Aula 1: Homotopia

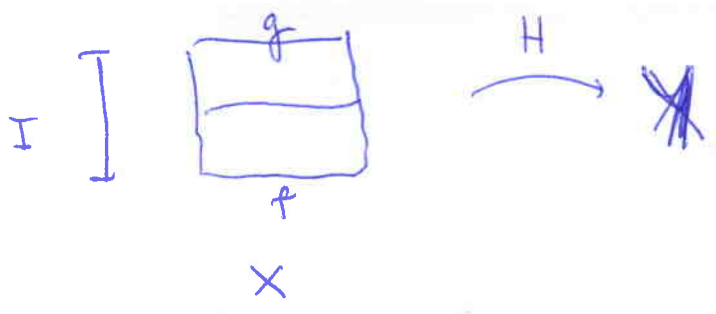
- X, Y espaços topológicos, $I = [0,1]$
- $f, g : X \to Y$ contínua.

Def: Uma homotopia entre $f, g : X \to Y$ é uma função contínua

$$H : X \times I \longrightarrow Y \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \end{cases} \forall x \in X$$

- Dizemos: $f \sim g$ (f homotópico à g) ou

$$f \overset{H}{\Rrightarrow} g \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & Y \end{tikzcd}$$



OBS: • $H(t,-) = H_t : X \to Y$

• $H(x,-) : I \to Y$
$\quad = H_x \qquad H_x(0) = f(x)$, $H_x(1) = g(x)$

* família contínua de funções

para cada x uma curva $H_x : f(x) \curvearrowright g(x)$

Prop: $\sim$ é uma relação de equiv. em $C(X,Y)$

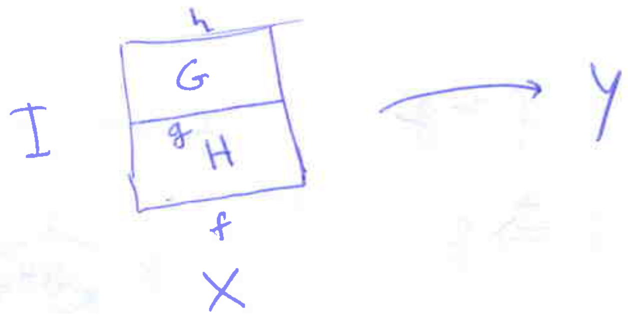
Dem:

(1) $f \sim f$ $\qquad H(x,t) \equiv f(x) \; \forall t$

(2) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ $\qquad \bar{H}(x,t) = H(x,1-t)$

(3) $f \underset{H}{\sim} g$, $g \underset{G}{\sim} h \Rightarrow f \sim h$

$H * G : f \Rightarrow h$ $\qquad H*G\,(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$



Notação: $[X,Y] = C(X,Y)/\sim$

$[f]$ = classe de f

OBS: $C(X,Y)$ é esp. top. com a topologia gerada por

$$N(K,U) = \{ f \in C(X,Y) \mid K \subset X \text{ cpt}, \; U \subset Y \text{ aberto}, \; f(K) \subset U \}$$

Topologia Compacto aberta

Exercício: a) Mostre que se Y é espaço métrico

$$\Rightarrow \{f_n\} \to f \iff f_n\big|_K \to f\big|_K \text{ uniformemente}$$

$\forall K \subset X$ compacto

b) Mostre que se X é compacto

$\Rightarrow C(X,Y)$ é esp. métrico com

$$d(f,g) = \sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$$

• Dada uma homotopia

$$H: X \times I \to Y \Rightarrow \tilde{H} : [0,1] \to C(X,Y)$$
$$\tilde{H}(t) = H_t : X \to Y$$

ou seja

$$f \sim g \Rightarrow \exists \text{ curva } \gamma : I \to C(X,Y) \text{ t.q.}$$
$$\gamma(0) = f, \quad \gamma(1) = g$$

Reciprocamente:

Se X é localmente compacto & Hausdorff

$\Rightarrow$ ($\tilde{H}$ contínua $\Rightarrow$ H contínua) (Exercício)

Conclusão: Se X é razoável

$\Rightarrow [X,Y] = \{$comp. conexas por caminhos de $C(X,Y)\}$

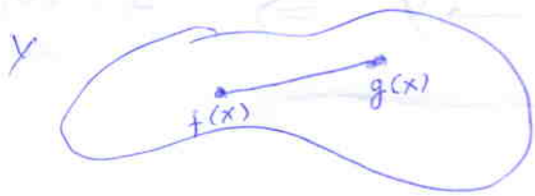
Exemplos:

1) Homotopia linear

Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial, $Y \subset \mathbb{E}$ subesp. top. e $f, g : X \to Y$, t.q. $\underbrace{\overline{f(x)g(x)}}_{\text{segmento de reta}} \subset Y \quad \forall x$

$\Rightarrow f \sim g$ através da homotopia linear

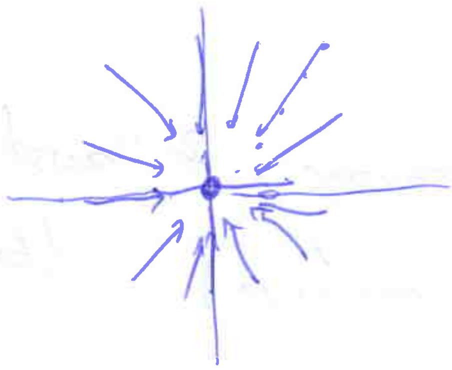
$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$



$\Longrightarrow$

~~Subexemplos~~:

a) $Id_{\mathbb{E}} \sim c_0$ $\qquad H(x,t) = (1-t)x$



b) Se $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{E}$ e $Y = S(\mathbb{E}) = \{x \in \mathbb{E} \mid \|x\| = 1\}$

~~E-des~~ Se $f(x) \neq -g(x) \ \forall x \Rightarrow f \sim g$

$$H(x,t) = \frac{t\,g(x) + (1-t)f(x)}{\|t\,g(x) + (1-t)f(x)\|}$$

Caso particular:

Se $f: S(E) \longrightarrow S(E)$ não tem pontos fixo

i.e., $f(x) \neq x \ \forall x \Rightarrow f \sim A$ onde $A =$ Antípoda

$A(x) = -x$

Exemplo: O espaço ~~campo~~ tangente à esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é

$$T_x S^n = x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, y \rangle = 0\}$$

Um campo de vetores contínuo é

$$V: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{t.q.} \quad v(x) \in T_x S^n$$

i.e., $\langle x, v(x) \rangle = 0 \ \forall x$

Suponha $v \in \mathfrak{X}(S^n)$, $v(x) \neq 0 \ \forall x$

seja $w(x) = \dfrac{v(x)}{\|v(x)\|}$, $w: S^n \longrightarrow S^n$

$$H: S^n \times I \longrightarrow S^n, \quad H(x,t) = x(\cos \pi t) + w(x) \operatorname{sen}(\pi t)$$

$\Rightarrow$ $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = -x$ Homotopia entre Id_{S^n} e A.

Conclusão: Se S^n admite campo $v \in \mathfrak{X}(S^n)$ $v(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow Id_{S^n} \sim A$

OBS: Em $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ $v(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1})$

$v(x) \neq 0$

OBS: Em $S^1 \subset \mathbb{C}$.

$$v(z) = iz$$

OBS: Vamos ver depois que

n par $\Rightarrow$ $Id_{S^n} \not\sim A$ $\Rightarrow$ Não existe campo não nulo.

Exercício: Encontre em $S^3 \subset \mathbb{H}$ (quaternions)

$u, v, w \in \mathfrak{X}(S^3)$, $u(x), v(x), w(x)$ L.I. $\forall x$

- Problema de extensão de funções:

  - $A \subset X$ subespaço fechado
  - $f: A \to Y$ contínua

Pergunta:

$\exists\ F: X \to Y$ cont, $F|_A = f$???

(Lembre de Tietze e Uryson)

Prop: Seja $D^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$, $S^n = \partial D^{n+1}$

$$f: S^n \to Y.$$

Então f admite extensão $F: D^{n+1} \to Y \iff f \sim cte$

Dem:

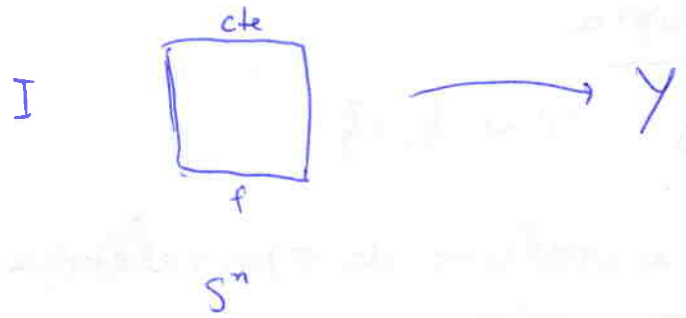
$(\Rightarrow)$ $F: D^{n+1} \longrightarrow Y$ extensão de f

Defina:

$$H: S^n \times I \longrightarrow Y$$

$$H(x,t) = F((1-t)\cdot x) \Rightarrow H(x,1) = F(0) \equiv \text{cte} \quad \forall x$$

$(\Leftarrow)$ Seja $H: S^n \times I \longrightarrow Y$

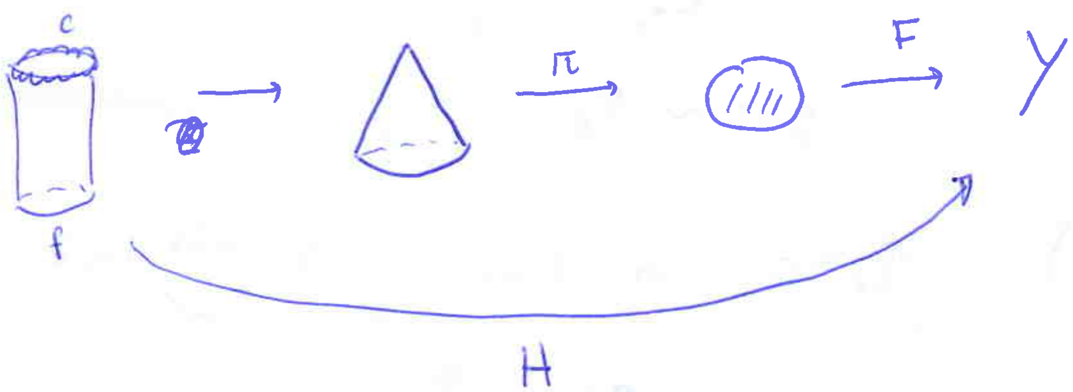


$F: D^{n+1} \longrightarrow Y,$ $F(x,t) = H(x,t)$ se $t \neq 1$

$F(x,1) = c$

$D^{n+1} - \{0\} \cong S^n \times [0,1)$

Ideia:



Def: Homotopia relativa

$f \sim g$ rel A se $H(a,t) = a \quad \forall a \in A \subset X$

Equivalência de Homotopia

Def: Seja $f : X \to Y$ cont

1) f é equivalencia de homotopia se

$\exists\, g : Y \to X$ t.q.

$$\begin{cases} f \circ g \sim \mathbb{1}_Y \\ g \circ f \sim \mathbb{1}_X \end{cases}$$

2) Nesse caso $X \sim Y$, homotopicamente equiv. ou mesmo tipo de homotopia

3) X é contrátil $\iff$ $X \sim \{pt\}$

Exercício: Mostre que $X \sim Y$ é relação de equivalência

Exemplo: 1) X é contrátil $\iff$ $\mathbb{1}_X \sim c_{x_0}$

Dem:

$(\Rightarrow)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & \{p\} \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad g(p) = x_0$$

$\cancel{f \circ g}$ $\underbrace{g \circ f}_{c_{x_0}}(x) = x_0 \quad \forall x$

$g \circ f \sim \mathbb{1}_X$

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{1}_X \sim c_{x_0} \Rightarrow$ tome $\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "c_{x_0}"] & \{x_0\} \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$

$c_{x_0} \circ i = \mathbb{1}_{\{x_0\}}$

$i \circ c_{x_0} \sim \mathbb{1}_X$ (Exercício)

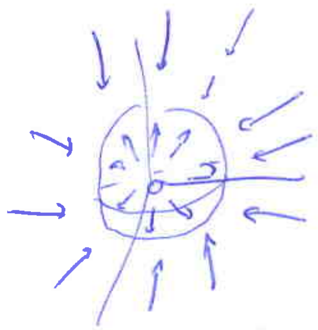
Caso particular:

- Todo espaço vetorial é contrátil

$$H: E \times I \longrightarrow E$$

$$H(x,t) = tx$$

2) $i: S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é equivalência de homotopia



$$r: \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow S^{n-1} \qquad r \circ i = Id_{S^{n-1}}$$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|} \qquad i \circ r \sim \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$$

$$H(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|} \qquad H: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

Caso Particular: Retrato por deformação

Seja $A \subset X$ subespaço

Def: • Uma retração de X em A é

$$r: X \longrightarrow A \quad \text{t.q.} \quad r \circ i = \mathbb{1}_A \quad \left(r|_A = \mathbb{1}_A \right)$$

- Uma retração é um retrato por deformação

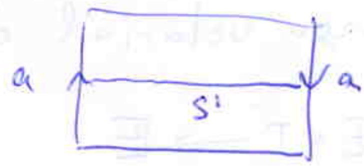
se

$$i \circ r \sim \mathbb{1}_X \ (\text{rel } A)$$

OBS: Neste caso, é mais "geométrico": $H_x: I \longrightarrow X$ descreve curva de x à $H_x(1)$

Exemplos:

1) Faixa de Möbius



$$M = [0,1] \times [0,1] /_{\sim}$$

$$(0, y) \sim (1, 1-y)$$

$M \sim S^1$:

$$i : S^1 \hookrightarrow M$$
$$e^{2\pi i x} \longmapsto [x, 1/2]$$
$$r : M \longrightarrow S^1$$
$$r([x,y]) = e^{2\pi i x} = [x, 1/2]$$

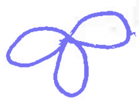
$$\boxed{H([x,y], t) = [x, \tfrac{1}{2}(1-t) + ty]}$$

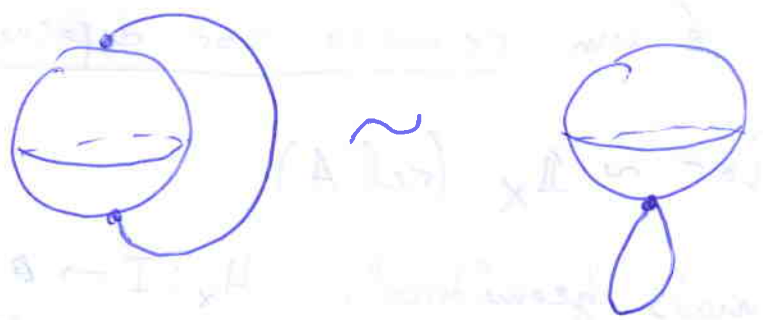
Exercício:

Mostre as seguintes equivalências de Homotopia:

1) $T^2 \setminus \{p\} \sim S^1 \vee S^1 = \infty = S^1 \amalg S^1 /_{\sim}$ $\quad p \sim q$

2) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } x\} \sim$ cilindro $\sim S^1$

3) $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixos } x, y\} \sim$  $= S^1 \vee S^1 \vee S^1$

4) 

Obs

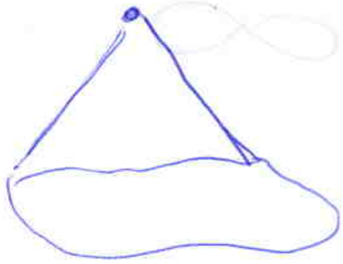
$(X, x_0), (Y, y_0)$

$X \vee Y = X \amalg Y /_{\sim}$

$x_0 \sim y_0$ (e só)

OBS: Pto base $= [x_0] = [y_0]$

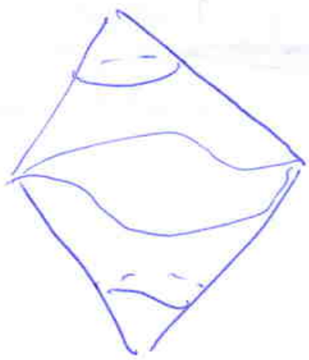
5) $\text{Cone}(X) = X \times I /\sim \qquad (x,1) \sim (x',1) \quad \forall x, x' \in X$



Mostre que $\text{Con}(X)$ é contrátil $(\forall X)$

Def: Suspensão de X (cone duplo)

$$\Sigma X = X \times [-1,1] /\sim \qquad \begin{array}{l} (x,1) \sim (x',1) \\ (x,-1) \sim (x',-1) \end{array} \quad \forall x, x' \in X$$

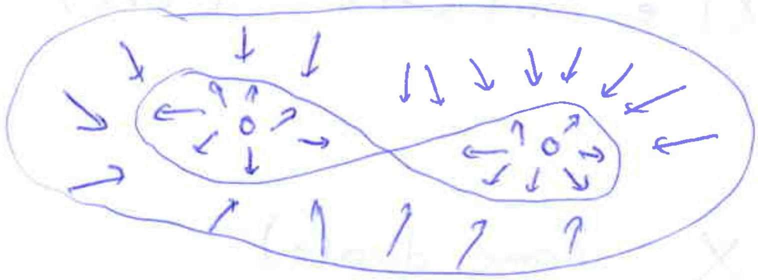


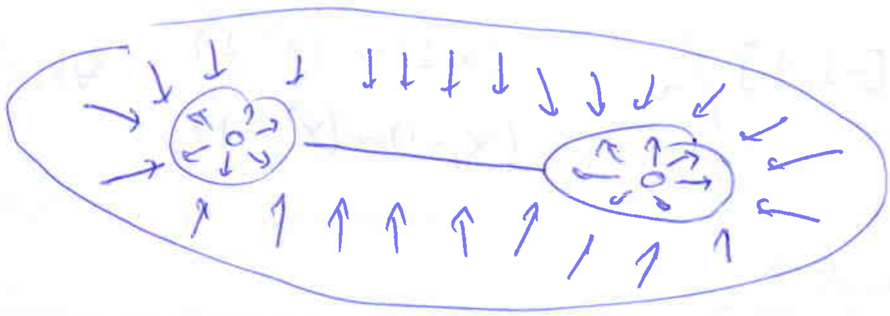
Exercício:

Mostre que $\Sigma S^n \underset{\text{homeo}}{\cong} S^{n+1}$

Objetivo: Mostrar que $X \sim Y \iff \exists Z$ t.q. X & Y são retratos por deformação de Z

Exemplo



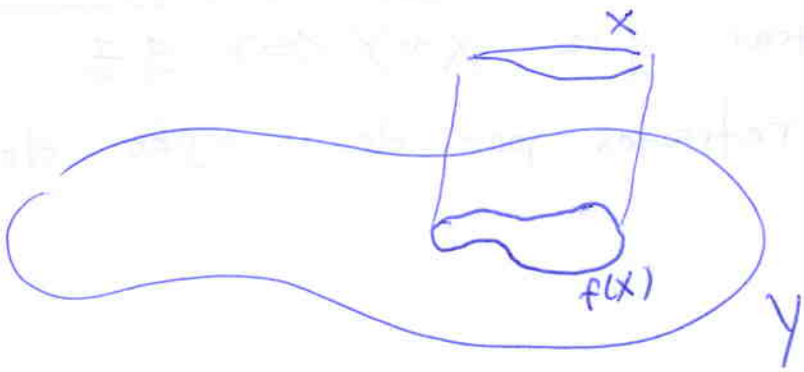


Construção:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$\mathrm{Cil}(f) = C_f = (X \times I) \sqcup Y \big/ \sim$$

$$X \times I \ni (x,1) \sim f(x) \in Y$$



Note que

$$H : C_f \times I \longrightarrow C_f$$

$$\begin{cases} H((x,s),t) = [x, ts + (1-t)] & \forall (x,s) \in X \times I \\ H(y,t) = y & \forall y \in Y \end{cases}$$

é retrato por deformação de C_f em Y.

Exercício: Mostre que se $f: X \to Y$ é equivalência de homotopia

$\Longrightarrow$ X é retrato por deformação de C_f.

Vale a recíproca?

Exercício: Demonstre a classificação homotópica das letras do alfabeto.