

Limites

J. A. Verderesi

Apresentamos a noção de limite e suas propriedades básicas e a partir desta definimos função contínua e derivada de uma função, que será o nosso principal objeto de estudo.

1 Limites

1.1 A ideia de limite

Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, I um intervalo aberto e $c \in I$ tais que $I - \{c\} \subseteq D$. Diremos que l é limite de $f(x)$ quando x tende a c se para x próximo de c , $f(x)$ está próximo de l . Vejamos dois exemplos:

Observação 1.1. Note que c pode estar ou não no domínio de f .

Exemplo 1.2. Tomemos $f(x) = x^2$ e $c = 1$. Se $x = 1 + \frac{1}{10}$, então $f(x) = f(1 + \frac{1}{10}) = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2}$. Se $x = 1 + \frac{1}{100}$, então $f(x) = f(1 + \frac{1}{100}) = 1 + \frac{2}{100} + \frac{1}{100^2}$. Em geral, se dermos um pequeno acréscimo δ em c , então $f(c + \delta) = 1 + 2\delta + \delta^2$ ou seja, $f(x)$ fica próximo de 1. Observe que o quão próximo x está de c é diferente do quão próximo $f(x)$ está de 1, mas a medida em que δ vai diminuindo, a diferença $f(c + \delta) - 1$ também vai diminuindo.

Exemplo 1.3. Considere agora $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e $c = 1$. Note que 1 não está no domínio de f . Então, $f(1 + \delta) = \frac{(1+\delta)^2-1}{\delta} = 2 + \delta$ e, para δ pequeno, $f(x)$ fica próximo de 2.

Formalmente a definição de limite é a seguinte:

Definição 1.4. Diremos que l é limite de $f(x)$ quando x tende a c se para todo $\varepsilon > 0$ (por menor que seja), existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. Neste caso escrevemos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$.

Equivalentemente se para todo $\varepsilon > 0$ (por menor que seja), podemos existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$, então $|f(c + h) - l| < \varepsilon$. Aqui podemos escrever $\lim_{h \rightarrow 0} f(c + h) = l$.

1.2 Funções arbitrariamente pequenas

Uma função $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ onde $m > 0$ diz-se *arbitrariamente pequena* (FAP) se

- for crescente, isto é, se $\delta_1 < \delta_2$ então $p(\delta_1) \leq p(\delta_2)$ e
- para todo $\varepsilon > 0$, a inequação $p(x) < \varepsilon$ tem pelo menos uma solução $\delta \in]0, m[$.

Exemplos de tais funções são:

1. $p(x) = 0$,
 2. $p(x) = x$,
 3. $p(x) = x^2$,
 4. $p(x) = \sqrt{x}$,
- com $x \in]0, m[$ sendo $m > 0$.

Se $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma FAP e $0 < n < m$ então podemos restringir a função p ao intervalo $]0, n[$ desta forma consideraremos também FAPs com domínios $]0, m[$. Se p e q são FAPs com domínios $]0, m_1[$ e $]0, m_2[$ respectivamente, podemos tomar $m = \min\{m_1, m_2\}$ e considerar p e q com domínio comum $]0, m[$. A seguir faremos isto sem menção explícita.

Notemos também que se $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma FAP, então a função $q :]-m, m[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(\delta) = p(|\delta|)$ é simétrica em relação ao “eixo y ”.

O teorema seguinte permite uma definição alternativa de limite de função, substituindo o ε e o δ por uma FAP, o que dará um método eficaz para demonstrar e calcular o valor do limite de uma função.

Teorema 1.5. *Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, I um intervalo aberto e $c \in I$ tais que $I - \{c\} \subseteq D$. Então*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \text{ se, e somente se } |f(c+h) - l| < p(|h|)$$

para todo h tal que $0 < |h| < m$ e $(c+h) \in D$, onde $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma FAP.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Se $|f(c+h) - l| < p(|h|)$, da definição de FAP podemos escolher $\delta > 0$ tal que $p(\delta) < \varepsilon$. Desta forma se $0 < |h| < \delta$, então como p é crescente, $p(|h|) \leq p(\delta)$ e concluímos que $|f(c+h) - l| < p(|h|) \leq p(\delta) < \varepsilon$. A recíproca é mais difícil,

pois precisamos construir uma FAP. Da definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |h| < \delta$, então $|f(c+h) - l| < \varepsilon$. Assim se $\varepsilon = 1$ existe $m > 0$ tal que se $0 < |h| < m$ então $|f(c+h) - l| < 1$. Vamos construir uma FAP $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$. Seja $\delta_1 = m$. Escolhemos $\delta_2 < \frac{1}{2}$ tal que $|f(c+h) - l| < \frac{1}{2}$ desde que $0 < |h| < \delta_2$. Indutivamente, escolhemos $\delta_{n+1} < \min\{\frac{1}{n+1}, \delta_n\}$ tal que $|f(c+h) - l| < \frac{1}{n+1}$ se $0 < |h| < \delta_{n+1}$. Desta forma obtemos uma sequência (δ_n) decrescente com $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ e tal que

$$0 < |h| < \delta_n \rightarrow |f(c+h) - l| < \frac{1}{n}$$

Definimos então $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ colocando:

$$p(\delta) = \frac{1}{n} \quad \text{se} \quad \delta_{n+1} \leq \delta < \delta_n$$

Claramente p é uma FAP e se $0 < |h| < m$ existe um natural n tal que $\delta_{n+1} \leq |h| < \delta_n$. Então,

$$|f(c+h) - l| < \frac{1}{n} = p(|h|)$$

□

Observação 1.6. Do Teorema 1.5 temos $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \iff |f(c+h) - l| < p(|h|)$. Se $g(h) = f(c+h) - l$ então g é uma translação de f e $|g(0+h) - 0| < p(|h|)$. Assim $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

1.3 A álgebra das FAPs

Teorema 1.7. Sejam $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ e $q :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ FAPs. Então:

- (1) $p+q$ e $p \cdot q$ são FAPs;
- (2) Se $f :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente e limitada, então $f \cdot p$ é uma FAP.
- (3) Se $f :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente e $0 \leq f(x) \leq p(x)$ para $0 < x < m$, então f é uma FAP.

Demonstração. (1) Como p e q são crescentes e positivas então $p+q$ e $p \cdot q$ são crescentes e positivas. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ as inequações $p(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $q(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$ tem respectivas soluções δ_1 e δ_2 . Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Do fato que p e q são crescentes, vem que

$p(\delta) + q(\delta) \leq p(\delta_1) + q(\delta_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Para o produto basta escolhermos soluções das inequações $p(\delta) < \sqrt{\varepsilon}$ e $q(\delta) < \sqrt{\varepsilon}$.

(2) Sendo f e p crescentes e positivas então $f \cdot p$ é crescente e positiva. Como f é limitada seja k tal que $0 \leq f(x) < k$. Se δ é uma solução de $p(\delta) < \frac{\varepsilon}{k}$, então δ é solução $f(\delta) \cdot p(\delta) < \varepsilon$.

(3) Deixamos a demonstração a cargo do leitor. □

Teorema 1.8. (1) Se $p :]0, m[\rightarrow]0, n[$ e $q :]0, n[\rightarrow \mathbb{R}^+$ são FAPs, então $q \circ p$ é uma FAP.

(2) Se $p :]0, m[\rightarrow]0, n[$ é uma FAP inversível, então p^{-1} é uma FAP.

Demonstração. (1) Sendo p e q crescentes e positivas então $q \circ p$ é crescente e positiva.

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe δ_1 tal que $q(\delta_1) < \varepsilon$ e existe δ tal que $p(\delta) < \delta_1$. Como q é crescente, $q(p(\delta)) < q(\delta_1) < \varepsilon$.

(2) Como o domínio de p é positivo, a inversa de p é positiva e claramente crescente. Dado $\varepsilon > 0$ no intervalo $]0, m[$ então $p(\varepsilon)$ está no intervalo $]0, n[$. Escolhemos δ tal que $0 < \delta < p(\varepsilon)$. Desde que p^{-1} é crescente temos $p(\delta) < p^{-1}(p(\varepsilon)) = \varepsilon$. □

Exemplo 1.9. A única função constante que é uma FAP é a função nula.

Exemplo 1.10. $p(x) = x$ para $x > 0$ é claramente uma FAP. Segue do Teorema 1.7 que $p(x) = x^2$, $p(x) = x^3$ e, indutivamente, $p(x) = x^n$ são FAPs. Também do Teorema 1.7 segue que toda função polinomial $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ com os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n todos positivos é uma FAP.

Exemplo 1.11. Como consequência do Teorema 1.8, $p(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = \sqrt[3]{x}$ e, em geral, $p(x) = \sqrt[n]{x}$ com $x > 0$ são FAPs.

Exemplo 1.12. Se $P(x)$ é um polinômio então $P(c+h) = P(c) + Q(h)$ onde $Q(h)$ é um polinômio na variável h sem termo constante. Designemos por $|Q|$ o polinômio obtido de Q colocando-se módulo nos seus coeficientes. Então $|P(c+h) - P(c)| \leq |Q|(|h|)$. Do Exemplo 1.10 conclui-se que $\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c)$.

Exemplo 1.13. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Mostremos que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Supondo l o limite, temos $l - p(|h|) < f(h) < l + p(|h|)$. Assim para $h > 0$ temos $1 - l < p(h)$ e como p é uma FAP, $1 - l \leq 0$. Logo $l \geq 1$. Para $h < 0$ temos $l + 1 < p(|h|)$ e teremos $l + 1 \leq 0$, ou seja $l \leq -1$, o que é impossível.

Teorema 1.14. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$ então:

1. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$;
2. $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$;
3. $\lim_{x \rightarrow c} 1/g(x) = 1/l_2$ desde que $l_2 \neq 0$;
4. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)/g(x) = l_1/l_2$ desde que $l_2 \neq 0$.

Demonstração. Da hipótese e do Teorema 1.5 existem FAPs $p :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ e $q :]0, m[\rightarrow \mathbb{R}^+$ tais que $|f(c+h) - l_1| < p(|h|)$ e $|g(c+h) - l_2| < q(|h|)$ então:

1. $|f(c+h) + g(c+h) - l_1 - l_2| = |f(c+h) - l_1 + g(c+h) - l_2| \leq |f(c+h) - l_1| + |g(c+h) - l_2| < p(|h|) + q(|h|)$. Como $p + q$ é uma FAP, segue a tese.
2. $|f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| = |f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot g(c+h) + l_1 \cdot g(c+h) + l_1 \cdot l_2| = |(f(c+h) - l_1) \cdot g(c+h) + l_1 \cdot (g(c+h) - l_2)| \leq |(f(c+h) - l_1)| \cdot |g(c+h)| + |l_1| \cdot |(g(c+h) - l_2)|$.
Da desigualdade $|g(c+h) - l_2| < q(|h|) < q(m)$ concluímos que $|g(c+h)| < |l_2| + q(m)$.
Substituindo obtemos $|f(c+h) \cdot g(c+h) - l_1 \cdot l_2| \leq (|l_2| + q(m)) \cdot p(|h|) + |l_1| \cdot q(|h|)$.
3. $\left| \frac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|}$. Para limitarmos $\frac{1}{|g(c+h)|}$ podemos escolher m de forma que $q(m) < |l_2|/2$. Assim, $|g(c+h) - l_2| < q(|h|) < q(m) < |l_2|/2$. De onde concluímos que $|l_2| - |g(c+h)| < |l_2|/2$ ou seja $|g(c+h)| > |l_2|/2$. Assim temos $\left| \frac{1}{g(c+h)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|g(c+h) - l_2|}{|l_2| \cdot |g(c+h)|} < \frac{2q(h)}{l_2^2}$, uma FAP.
4. Consequência dos itens anteriores. □

Teorema 1.15. (Conservação do sinal) Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ e $l > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $0 < |x - c| < \delta$.

Demonstração. Do Teorema 1.5, $l - p(|h|) < f(c+h) < l + p(|h|)$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $p(\delta) < l/2$. Assim para $0 < |h| < \delta$ temos $l/2 = l - l/2 < l - p(|h|) < f(c+h)$. Portanto, para $0 < |x - c| < \delta$ tem-se que $f(x) > l/2 > 0$. □

Corolário 1.16. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ e $l < 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $0 < |x - c| < \delta$.

Corolário 1.17. Se $f(x) > 0$ para $0 < |x - c| < \delta$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$, então $l \geq 0$.

Teorema 1.18. (Unicidade do limite) Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_2$ então $l_1 = l_2$

Demonstração. Por hipótese, $|f(c + h) - l_1| < p_1(|h|)$ e $|f(c + h) - l_2| < p_2(|h|)$, onde p_1 e p_2 são FAPs. Tomando-se $p = \max\{p_1, p_2\}$, da desigualdade triangular tem-se que $|l_2 - l_1| \leq |l_2 - f(c + h)| + |f(c + h) - l_1| \leq 2 \cdot p(|h|)$. Como p é arbitrariamente pequena, $l_2 = l_1$. \square

1.4 Exercícios

1. Se p é uma FAP e $p(h) \geq l$ para $0 < h < m$, então $l \leq 0$.
2. Se p_1 e p_2 são FAPs definidas num intervalo $]0, m[$, então $p = \max\{p_1, p_2\}$ e $q = \min\{p_1, p_2\}$ são FAPs.
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ se e só se $|f(x) - l| < p(|x - c|)$, onde p é uma FAP.
4. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$, então f é limitada num intervalo $]c - m, c + m[$.
5. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l_2$ e $l_1 < l_2$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para $0 < |x - c| < \delta$.
6. **(Teorema do confronto)** Sejam I é um intervalo e f, g, h funções definidas em $I - \{c\}$ tais que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I - \{c\}$. Se $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l$, então $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$.