# MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

**Lista 1 – 04/08/2014**

1. Determine os seguintes limites:

   $a)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{9}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)$

   $b)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)$

   $b)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^4}+\frac{9}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)$

2. Considere a função $f : [0,2] \to I\!R$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   Seja $P_n$ a partição do intervalo $[0,2]$ em $n$ partes iguais.

   $a)$ Calcule $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 4, 5, 6, 7$;

   $b)$ Dê uma expressão para $s(f, P_n)$ e $S(f, P_n)$ para $n = 2k$ e $n = 2k+1$ ($n$ par ou ímpar);

   $c)$ Calcule $lim_{n\to\infty} S(f, P_n)$ e $lim_{n\to\infty} s(f, P_n)$.

3. Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{senx}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Seja $f : [a,b] \to I\!R$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   é uma função crescente.

5. Para as funções $f$ abaixo, responda as seguintes perguntas:

(1) Faça um gráfico de $f$;

(2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, $t \in [0,2]$;

(3) Determine os pontos onde $F$ é derivável e neles calcule $F'(t)$.

$a)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x-1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$b)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$c)$ $f : [0,2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a área da região

   $a)$ limitada pela reta $y = 2x+1$ e pela curva $y = x^2$;

   $b)$ limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;

   $c)$ pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ para $x \in [0,2]$;

   $d)$ limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

7. Seja $f$ uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

8. Seja $f$ uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

9. Se $f$ é derivável e $f'$ é contínua, mostre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

10. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

$a)$ Se $f$ e $g$ são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

$b)$ $\displaystyle\int_1^e \frac{1+ln(x)}{x}dx = \frac{3}{2}$

$c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

11. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_0^{1+x^2} 1/(2+\operatorname{sen} t)dt$$

12. $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde $f$ é contínua, determine $f(4)$.

13. Ache uma função continua $f$ tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - x^2/2$$

14. Seja $f$ uma função derivável e inversível definida no intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

15. Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1+t^2)dt$$

16. Se $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$ use integração por partes para calcular $\int_0^x f(x)dx$.

17. Se $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x \operatorname{sen} t^2 dt$ calcule $\int_0^x f(x)dx$.

18. Seja $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \ , \ 0 \leq x \leq \ a\}$ e $S$ o sólido que com base $B$ e cuja secção transversal ao eixo $y$ passando por $y$ é um retângulo cuja altura é $h(y)$.

    (a) Mostre que o volume de $S$ é dado por

    $$V = \int_0^a (a - y)h(y)dy$$

    (b) Mostre a área da secção transversal ao eixo $x$ é dada por $A(x) = \int_0^x h(y)dy$ e portanto o volume também é dado por

    $$V = \int_0^a A(x)dx$$

    (c) Conclua a igualdade

    $$\int_0^a (a - y)h(y)dy = \int_0^a \left( \int_0^x h(y)dy \right) dx$$

19. Use o exercício anterior para resolver os exercícios 16 e 17.

20. Encontre a derivada da função

    $$f(x) = \int_{x^3}^{\pi} \frac{1}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$$

    e determine $f^{-1}(0)$.

21. Derive as seguintes funções:

    (a) $g(x = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + t^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt$

    (b) $h(x) = \operatorname{sen} \left( \int_0^{2x} \operatorname{sen} \left( \int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt \right) dy \right)$.

22. Seja $f : [0, b] \twoheadrightarrow [0, d]$ uma função contínua e inversível e $h : [0, d] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

   (a) Mostre através de uma integração por partes que

   $$\int_0^b \left( \int_0^{f(x)} h(y)dy \right) dx = \int_0^d (b - f^{-1}(y))h(y)dy$$

   (b) Interprete as integrais acima como volume de um sólido tendo como base o conjunto

   $$B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } 0 \leq x \leq b\}$$

23. Verifique se as seguintes integrais divergem ou convergem. Neste caso determine seu valor:

   (a) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$ onde $a > 1$

   (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ onde $p > 0$

   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{arctan}}{x^2 + 1} dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}} dx$

   (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3 - 5x^2} dx$

   (h) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$

24. Demonstrar que a integral de Euler de $1^{\text{a}}$ espécie

   $$\int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx$$

   é convergente se $p > 0$ e $q > 0$.

25. Determine se as seguintes integrais convergem ou não usando integração por partes:

(a) $\int_0^\infty xe^{-x}dx$

(b) $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx$ onde $a > 0$