MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 6 – 06/05/2014

1. Determine os seguintes limites:

   $a)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{4}{n^3}+\frac{9}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)$

   $b)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)$

   $b)\ lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^4}+\frac{9}{n^4}+\cdots+\frac{n^2}{n^4}\right)$

2. Considere a função $f:[0,2]\to I\!R$ dada por

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ 2, & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

   Seja P_n a partição do intervalo $[0,2]$ em n partes iguais.

   $a)$ Calcule $s(f,P_n)$ e $S(f,P_n)$ para $n=4,5,6,7$;

   $b)$ Dê uma expressão para $s(f,P_n)$ e $S(f,P_n)$ para $n=2k$ e $n=2k+1$ (n par ou ímpar);

   $c)$ Calcule $lim_{n\to\infty}S(f,P_n)$ e $lim_{n\to\infty}s(f,P_n)$.

3. Usando as propriedades da integral mostre que

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{senx}{x}dx\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Seja $f:[a,b]\to I\!R$ uma função positiva. Mostre que

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

   é uma função crescente.

5. Para as funções f abaixo, responda as seguintes perguntas:

(1) Faça um gráfico de f;

(2) Encontre a função $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, $t \in [0, 2]$;

(3) Determine os pontos onde F é derivável e neles calcule $F'(t)$.

$a)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$b)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$c)$ $f : [0, 2] \to I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a área da região

$a)$ limitada pela reta $y = 2x + 1$ e pela curva $y = x^2$;

$b)$ limitada pelas curvas $y = 1 - x^2$ e $y = x^2 - 1$;

$c)$ pelos gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ para $x \in [0, 2]$;

$d)$ limitada pelas curvas $y = x^2 - x$, $x = 2$ e $y = 0$.

7. Seja f uma função contínua tal que $f(x) = f(-x)$. Utilize as propriedades da integral para mostrar que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \quad a > 0$$

8. Seja f uma função contínua tal que $f(-x) = -f(x)$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

9. Se f é derivável e f' é contínua, mostre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f(b))^2 - (f(a))^2$$

10. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

$a)$ Se f e g são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

$b)$ $\displaystyle\int_1^e \frac{1 + ln(x)}{x}dx = \frac{3}{2}$

$c)$ Uma primitiva de $f(x) = tg(x)$ é $F(x) = ln\left(|sec(x)|\right)$.

11. Encontre a derivada da função

$$f(x) = \int_0^{1+x^2} 1/(2 + \operatorname{sen} t)dt$$

12. $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt = xsen(\pi x)$, onde f é contínua, determine $f(4)$.

13. Ache uma função continua f tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \operatorname{sen} x - x\cos x - x^2/2$$

14. Seja f uma função derivável e inversível definida no intervalo $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(t)dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)dt = bf(b) - af(a)$$

15. Determine os pontos de máximos e os de mínimos, se houver, da função

$$f(x) = \int_x^{x+1} 1/(1 + t^2)dt$$