

MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Lista 3

27/03/2014

1. Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$j) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow h} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{h}}{x - h}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x}{(x - 1)^2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 1}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x - 1}$$

2. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in \text{Dom}(g)$, mostre que $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = 0$.

3. Seja f uma função tal que $x^3 \leq f(x) \leq x^2$, para todo $x \leq 1$. O que você pode dizer a respeito de:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

4. Calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^h - 1}{x^m - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[v]{x} - 1}{\sqrt[w]{x} - 1}$$

$$e) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

5. Se $|f(x) - 1| \leq (x - 1)^2$, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Você pode dizer algo sobre $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq \frac{x^2}{x^4 + 1}$. Mostre que f é contínua na origem.

7. Encontre, quando existir, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x + |x - 3|)$

c) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{2x + 12}{|x + 6|}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - |x|}{2 + x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x + 2|}{x + 2}$

8. Determine os valores das constantes a e b que tornam as funções contínuas para todo x real.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 7, & x \leq 4 \\ ax - 1, & x > 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 4, & x < 3 \\ a^2x - a, & x \geq 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ ax + b, & 1 < x < 4 \\ -2x, & x \geq 4 \end{cases}$

9. Considere a função $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x < 2 \\ ax^2 - bx, & x \geq 2 \end{cases}$

a) Para que valores de a e b f é contínua?

b) Seja $m(x) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$. Encontre a e b para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} m(x)$.

10. Seja g uma função tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \text{Dom}g$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} < g(x) < \frac{3}{2}.$$

11. Seja f definida em \mathbb{R} e tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - 1)}{x - 1}$

12. Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & x \neq 5 \\ a, & x = 5 \end{cases}$. Determine o valor de a para que f seja contínua em 5.

13. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ e f é contínua na origem, mostre que $f(0) = 0$.

14. Calcule $f'(x)$ sendo:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x)$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

f) $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$

c) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$

d) $f(x) = 5(x-1)(x+2)(x^3+1)$

15. Verifique se as funções abaixo têm derivadas em 0. Justifique sua resposta.

a) $f(x) = |x| - x$

b) $f(x) = x|x|$

16. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = 2x^2 + 3$ e paralelas à reta $8x - y + 3 = 0$.

17. Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $(3, -2)$ e são tangentes à curva $y = x^2 - 7$.

18. Demonstre analiticamente que não existe reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é tangente à curva $y = 4 - x^2$.

19. A **reta normal** ao gráfico de uma função $y = f(x)$ num ponto P do mesmo é a reta normal à tangente ao gráfico da função nesse ponto. Determine a reta normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

20. Considere a função $f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$.

a) Determine $f'(x)$ usando a definição de derivada.

b) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 2)$.

c) Determine os pontos do gráfico de f onde a reta tangente é horizontal.

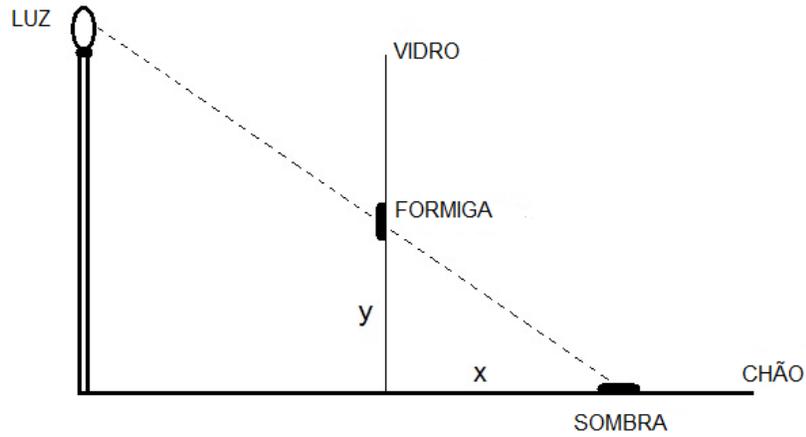
d) Encontre a reta normal ao gráfico de f no ponto $(2, 2)$.

21. Encontre as equações das retas tangentes à curva $y = \sqrt{4x-3} - 1$ e perpendiculares à reta $x + 2y - 11 = 0$.

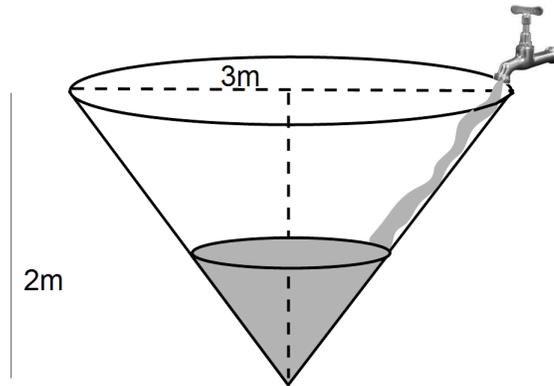
22. Determine uma reta que tangencie as parábolas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 8x - 10$.

23. Determine a e b para que f seja derivável, sendo $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & x > 1 \end{cases}$.

24. Mostre que a reta tangente à hipérbole $y = \frac{1}{x}$ no ponto $(a, \frac{1}{a})$ intercepta os eixos coordenados nos pontos $(2a, 0)$ e $(0, \frac{2}{a})$.
25. Calcule a derivada primeira e a derivada segunda das seguintes funções:
- a) $f(x) = g(\frac{x+1}{x-1})$ b) $f(t) = u(t)^2 + v(t)^2$
- c) $f(x) = g(g(x))$ d) $f(x) = \frac{u(x)^2}{v(x)^2}$
26. Seja f uma função definida em \mathbb{R} . Suponha que exista $m > 0$ tal que $|f(x)| \leq mx^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- a) Mostre que f é contínua e derivável em 0.
- b) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$? Se sim, prove. Se não, exiba um contra exemplo.
27. Seja f definida em \mathbb{R} , derivável em 0 e tal que $f(0) = 0$. Prove que existe uma função g definida em \mathbb{R} , contínua em 0, tal que $f(x) = xg(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
28. Seja r uma reta tangente aos gráficos de $f(x) = -x^2$ e $g(x) = \frac{1}{2} + x^2$. Determine r .
29. Encontre a distância entre a parábola $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x - 1$.
30. Mostre que a reta tangente à parábola $y = ax^2$ no ponto (x_0, y_0) intercepta o eixo x na metade de x_0 .
31. Para que valores de a e b a parábola $y = ax^2 + b$ tangencia a reta $y = x$.
32. Uma bolinha de naftalina perde sua massa numa taxa que é proporcional à sua área. Se depois de um mês ela perdeu a metade de sua massa, depois de quanto tempo desaparecerá?
33. Um avião, voando horizontalmente com uma velocidade constante v e a uma altura h , deixa cair um objeto. Desprezando-se a resistência do ar, determinar o tempo de queda e o local onde caiu, tomando-se como referência o ponto no solo sob o ponto de lançamento.
34. Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume da areia cresce a uma taxa de $10m^3/h$, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de $4m$?
35. Uma formiga sobe uma parede de vidro com velocidade constante V . Determine a velocidade da sombra no chão (ver figura).



36. Entra água num tanque cônico a uma taxa de 2 litros/min . Determine a variação instantânea da altura em relação ao tempo no instante em que $h = 1$ (ver figura).



37. Em um tanque cônico entra água a uma taxa de 3 litros/min . Se a altura do tanque é de $20m$ e o raio da base é $10m$, qual a velocidade de ascensão da água no instante em que o nível encontra-se na metade da altura?