MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Lista 2 – 21/09/2015

Parte 1 - Curvas

1. Parametrize as curvas pelo comprimento de arco:

   (a) $c(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t)$

   (b) $c(t) = (\cos t, \ln(\cos t), \mathrm{sen}\, t)$

2. Determine a curvatura das seguintes curvas:

   (a) $c(t) = (at, bt^2)$

   (b) $c(t) = (t, t + 1/t)$

   (c) $c(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t)$

   (d) $c(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t)$

   (e) $c(t) = (a\cos t, b\cos t, c\,\mathrm{sen}\, t)$

   (f) $c(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t, ct)$

3. Determine a torção das seguintes curvas:

   (a) $c(t) = (3\cos t, 4\cos t, 5\,\mathrm{sen}\, t)$

   (b) $c(t) = (a\cos t, b\cos t, c\,\mathrm{sen}\, t)$

   (c) $c(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\, t, ct)$

4. Uma curva $c : I \to \mathbb{R}^2$ tem curvatura nula se e somente se a curva é uma reta.

5. Uma curva $c : I \to \mathbb{R}^3$ tem torção nula se e somente se a curva é plana.

6. Determine as curvas espaciais que tem curvatura e torção constantes.

7. Determine o comprimento de arco das seguintes curvas dadas em coordenadas polares:

   (a) (Cardioide) $r = a(1 - \cos\theta)$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(b) (Expiral de Arquimedes) $r = a\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$

(c) (Expiral de Logarítmica) $r = e^{-\theta}$ onde $0 \leq \theta$

8. Represente graficamente as curvas dadas em coordenadas polares e calcule a área limitada por elas:

   (a) (Cardióide) $r = a(1 - \cos\theta)$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$

   (b) (Rosa de quatro folhas) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$

   (c) (Limaçon ou Caracol) $r = a(2 + \cos\theta)$ onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Parte 2 - Funções de várias variaveis

1. Encontre o domínio das seguintes funções e represente-os graficamente:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{|x| - |y|}$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$

   (c) $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$

   (d) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

   (e) $\arctan\left(\dfrac{x - y}{1 + x^2y^2}\right)$

   (f) $f(x, y, z) = \operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y + \operatorname{arcsen} z$

2. Esboce o gráfico e desenhe as curvas de nivel das funções:

   (a) $f(x, y) = 4 - x^2 + y^2$

   (b) $f(x, y) = ye^x$

   (c) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

   (d) $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$

   (e) $f(x, y) = y/x^2$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$

3. Calcule os seguintes limites caso existam ou mostrem que não existe:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\operatorname{sen}(\frac{1}{xy})$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{y-x^3}$

   (f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{y^2-x^2}$

   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$

   (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

4. Determine o conjunto dos pontos onde as seguintes funções são contínuas:

   (a) $f(x,y)=\sqrt{6-2x^2-3y^2}$

   (b) $f(x,y)=\ln\left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)$

   (c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   (d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   (e) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

5. Determine a para que a função f seja contínua:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz -se *Homogênea de grau* m se $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $t > 0$. Verifique se as seguintes funções são homogêneas determinando o grau de homogeneidade:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{2}{x^2 + y^2}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

7. Determine os pontos de máximo e de mínimo, caso existam, das seguintes funções no domínio D indicado:

   (a) $f(x,y) = 2x + y + 3$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 2\}$

   (b) $f(x,y) = x - y + 4$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y + 4 \geq 0\ ,\ 3x + y + 1 \geq 0\ ,\ x \leq 1\}$

   (c) $f(x,y) = x + y$ onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

   (d) $f(x,y) = xy$ onde $D = \mathbb{R}^2$

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau 2 e suponha que $f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Calcule

   (a) $f(4\sqrt{3}, 4)$

   (b) $f(0,3)$

   (c) $f(x,y)$

9. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função homogênea que se anula na circunferência de raio 1 então f é identicamente nula no plano exceto eventualmente na origem.

10. Um ponto descreve uma curva sobre a superfície $z = xy$ de modo que sua projeção no plano xy descreve a curva $x = 5 - t$, $y = t^2 + 3$. Determine a máxima e a mínima altura atingida pelo ponto quando t percorre o intervalo $[0, 4]$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau n. Considere o plano π determinado pelo eixo z e pela reta $x = at$,$y = bt$,$z = 0$.Descreva a curva obtida pela intersecção do plano com o gráfico de f. Utilize isto para esboçar o gráfico da função homogênea $f(x,y) = x^2 y$.

12. Uma função do tipo $f(x, y) = g(x) + h(y)$ é chamada de superfície de translação.

    (a) Justifique o nome determinando as secções do gráfico de f com os planos $y = constante$ (ou $x = constante$).

    (b) Se g ou h é nula o gráfico de f é chamado de *superfície cilíndrica*. Justifique este nome.

13. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continua. Verifique se são verdadeiras ou falsas seguintes sentenças:

    (a) $A = \{x : f(x) > 0\}$ é aberto.

    (b) $\{x : f(x) = 0\}$ é fechado.

    (c) $\partial A = \{x : f(x) = 0\}$

    (d) $\partial A \subset \{x : f(x) = 0\}$

    (e) $Ext A = \{x : f(x) < 0\}$

    (f) $Ext A \supset \{x : f(x) < 0\}$

14. (*Conservação do sinal*) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função continua. Se $p \in A$ e $f(p) > 0$ mostre que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ com $\|x - p\| < r$ tem-se que $f(x) > 0$.

15. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em p e $f(p) > 0$ mostre que existe um número $r > 0$ tal que $f(q) > 0$ para todo $q \in B_p(r)$.

16. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se para todos $p, q \in D$ existe uma curva contínua $c : [0, 1] \to D$ tal que $c(0) = p$ e $c(1) = q$ mostre que para todo número k tal que $f(p) \leq k \leq f(q)$ existe um ponto $c \in D$ tal que $f(c) = k$. Conclua disto que a imagem da função f é um intervalo.

Parte 3 - Diferenciabilidade

1. Calcule a diferencial e os gradientes das seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \langle a, x \rangle$

   (b) $g(x) = \langle x, x \rangle$

   (c) $r(x) = \|x\|$

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com a propriedade $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$. Mostre que f é linear.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Mostre que f tem todas derivadas direcionais na origem mas não é diferenciável.

4. É possivel $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0) > 0$ para todo vetor $v \neq 0$?

5. Calcule as derivadas parciais das funções:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$

   (b) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$

   (e) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}\right)$

6. Mostre que a função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ não é diferenciável na origem.

7. Utilize a diferencial para calcular um valor aproximado de $\sqrt{(2,8)^2 + 2(2,1)^3}$.

8. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da $f(x,y) = xe^{x^2+y^2-2}$ no ponto $(1,1,1)$.

9. O altura de uma montanha é dada por $h(x,y) = 2500 - 3x^2 - 4y^2$ em metros.

   (a) Qual o formato da base?

   (b) Qual a altura da montanha?

   (c) Em que pontos do chão a altura é 900 metros?

   (d) Qual é a inclinação da montanha no ponto $(20, 10, 900)$ que faz com o horizonte na direção $\overrightarrow{u} = \sqrt{2}/2\,\overrightarrow{i} + \sqrt{2}/2\,\overrightarrow{j}$?

   (e) Encontre o vetor tangente à curva de nivel C_{900} no ponto $(20, 10)$. Qual a inclinação nesta direção?

   (f) Determine ∇f no ponto $(20, 10)$. Qual o valor da derivada direcional nesta direção?

10. Encontre a equação da reta normal ao gráfico de $z = 5 + x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 7)$.

11. As curvas de nível de uma função f são elipses $x^2 + 2y^2 = a^2$. Sabendo-se que $|\nabla f| = e^{(x^2+2y^2)}$ determine ∇f.

12. A equação de uma montanha e dada por $z = 1800 - 3x^2 - 2y^2$ onde a distância é medida em metros e o eixo x aponta no sentido leste. Um alpinista encontra-se no ponto com coordenadas $(-10, 10, 1300)$.

   (a) Qual é a direção a partir do alpinista que tem maior inclinação?

   (b) Se o alpinista andar na direção leste estará descendo ou subindo?

   (c) Se o alpinista andar na direção sudoeste estará descendo ou subindo?

   (d) Em que direção o alpinista estará percorrendo um caminho plano?

13. Mostre que $z = x\phi(y/x) + \psi(y/x)$, onde ϕ, ψ são funções de uma váriavel deriváveis até segunda ordem, satisfaz a equação diferencial:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

14. Sejam S_1, S_2 as superfícies dadas respectivamente pelas equações

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \ , \ x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1$$

   (a) Determine a equação do plano tangente a S_1 no ponto $(1, 1, 1/3)$.

   (b) Determine os pontos de S_2 tais que os planos tangentes nests pontos sejam paralelos ao plano determinado na parte a.

15. Mostre que as superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 = 4a(y + a)\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 = 4b(y + b)\}$$

   onde $a > 0$ e $b < 0$ cortam-se ortogonalmente.

16. Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ e interprete geometricamente.

17. Seja $z = f(x, y)$ onde $x = r \cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$.

   (a) Mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \frac{\partial f}{\partial x} \operatorname{sen}\theta + r \frac{\partial f}{\partial y} \cos\theta$$

   (b) Se $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ mostre que

$$(\frac{\partial g}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2}(\frac{\partial g}{\partial \theta})^2 = (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$$

18. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x) = g(x)x$. Prove que f é constante em qualquer esfera de raio r centrada na origem.

19. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz -se *Homogênea de grau* m se $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $t > 0$. Sendo f diferenciável prove a relação de Euler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x)$$

ou seja $\langle x, \nabla f(x) \rangle = mf(x)$.

20. Determine a equação do plano tangente e da reta normal das seguintes superfícies no ponto especificado:

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ em $p = (6, 2, 3)$

    (b) $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$ em $p = (2, -3, 4)$

    (c) $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx = 1$ em $p = (1, \pi/2, 0)$

21. Sejam $f(x, y, z) = z - e^x \operatorname{sen} y$ e $p = (\ln 3, 3\pi/2, -3)$.Determine:

    (a) $\nabla f(p)$.

    (b) A reta normal em p à superfície de nivel que passa por p.

    (c) O plano tangente em p à superfície do item b.

22. Dada uma curva $c(t) \in \mathbb{R}^3$ definida num intervalo aberto dê a fórmula da distância de P a $c(t)$. Suponha que esta distância assume um mínimo em t_0. Mostre que a reta que liga P a $c(t_0)$ é perpendicular à curva no ponto $c(t_0)$.

23. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície definida implicitamente por $f(x) = 0$ e P um ponto fora de S. Seja $d(x)$ a distância do ponto P a um ponto x da superfície S. Se X_0 é um ponto de mínimo de $d(x)$ mostre que a reta PX_0 é perpendicular à superfície S.Para isto considere as curvas da superfície que passam por X_0 e do exercício anterior conclua que PX_0 é um múltiplo do gradiente da função f.

24. As curvas de nivel de uma função $z = f(x, y)$ são: Para $a < 0$ a curva de nivel C_{e^a} é a reta vertical $x = a$, A curva de nivel 0 é o ponto $(0, 0)$, Para $a > 0$ a curva de nivel C_{a^2} é o semi-círculo $x^2 + y^2 = a^2$ onde $x \geq 0$.

    (a) A partir de um ponto $p = (x, y)$ com $x > 0$ qual a direção de maior crescimento da função? E a partir de um ponto $q = (x, y)$ com $x < 0$?

    (b) A função é continua na origem?

    (c) Você consegue descrever analiticamente a função?

25. Mostre que a área de uma esfera de raio r é igual a área de um cilindro circunscrito a esta esfera.

26. Determine as funções positivas $y = f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$ tais que $\dfrac{dA}{dx}$ é constante onde $A(x)$ é a área da superfície de revolução obtida girando em torno do eixo x o gráfico da função $y = f(x)$ no intervalo $[a, x]$.

27. Determine uma função positiva $y = f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$ tal que o volume do sólido de revolução obtido girando-se o gráfico de f em torno do eixo x seja igual a área de seu bordo.

Parte 4 - Máximos e Mínimos

1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\langle \nabla_x f, x \rangle > 0$ para $x \neq 0$ então 0 é um mínimo de f.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\langle \nabla_x f, x \rangle > 0$ para todo x tal que $\|x\| = 1$ então existe um ponto p tal que $\nabla_p f = 0$.

3. É possivel $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0) > 0$ para todo vetor $v \neq 0$?

4. Classifique os pontos críticos das seguintes funções:

    (a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$

    (b) $f(x, y) = x^2y^2$

    (c) $f(x, y) = x^4 + y^4$

    (d) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y - 1)^2 + (y - 1)^2 + x^2}$

    (e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

    (f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - 2z$

5. Uma montanha tem a forma do gráfico da função

$$h(x, y) = 800y^2(2 - y^2) - 300x^2$$

   (a) Determine o formato da base da montanha.

   (b) Mostre que ela tem dois picos e uma depressão entre eles e determine suas alturas.

6. Determine os pontos e os respectivos valores de máximo e mínimo das seguintes funções$f : D \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x, y) = xy \quad D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad D = \{(x, y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$

   (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - 2y + 1 \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$

   (d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -1 \leq y \leq 2\}$

   (e)
   $$f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y) \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\}$$

7. Determine os extremos condicionados da função f nos seguintes casos:

   (a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 8x$ com a condição $2x^2 + y^2 = 1$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ com a condição $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   (c) $f(x, y, z) = xyz$ com as condições $x + y + z = 5$ e $xy + yz + zx = 8$

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$ quando $13x^2 + 13y^2 - 10xy = 72$

   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ quando $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$

8. Quais as dimensões de uma banheira retangular com uma capacidade de V litros de água de modo que sua superfície seja a menor possivel?

9. Determine a menor distância entre um ponto da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ e um ponto da reta $2y - x + 16 = 0$.

10. Uma distribuição de temperatura e dada pela função

$$T(x, y, z) = 100(3x^2 + 2y^2 + z^3 - z)$$

Determine os pontos mais quentes e os mais frios que estão sôbre o elipsóide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

11. Se f é uma função de homogenea de grau k diferenciável e p um ponto crítico então $f(p) = 0$.