

MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 5 – 06/05/2014

1. Se $f : A \mapsto B$ e $g : B \mapsto C$ são funções inversíveis mostre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Seja $f : I \mapsto J$ uma função inversível do intervalo I sobre o intervalo J com inversa a função $g : J \mapsto I$.
 - (a) Se $u(x) = f(ax + b)$ onde a, b são números reais com $a \neq 0$ determine o domínio e a imagem de u e a sua inversa v .
 - (b) Se $f : [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]$ definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ determine a sua inversa em termos da função arcsen.
3. Mostre que para $x \geq 0$ tem-se que $\sqrt{1+x^2} - 1 \leq x$.
4. Se $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ é contínua mostre que existe x tal que $f(x) = x$.
5. Se $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é contínua e $\mathbb{Z} \subset \text{Im}(f)$ mostre que f é sobrejetora.
6. Se $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ é racional então f é constante.
7. Seja $f : I \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e c um máximo local do interior do intervalo I . Mostre que existe um número real $r > 0$ tal que se $x_1 \in]c - r, c + r[$ existe $x_2 \in]c - r, c + r[$ diferente de x_1 com $f(x_1) = f(x_2)$ dito de outro modo f assume o mesmo valor em dois números diferentes numa vizinhança de c .
8. Mostre que não existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in \mathbb{R}$ existem precisamente dois números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$.
9. Sejam $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que $f' = g$, $g' = -f$, $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$.
 - (a) Mostre que elas são as únicas funções com estas propriedades. Para isto derive a função $h(x) = (f(x) - f_1)^2 + (g(x) - g_1)^2$ onde f_1 e g_1 são funções que também satisfazem as propriedades acima e conclua que $f = f_1$ e $g = g_1$.

(b) Mostre que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$. Para isto derive a função $h(x) = f(x)^2 + g(x)^2$ para mostrar que ela é constante.

10. Duas cidades A e B estão ligadas por duas estradas próximas de mesma distância d . Dois ciclistas saem da cidade A cada um percorrendo uma das estradas e ligados por uma corda de comprimento menor que $2a$. Dois carros cada um com uma largura a percorrem uma das estradas um partindo da cidade A indo para B e o outro partindo, ao mesmo tempo, da cidade B indo para a cidade A . Pergunta: os carros colidirão?