m$$

$$V(c(t)) - V(c(0)) \leq -mt$$

$$V(c(t)) \leq V(c(0)) - mt$$

Para  $t$  suficientemente grande  $V(c(t)) < 0$  o que contradiz a definição de  $V$ .

□



**4.2. Campos Gradientes.** Um campo de vetores  $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se Gradiente ou Conservativo se existe uma função  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F = -\nabla V$$

Vamos estudar as soluções da equação

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = -\nabla_x V$$

Se  $p$  é um ponto de equilíbrio da equação então é também um ponto crítico da função  $V$ , isto é,  $\nabla_p V = 0$ . Seja  $x = x(t)$  uma solução não constante.

Como anteriormente seja  $V(t) = V(x(t))$ . Derivando,

$$\frac{dV}{dt} = dV\left(\frac{dx}{dt}(t)\right) = \nabla_x V \cdot \frac{dx}{dt}(t) = -\nabla_{x(t)} V \cdot \nabla_{x(t)} V < 0$$

Portanto  $V(t) = V(x(t))$  é estritamente decrescente.

Se  $p$  é um mínimo isolado de  $V$  mostremos que  $p$  é assintoticamente estável. Podemos supor que  $V(p) = 0$ . Então numa vizinhança  $\Omega$  de  $p$  temos  $V(x) \geq V(p) = 0$  e como é um mínimo isolado  $V(x) \neq 0$  caso  $x \neq p$ .

Como  $\dot{V}(x) = -\nabla_x V \cdot \nabla_x V < 0$  então  $V$  é uma função de Liapunov estrita. Da proposição anterior concluímos que  $p$  é assintoticamente estável.

Um ponto  $p$  diz-se  $\omega$ -Limite da solução  $x = x(t)$  se

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} x(t_n) = p$$

para alguma sequência  $(t_n)$

Segue que

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} V(t_n) = \lim_{t_n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = V(p)$$

Como  $V(t)$  é decrescente temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V(p)$$

Por outro lado,

$$\frac{dV}{dt}(t) = -\nabla_{x(t)} V \cdot \nabla_{x(t)} V < 0$$

e

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \nabla_{x(t_n)} V = \nabla_p V$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dV}{dt}(t) = -k$$

onde  $k = \nabla_{x(t)} V \cdot \nabla_{x(t)} V \geq 0$ .

Segue que existe  $t_0$  tal que para  $t \geq t_0$  tem-se  $\frac{dV}{dt}(t) \leq -k/2$ .

Integrando,

$$V(t) - V(t_0) \leq -\frac{k}{2}(t - t_0)$$

$$V(t) \leq V(t_0) - \frac{k}{2}(t - t_0)$$

De onde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = -\infty$$

o que é uma contradição. Logo  $k = 0$  e  $F(p) = -\nabla_p V = 0$ . Assim  $p$  é um ponto de equilíbrio.