Comprimento de Arco, o Número π e as Funções Trigonométricas

J. A. Verderesi

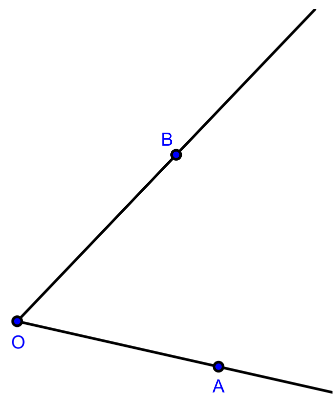
Apresentaremos a seguir a medida de um ângulo como limite de poligonais inscritas e circunscritas à circunfêrencia unitária, seguindo o método de exaustão de Arquimedes. Em seguida, parametrizaremos os ângulos pelo comprimento de arco e utilizaremos esta parametrização para definir as funções trigonométricas.

1 Introdução

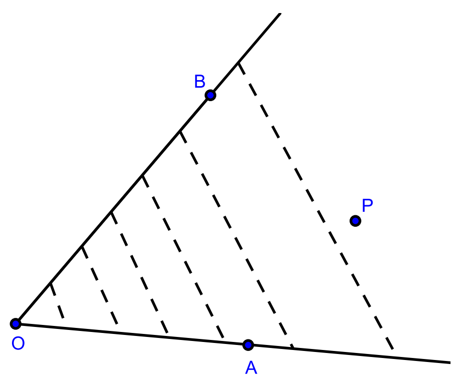
O estudo do cálculo em geral começa por derivadas e as funções trigonométricas, exponeciais e logaritmicas ficam postergadas para o futuro. Assim a variedades de exemplos restringe-se às funções racionais e radicais. Alguns autores para evitar esta restrição apresentam as funções trigonométricas axiomaticamente prometendo para mais tarde as demonstrações dos mesmos. Nestas notas faremos uma exposição das funções trigonométricas pelo método de exaustão de Arquimedes, sem utilizar os resultados convencionais do Cálculo Integral. Acreditamos que o enfoque dado a seguir servirá também como uma motivação da definição de Integral como limites de somas superiores e somas inferiores.

2 Comprimento de Arco

Recordemos que um ângulo é formado por duas semi-retas com uma origem comum. O ângulo $\angle AOB$ é formado pelas semiretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ com origem O.



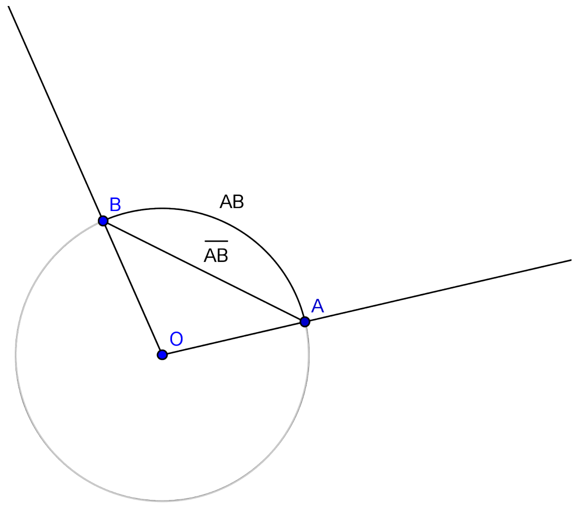
O interior do ângulo $\angle AOB$ é formado dos pontos P que estão no semi-plano determinado pela reta OA que contém B e que também estão no semi-plano determinado por OB que contém A.



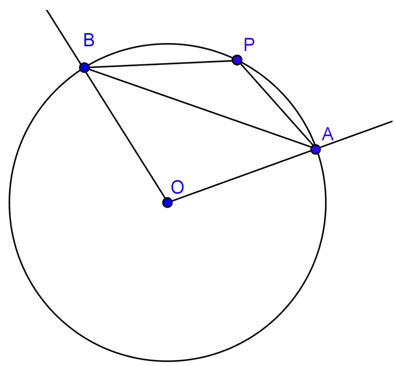
A definição de interior não se aplica ao ângulo raso, formado por duas semiretas de uma mesma reta. Deixaremos este ângulo fora de nossas considerações.

Considere a circunferência unitária com centro O. Tomando-se dois pontos A e B sobre ela teremos:

1. O ângulo $\angle AOB$
2. A corda $\overline{AB}$
3. O arco $\widehat{\mathrm{AB}}$ formado dos pontos que estão sôbre a circunferência e no interior do ângulo.



Seja P um ponto do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Da desigualdade triangular tem-se que $\overline{AB} < \overline{AP} + \overline{PB}$.



Uma *partição* do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ é uma sequência de pontos $\mathbb{P} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ do arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ tal que $P_0 = A$, $P_n = B$ e P_i está no arco $P_{i-1}P_{i+1}$ para todo $i = 1, 2 \ldots n-1$

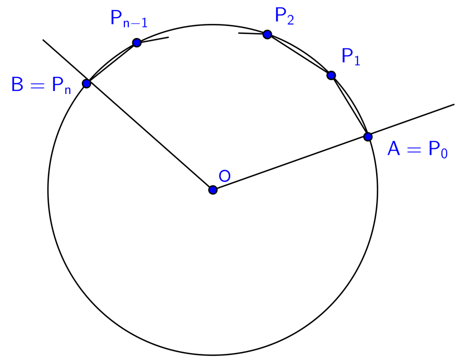
Seja $l(\mathbb{P})$ o comprimento da poligonal $P_0P_1 \ldots P_n$ inscrita no arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, isto é:

$l(\mathbb{P}) = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \ldots + \overline{P_{n-1}P_n}$.

Se acrescentarmos mais um ponto P a esta partição obtemos uma partição $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \cup \{P\}$. Se P está no interior do arco $P_{i-1}P_i$ então temos $\overline{P_{i-1}P_i} < \overline{P_{i-1}P} + \overline{PP_i}$. Portanto $l(\mathbb{P}) < l(\mathbb{Q})$.

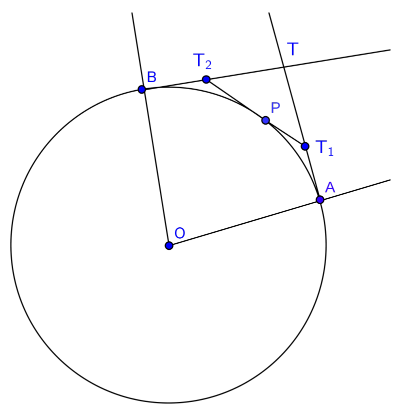
Indutivamente mostra-se que:

$$\mathbb{P} \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow l(\mathbb{P}) \leq l(\mathbb{Q})$$

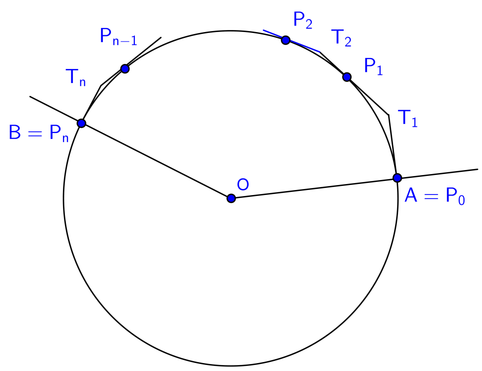


A seguir analisaremos as poligonais circunscritas à circunfêrencia. As tangentes nos pontos A e B encontram-se num ponto T e tem-se $\overline{AT} = \overline{BT}$.

Sendo P um ponto da circunferência no interior do $\angle AOB$, a tangente em P encontra $\overline{AT}$ num ponto T_1 e $\overline{BT}$ num ponto T_2. Da desigualdade triangular temos $\overline{T_1T_2} < \overline{T_1T} + \overline{TT_2}$. Segue que $\overline{AT_1} + \overline{T_1P} + \overline{PT_2} + \overline{T_2B} = \overline{AT_1} + \overline{T_1T_2} + \overline{T_2B} < \overline{AT_1} + \overline{T_1T} + \overline{TT_2} + \overline{T_2B} = \overline{AT} + \overline{BT}$. Resumindo: a poligonal circunscrita $AT_1PT_2B = AT_1T_2B$ tem comprimento menor que a poligonal circunscrita ATB.



Dada a partição $\mathbb{P}$ tracemos as tangentes nos pontos $P_0, P_1, \ldots P_n$. Obtemos uma poligonal circunscrita $P_0T_1P_1T_2P_2 \ldots P_{n-1}T_nP_n$ construida da seguinte forma: a tangente em $P_0 = A$ encontra a tangente em P_1 no ponto T_1, a tangente em P_1 encontra a tangente em P_2 no ponto T_2, em geral a tangente em P_{i-1} encontra a tangente em P_i no ponto T_i. Note que $P_0T_1P_1T_2P_2 \ldots P_{n-1}T_nP_n = P_0T_1T_2 \ldots T_nP_n$.



Seja $L(\mathbb{P})$ o comprimento da poligonal circunscrita:

$$L(\mathbb{P}) = \overline{P_0T_1} + \overline{T_1P_1} + \overline{P_1T_2} \ldots + \overline{P_{n-1}T_n} + \overline{T_nP_n}$$

$$L(\mathbb{P}) = \overline{P_0T_1} + \overline{T_1T_2} + \overline{T_2T_3} \ldots + \overline{T_{n-1}T_n} + \overline{T_nP_n}$$

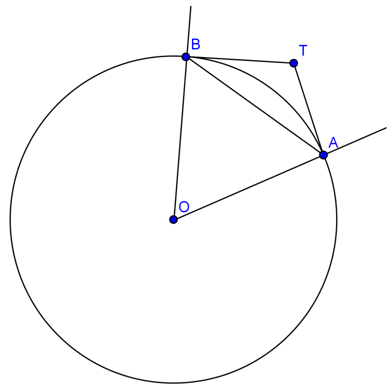
Seja $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \cup \{P\}$. Se P está no interior do arco $P_{i-1}P_i$ a tangente em P_{i-1} encontra a tangente em P num ponto $T_{i,1}$ e a tangente em P encontra a tangente em P_i num ponto $T_{i,2}$.Como vimos anteriormente, a poligonal $P_{i-1}T_iP_i$ tem comprimento maior que a poligonal $P_{i-1}T_{i,1}PT_{i,2}P_i$. De onde concluimos que $L(\mathbb{P}) > L(\mathbb{Q})$.

Por indução temos:

$$\mathbb{P} \subset \mathbb{Q} \Longrightarrow L(\mathbb{P}) \geq L(\mathbb{Q})$$

Comparemos a seguir as poligonais inscritas com as circunscritas. Observando a figura abaixo decorre da desigualdade triangular que $\overline{P_{i-1}P_i} < \overline{P_{i-1}T_i} + \overline{P_iT_i}$. Podemos então concluir que

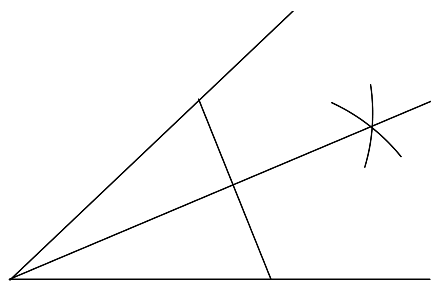
$$l(\mathbb{P}) < L(\mathbb{P}).$$



Seja $l = l(\angle AOB) = \sup l(\mathbb{P})$ e $L = L(\angle AOB) = \inf L(\mathbb{P})$. Claramente tem-se que $l \leq L$.

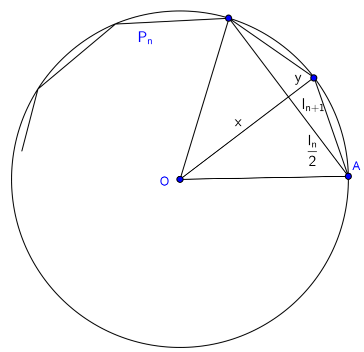
A seguir vamos mostrar que $l = L$.

Um ângulo $\angle AOB$ pode ser dividido ao meio usando régua e compasso.



Iterando o processo obtemos uma partição $\mathbb{P}_n$ com 2^n pontos. Chamaremos esta partição de *Regular*. Ela determina uma poligonal inscrita tal que o comprimento de seus lados são todos iguais a um número l_n. Assim $l(\mathbb{P}_n) = 2^n \cdot l_n$. Comparemos l_n com l_{n+1}.

Seja x e y como na figura abaixo.



Do teorema de Pitágoras temos $x = \sqrt{1 - (\frac{l_n}{2})^2}$ e $y = 1 - \sqrt{1 - (\frac{l_n}{2})^2}$.
Aplicando novamente o teorema de Pitágoras $(l_{n+1})^2 = (\frac{l_n}{2})^2 + y^2$.
De onde concluimos que:

$$l_{n+1}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

.

Assim:

$$l(\mathbb{P}_n) = 2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}}$$

$$l(\mathbb{P}_{n+1}) = 2^{n+1} \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{l(\mathbb{P}_n)}{2^{n+1}}\right)^2}}$$

.

Temos então uma fórmula para calcular $l(\mathbb{P}_{n+1})$ a partir de $l(\mathbb{P}_n)$.
Como $l_{n+1} > \frac{l_n}{2}$ segue que: $l(\mathbb{P}_{n+1}) = 2^{n+1} \cdot l_{n+1} > 2^n \cdot l_n = l(\mathbb{P}_n)$.
Desta forma temos uma sequência crescente:

$$l(\mathbb{P}_2) < l(\mathbb{P}_3) \ldots l(\mathbb{P}_n) < l(\mathbb{P}_{n+1}) \ldots$$

A fórmula $l_{n+1}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$ implica que

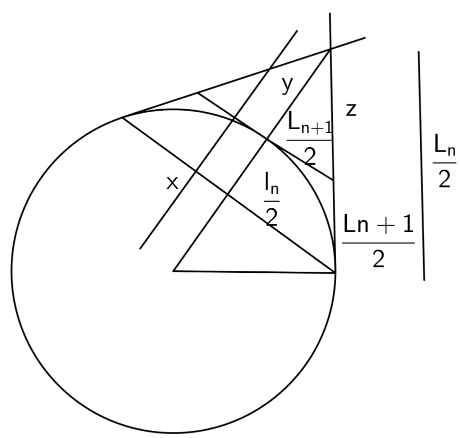
1. $l_n^2 < 2$

2. $l_n^2 = l_{n+1}^2(4 - l_{n+1}^2)$

Decorre que $l_n > l_{n+1}$. Assim (l_n) é uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Tomando-se o limite de ambos os lados obtemos: $l^2 = l^2(4 - l^2)$. Como $l < \sqrt{2}$ tem-se que $l = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 0$$

Consideremos a Poligonal circunscrita determinada pela partição regular. Se L_n é o comprimento de cada um de seus lados então seu perímetro é dado por $L(\mathbb{P}_n) = 2^n \cdot L_n$. Sendo x, y, z como na figura abaixo temos:



$x = \sqrt{1 + (\frac{L_n}{2})^2}$, $y = x - 1 = \sqrt{1 + (\frac{L_n}{2})^2} - 1$, $z^2 = (\frac{L_n}{2})^2 + y^2$. Por outro lado $z = \frac{L_n}{2} - \frac{L_{n+1}}{2}$. Elevando esta última ao quadrado e comparando com a anterior obtemos:

$$L_n \cdot L_{n+1} = 4(\sqrt{1 + (\frac{L_n}{2})^2} - 1)$$

. De onde deduzimos:

$$L(\mathbb{P}_{n+1}) = \frac{2^{n+2}}{L(\mathbb{P}_n)}(\sqrt{1 + \left(\frac{L(\mathbb{P}_n)}{2^{n+1}}\right)^2} - 1)$$

Como $z > \frac{L_{n+1}}{2}$ e $z = \frac{L_n}{2} - \frac{L_{n+1}}{2}$ concluimos que $L_n > 2L_{n+1}$. Obtemos assim uma sequência decrescente:

$$L(\mathbb{P}_2) > L(\mathbb{P}_3) > \ldots > L(\mathbb{P}_n) > L(\mathbb{P}_{n+1}) \ldots$$

Comparemos agora os perímetros inscritos com os circunscritos. Como $l_{n+1} > \dfrac{l_n}{2}$ e $L_{n+1} < \dfrac{L_n}{2}$ então

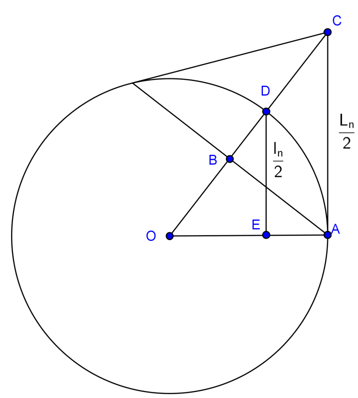
$$L_{n+1} - l_{n+1} < \frac{1}{2}(L_n - l_n)$$

e

$$L(\mathbb{P}_{n+1}) - l(\mathbb{P}_{n+1}) \leq L(\mathbb{P}_n) - l(\mathbb{P}_n)$$

Concluimos que a diferença entre os comprimentos dos polígonos inscritos e circunscritos diminuem com n. Mostremos que ela fica arbitrariamente pequena. Na figura abaixo, como os triângulos $\triangle OED$ e $\triangle OAC$ são semelhantes temos: $\overline{OE} = \dfrac{l_n}{L_n} = \dfrac{1}{\overline{OC}}$ ou

$$\sqrt{1 - (\frac{l_n}{2})^2} = \frac{l_n}{L_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{L_n}{2})^2}}$$



Assim temos que $\frac{l(\mathbb{P}_n)}{L(\mathbb{P}_n)} = \sqrt{1 - (\frac{l_2}{2})^2}$ Como $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l(\mathbb{P}_n)}{L(\mathbb{P}_n)} = 1$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} (L(\mathbb{P}_n) - l(\mathbb{P}_n) = \lim_{n\to\infty} l(\mathbb{P}_n)(\frac{L(\mathbb{P}_n)}{l(\mathbb{P}_n)} - 1)$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} (L(\mathbb{P}_n) - l(\mathbb{P}_n) = 0$$

Disto segue claramente que $l(\angle AOB) = L(\angle AOB)$. Este número será chamado **a medida do ângulo** $\angle AOB$ e escrevemos:

$$\theta(\angle AOB) = l(\angle AOB) = L(\angle AOB)$$

Da definição de comprimento de arco deduz-se facilmente a *Propriedade aditiva de ângulos*:

Se P é um ponto interior do ângulo $\angle AOB$ então,

$$\theta(\angle AOB) = l(\angle AOP) + L(\angle POB)$$

3 O Algoritmo de Arquimedes

Da igualdade:

$$\sqrt{1-(\frac{l_n}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L_n}{2})^2}}$$

vem que:

$$(1-(\frac{l_n}{2})^2)(1+(\frac{L_n}{2})^2) = 1$$

Desenvolvendo obtemos:

$$4(\frac{L_n - l_n}{L_n \cdot l_n}) = \frac{L_n \cdot l_n}{L_n + l_n}$$

Das fórmulas de recorrencias:

$$l_{n+1}^2 = 2 - 2\sqrt{1-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

$$L_n \cdot L_{n+1} = 4(\sqrt{1+\left(\frac{L_n}{2}\right)^2} - 1)$$

e das igualdades:

$$\frac{l_2}{L_2} = \sqrt{1-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

$$\frac{L_2}{l_2} = \sqrt{1+\left(\frac{L_n}{2}\right)^2}$$

deduzimos o **Algoritmo de Arquimedes:**

1. $L(\mathbb{P}_{n+1}) = 2\dfrac{L(\mathbb{P}_n)\cdot l(\mathbb{P}_n)}{L(\mathbb{P}_n)+l(\mathbb{P}_n)}$

2. $L(\mathbb{P}_{n+1}) = \sqrt{L(\mathbb{P}_{n+1})\cdot l(\mathbb{P}_n)}$

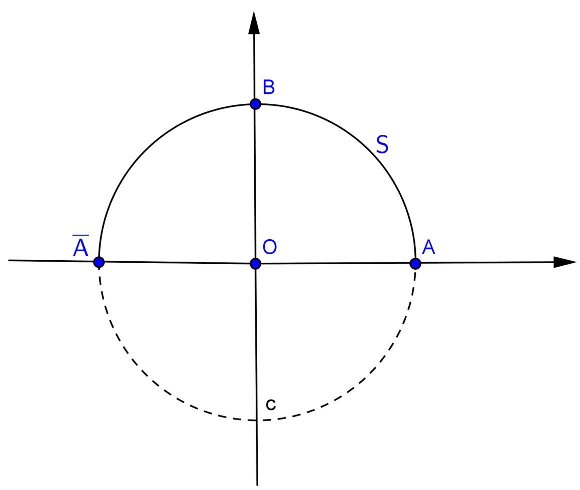
4 Parametrizando os Ângulos

Fixemos um sistemas de coordenadas com centro O. Seja A o ponto cujas coordenadas é $(1,0)$ e P um ponto da circunferência unitária com coordenadas (x,y), então: $x^2+y^2=0$.

Consideraremos no que segue a semi-circunferência S formada dos pontos P tais que $y \geq 0$.

Sendo $\overline{A} = (-1,0)$ o *ângulo raso* $\angle AO\overline{A}$ terá como medida o número:

$$\theta(\angle AO\overline{A}) = l(\angle AOB) + L(\angle BO\overline{A})$$



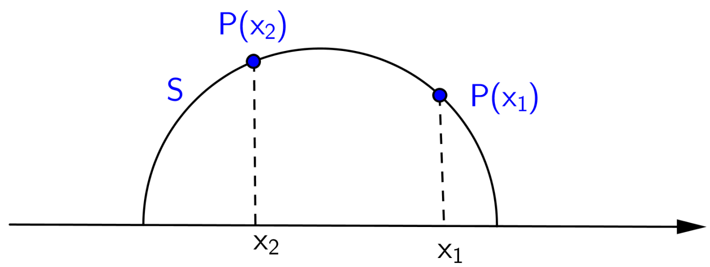
Definimos o número π como:

$$\pi = \theta(\angle AO\overline{A})$$

Se $-1 \leq x \leq 1$ seja $P(x) = (x, \sqrt{1-x^2})$.

Ordenamos os pontos da semicircunfêrencia S colocando:

$$P(x_1) \leq P(x_2) \Longleftrightarrow x_2 \leq x_1$$



Definimos a função

$$\theta : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\theta(x) = \theta(\angle AOP(x))$$

Se $P(x_1) < P(x_2)$ então $P(x_1)$ está no interior do ângulo $\angle AOP(x_2)$, portanto $\theta(\angle AOP(x_1)) < \theta(\angle AOP(x_2))$. Concluimos que a função θ é decrescente:

$$x_1 \leq x_2 \Longrightarrow \theta(x_2) \leq \theta(x_1)$$

Como $\theta(\angle AOP(x_2)) = \theta(\angle AOP(x_1)) + \theta(\angle P(x_1)OP(x_2))$ temos:

$$\theta(\angle P(x_1)OP(x_2)) = \theta(x_2) - \theta(x_1)$$

A seguir vamos mostrar que a função θ é derivavel no intervalo $[-1, 1]$, isto é, que o limite

$$\frac{d\theta}{dx}(c) = \lim_{x \to c} \frac{\theta(x) - \theta(c)}{x - c}$$

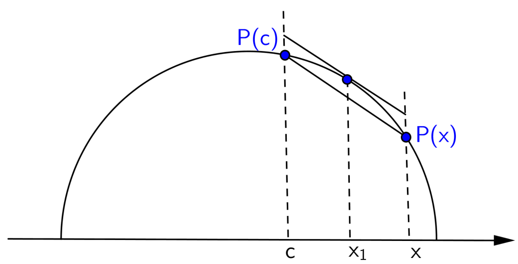
existe.

Como $P(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$ e $P(c) = (c, \sqrt{1 - c^2})$ então:

$$\overline{P(x)P(c)}^2 = (x - 2)^2 + (\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - c^2})^2$$

Pelo Teorema do Valor Médio aplicado à função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, existe x_1 entre c e x tal que:

$$\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - c^2} = \frac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}}(x - c)$$



Substituindo na expressão acima obtemos:

$$|\overline{P(x)P(c)}| = \frac{|x-c|}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

Da definição de comprimento de arco temos:$|\theta(x) - \theta(c)| > \dfrac{|x-c|}{\sqrt{1-x_1^2}}$.

Se $x > c$ então $\theta(c) - \theta(x) > \dfrac{x-c}{\sqrt{1-x_1^2}}$.

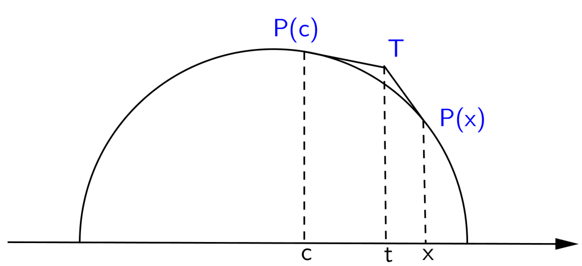
Portanto temos

$$\frac{\theta(c)-\theta(x)}{x-c} \geq \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

Se $x < c$ obtemos á mesma desigualdade. De onde concluimos que:

$$\frac{\theta(x)-\theta(c)}{x-c} \leq \frac{-1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

Comparemos $\dfrac{\theta(x)-\theta(c)}{x-c}$ com a poligonal circunscrita. As tangentes em $P(x)$ e $P(c)$ encontram-se um ponto T cuja primeira coordenada é um número t entre c e x.



Então

$$\overline{P(c)T} = \frac{|t-c|}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\overline{TP(x)} = \frac{|x-c|}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se $x_2 = \max\{c, x\}$ e do fato que t está entre c e x temos:

$$\overline{P(c)T} + \overline{TP(x)} < \frac{|x-c|}{\sqrt{1-x_2^2}}$$

Se $x > c$ então $\theta(c) - \theta(x) < \overline{P(c)T} + \overline{TP(x)} < \frac{|x-c|}{\sqrt{1-x_2^2}}$. Concluimos que:

$$\frac{\theta(c) - \theta(x)}{x-c} < \frac{-1}{\sqrt{1-x_2^2}}$$

Se $x < c$ obtemos a mesma desigualdade.

Em qualquer caso temos:

$$\frac{\theta(x) - \theta(c)}{x-c} > \frac{-1}{\sqrt{1-x_2^2}}$$

Das considerações anteriores segue que:

$$\frac{-1}{\sqrt{1-x_2^2}} < \frac{\theta(x) - \theta(c)}{x-c} < \frac{-1}{\sqrt{1-x_1^2}}$$

onde x_1, x_2 estão entre c e x. Da continuidade da função$f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ segue que:

$$\lim_{x \to c} \frac{\theta(x) - \theta(c)}{x-c} = \frac{-1}{\sqrt{1-c^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dx}(c) = \frac{-1}{\sqrt{1-c^2}}$$

Semelhante a que fizemos se considerarmos os pontos $\overline{P}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2})$ obtemos os pontos da semi-circunferência complementar $\overline{S}$ que completam uma volta da circunferência. Se $\overline{A} = (0, -1)$ definimos

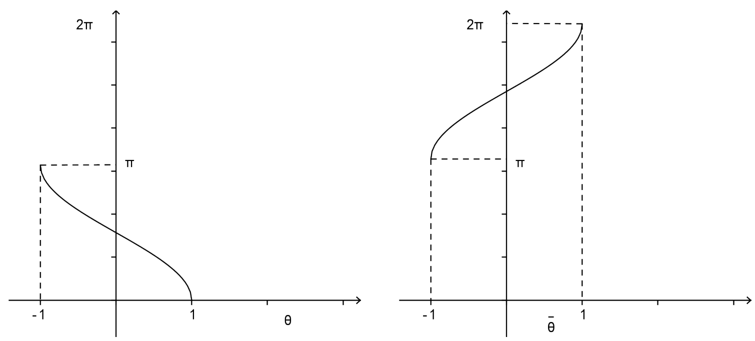
$$\overline{\theta} : [-1, 1] \longrightarrow [\pi, 2\pi]$$

$$\overline{\theta}(x) = \pi + \theta(\angle \overline{A} O \overline{P}(x))$$

Repetindo os argumentos acima mostramos que:

$$\frac{d\overline{\theta}}{dx}(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

Assim se x varia de -1 a 1 a função θ decresce de 0 a π e a função $\overline{\theta}$ cresce de π a 2π. Seus gráficos são mostrados na figura abaixo.



5 As Funções Trigonométricas

Definimos a função *Cosseno* no intervalo $[0, \pi]$ como a inversa da função θ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$ como a inversa da função $\overline{\theta}$. Para $x \in [-1, 1]$

$$\cos(\theta(x)) = x \quad \text{e} \quad \cos(\overline{\theta}(x)) = x$$

Também teremos:

$$\theta(cos(\alpha)) = \alpha \text{ se } \alpha \in [0, \pi]$$

$$\overline{\theta}(cos(\alpha)) = \alpha \text{ se } \alpha \in [\pi, 2\pi]$$

A função *Seno* é definida a partir do *Cosseno*:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \text{ se } \alpha \in [0, \pi]$$

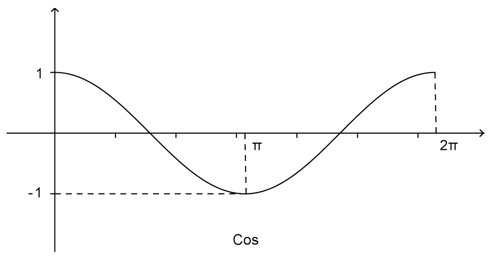
$$\sin(\alpha) = -\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \text{ se } \alpha \in [\pi, 2\pi]$$

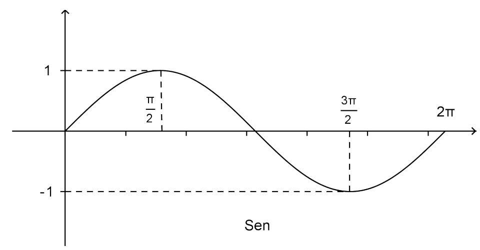
Derivando $\cos(\theta(x)) = x$ e $\cos(\overline{\theta}(x)) = x$ mostramos que

$$\cos'(\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{e} \quad \sin'(\alpha) = \cos(\alpha)$$

para $\alpha \neq 0, \pi, 2\pi$(que correspondem a $x = -1, 1$).Como estas funções são continuas e suas derivadas existem fora destes pontos então as derivadas neles são os limites das derivadas, ou seja as fórmulas continuam válidas.

Os gráficos das funções Cos e Sen são mostrados abaixo:





Estendemos estas funções para todo número real definindo para $2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$,

$\cos(x) = \cos(x - 2k\pi)$ e $\sin(x) = \sin(x - 2k\pi)$ onde k é um número inteiro. Mostra-se que estas são derivaveis em todo o seus domínios.

Sendo $f(x) = \cos(x)$ ou $f(x) = \sin(x)$ então $f'' + f = 0$. Multiplicando por f' obtemos $f'' \cdot f' + f \cdot f' = 0$. Disto segue que:

$$((f')^2 + f^2)' = 0$$

Concluimos que:

$$(f')^2 + f^2 = k$$

onde k é uma constante positiva.

Se $k = 0$ então $f = 0$. Agora $k = f'(0)^2 + f(0)^2$ de onde concluimos que se $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$ então $f = 0$. Verificamos diretamente que se f é uma solução da equação $f'' + f = 0$ então $g(x) = c \cdot f(x)$ e $g(x) = f(x + c)$, onde c é uma constante qualquer, também verificam a mesma equação. Dito de outro modo esta equação é invariante por homotetias e por translações.Temos portanto dois grupos de soluções:

- $f(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$
- $g(x) = \cos(x + c)$ ou $g(x) = \sin(x + c)$

Mostremos que estes dois grupos coincidem. Note que $f(0) = c_1$, $f'(0) = c_2$, $g(0) = \cos(c)$ e $g'(0) = -\sin(c)$. Assim se colocarmos $c_1 = \cos(c)$ e $c_2 = -\sin(c)$ teremos $f(x) = \cos(c)\cos(x) - \sin(c)\sin(x)$. Se $h = g - f$ então $h(0) = 0$ e $h'(0) = 0$. Concluimos que $h = 0$. Disto obtemos as fórmulas de *Adição de ângulos*:

$$\cos(x + c) = \cos(x)\cos(c) - \sin(x)\sin(c)$$

$$\sin(x + c) = \sin(x)\cos(c) + \sin(c)\cos(x)$$