MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Lista 4 – 18/11/2014

1. (*Conservação do sinal*) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função continua. Se $p \in A$ e $f(p) > 0$ mostre que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ com $\|x - p\| < r$ tem-se que $f(x) > 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continua. Verifique se são verdadeiras ou falsas seguintes sentenças:

   (a) $A = \{x : f(x) > 0\}$ é aberto.

   (b) $\{x : f(x) = 0\}$ é fechado.

   (c) $\partial A = \{x : f(x) = 0\}$

   (d) $\partial A \subset \{x : f(x) = 0\}$

   (e) $ExtA = \{x : f(x) < 0\}$

   (f) $ExtA \supset \{x : f(x) < 0\}$

3. Calcule a diferencial e os gradientes das seguintes funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \langle a, x\rangle$

   (b) $g(x) = \langle x, x\rangle$

   (c) $r(x) = \|x\|$

4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com a propriedade $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$. Mostre que f é linear.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Mostre que f tem todas derivadas direcionais na origem mas não é diferenciável.

6. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\langle \nabla_x f, x\rangle > 0$ para $x \neq 0$ então 0 é um mínimo de f.

7. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\langle \nabla_x f, x \rangle > 0$ para todo x tal que $\|x\| = 1$ então existe um ponto p tal que $\nabla_p f = 0$.

8. É possivel $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0) > 0$ para todo vetor $v \neq 0$?

9. Classifique os pontos críticos das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$

   (b) $f(x,y) = x^2y^2$

   (c) $f(x,y) = x^4 + y^4$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{(x^2 - y - 1)^2 + (y-1)^2 + x^2}$

   (e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

   (f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x - 2z$

10. Uma montanha tem a forma do gráfico da função

$$h(x,y) = 800y^2(2 - y^2) - 300x^2$$

   (a) Determine o formato da base da montanha.

   (b) Mostre que ela tem dois picos e uma depressão entre eles e determine suas alturas.

11. Determine os pontos e os respectivos valores de máximo e mínimo das seguintes funções$f : D \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x,y) = xy \quad D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad D = \{(x,y) : |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - 2y + 1 \quad D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$

   (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } -1 \leq y \leq 2\}$

   (e)
   $$f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y) \quad D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq y \leq \pi/2\}$$

12. Determine os extremos condicionados da função f nos seguintes casos:

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 8x$ com a condição $2x^2 + y^2 = 1$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ com a condição $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

(c) $f(x,y,z) = xyz$ com as condições $x + y + z = 5$ e $xy + yz + zx = 8$

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ quando $13x^2 + 13y^2 - 10xy = 72$

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2$ quando $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$

13. Quais as dimensões de uma banheira retangular com uma capacidade de V litros de água de modo que sua superfície seja a menor possivel?

14. Determine a menor distância entre um ponto da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ e um ponto da reta $2y - x + 16 = 0$.

15. Uma distribuição de temperatura e dada pela função

$$T(x,y,z) = 100(3x^2 + 2y^2 + z^3 - z)$$

Determine os pontos mais quentes e os mais frios que estão sôbre o elipsóide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

16. Se f é uma função de homogenea de grau k diferenciável e p um ponto crítico então $f(p) = 0$.