MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Lista de exercícios 2

04/08/2014

1. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo x a região limitada pelas funções $y = x^2 - 4x + 5$ e $y = -x^2 + 6x - 3$.

2. Gire a região do exercício 1 em torno do eixo y e encontre seu volume.

3. Um sólido tem como base a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e cada secção ortogonal ao semi eixo maior é um semi círculo. Ache seu volume.

4. Considere a região limitada pela hipérbole $y = 1/ax$ e pelas retas $x = 1/a$ e $x = a$ para $a \geq 1$. Para que valor de a o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x é máximo?

5. Determine o volume do sólido obtido girando-se em torno do eixo x a região limitada por $y = (x-2)^2$ e $y = (x-2)^2/2 + 2$.

6. Determine o comprimento das curvas:

   (a) $y = x^4/4 + 1/8x^2$
   (b) $y = \ln(\cos x)$ para $0 \leq x \leq \pi/4$
   (c) $y = x^{n+1}/(n+1) \ + \ 1/4(n-1)x^{n-1}$ para $a \leq x \leq b$ onde $a > 0$
   (d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

7. Determine a área da superfície de revolução girando-se as curvas abaixo em torno do eixo indicado:

   (a) $y = x^3$ onde $0 \leq x \leq a$ e eixo x
   (b) $y = x^2$ onde $0 \leq x \leq 2$ e eixo y
   (c) $y = \sqrt{x}$ onde $1 \leq x \leq a$ e eixo x
   (d) $y = x^4/4 + 1/8x^2$ onde $1 \leq x \leq 2$ e eixo y

8. Sejam $a < b$. Calcule o centro de massa do semi-anel limitado pelas circunferências:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ \ e \ \ x^2 + y^2 = b^2$$

9. Mostre, usando centro de massa, que as medianas de um triângulo se interceptam num ponto e este divide cada uma delas na razão de 2 : 1.

10. Determine o centro de massa da região limitada pelas parábolas:

$$y = \frac{x^2}{4} \ \ e \ \ x = \frac{y^2}{4}$$

11. Determine o centro de massa do arco da parábola:

$$y = x^2; \quad -a \leq x \leq a$$

12. Determine o centro de massa de um setor circular de raio R e ângulo α.

13. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5, em torno de x_0 dado, nos seguintes casos:

   $a)$ $f(x) = senx; \quad x_0 = 0$
   $b)$ $f(x) = cosx; \quad x_0 = 0$
   $c)$ $f(x) = lnx; \quad x_0 = 1$
   $d)$ $f(x) = (1+x)^{\alpha}; \quad x_0 = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um número real dado.

14. a) Determine o polinômio de Taylor de $f(x) = e^x$, de ordem n, em torno de $x_0 = 0$;

b) Mostre que, para todo x em $[0, 1]$,

$$\left| e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n\right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!}x^{n+1}$$

c) Avalie e com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

15. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = senx$. Mostre que, para todo x,

$$\left| senx - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right) \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

16. Avalie $sen 1$ com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}.

17. Mostre que, para todo x,

$$senx = \lim_{n \to \infty} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

ou

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

18. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Use a fórmula da progressão geométrica para mostrar que o polinômio de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$ de ordem 10 é $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$.

b) Observando o polinômio do item (a), calcule $f^{(n)}(0)$ para $n = 1, 2 \ldots 10$.

19. Resolva as equações:

a) $y' = e^{x-2y}$ b) $(senx)y' + (cosx)y = 1$ c) $y' = x^3 - 2xy$

20. Encontre as soluções que verificam a condição inicial dada:

a) $y' = x + y$; $y(0) = 1$ b) $y' = x(y+1)$; $y(0) = -1$

21. Determine as soluções constantes da equação

$$\frac{dx}{dt} = 9 - x^2$$

e faça um esboço das soluções.

22. A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a do meio ambiente. Se um corpo está à temperatura de $120°C$ e após 40 minutos a sua temperatura é de $60°C$, estando o ambiente a $35°C$, qual a temperatura do corpo após 100 minutos (a partir de 120°C)?

23. A população de uma cidade é de 1.000.000 habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em 7 dias, esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos sãos e enfermos, sendo a taxa de variação na porcentagem de enfermos proporcional ao número de contatos e este, proporcional ao produto das porcentagens de sãos e enfermos. Supondo a população fixada, pergunta-se: após quanto tempo os enfermos serão 50% da população?

24. Considere um corpo de massa unitária sujeito à ação de uma mola com constante 5.

    (a) Escreva a equação diferencial do movimento e sua solução geral.
    (b) Determine a natureza do movimento.
    (c) Ache a solução particular que parte da posição de equilíbrio com velocidade inicial igual a 4. Esboce o gráfico da solução.

25. Suponha que uma sala contendo inicialmente $60m^3$ de ar esteja inicialmente livre de monóxido de carbono. Começa-se a fumar cigarros e o ar expelido a uma taxa de $0,003m^3/min$ contém 4% de monóxido de carbono. A mistura homogeneizada deixa a sala na mesma taxa.

    (a) Encontre a porcentagem em volume do monóxido de carbono em um instante qualquer t.
    (b) Uma exposição prolongada ao monóxido de carbono à uma porcentagem de $0,012$ é prejudicial ao organismo humano. Depois de quanto tempo é atingida esta concentração na sala?

26. Um recipiente contém um volume V (em litros) de uma solução salina, sendo a massa de sal dissolvida igual a m_0 quilogramas no instante inicial. Uma outra solução de concentração k (em kg/l) penetra no recipiente a uma razão constante de r litros por minuto. A solução se mantém perfeitamente misturada no recipiente, de onde sai à razão de r litros por minuto. Seja $x(t)$ a concentração da solução no recipiente no instante t.

    a) Determine a equação diferencial que admite $x(t)$ como solução.

    b) Resolva a equação obtida no item (a).

    c) Usando o item (b), determine em que condições $x(t)$ é crescente e em que condições $x(t)$ é decrescente. Interprete os resultados.

    d) Calcule $\lim_{t\to\infty} x(t)$. Interprete o resultado.

27. A velocidade de desintegração de um material radioativo é proporcional a quantidade de material em cada instante.

    (a) Escreva a equação diferencial que traduz a desintegração.
    (b) A meia-vida do urânio-235 é 713 milhões de anos. O que significa isso?
    (c) O urânio-235, ao se desintegrar, origina o chumbo-207. Uma certa amostra de rocha contém 1g de urânio-235 para cada 31g de chumbo-207. Supondo que inicialmente a rocha fosse de urânio-235 apenas, qual a sua idade?
    (d) Outra amostra contém 2g de urânio-235 para cada 28g de chumbo-207. Qual a sua idade?

28. Num circuito RC, carrega-se o capacitor com uma carga de 2 coulombs. Qual a corrente no circuito depois de ligada a chave, sabendo-se que $R = 20$ ohms e $C = 0,05$ farad?