Lógica — Verão 2002/3 na Poli

Exercícios sobre Lógica Sentencial (III)

Vimos que $\{\neg, \wedge\}$ é um conjunto completo de conectivos. Portanto, para mostrar que um conjunto de conectivos é completo, basta exibir "abreviações" de $\neg$ e $\wedge$ em função dos conectivos dados, verificando-se que tais abreviações têm as mesmas tabelas-verdade das definições de $\neg$ e $\wedge$.

1) Mostre que $\{\neg, \rightarrow\}$ e $\{\perp, \rightarrow\}$ são completos.

2) Definimos em aula a *função maioria* $(\#\alpha\beta\gamma) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma))$. Mostre que $\{\neg, \#\}$ não é completo, mas $\{\neg, \#, \perp\}$ é.

3) Prove que os únicos conectivos binários completos (individualmente) são $|$ e $\downarrow$.
Sugestão: Verifique que um conectivo binário completo h deve obedecer $h(T, T) = F$, pois em caso contrário $\neg$ não poderia ser definido por h. Calcule analogamente $h(F, F)$.

4) Encontre uma fórmula, contendo apenas os conectivos $\vee, \wedge, \neg$, que realize a função boolena G dada por

$$\begin{array}{ll} G(F,F,F) = T, & G(T,F,F) = T, \\ G(F,F,T) = T, & G(T,F,T) = F, \\ G(F,T,F) = T, & G(T,T,F) = F, \\ G(F,T,T) = F, & G(T,T,T) = F. \end{array}$$

Justifique sua resposta por tabela-verdade. (Exiba os cálculos que o levaram à sua resposta.)

5) Converta $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow ((r \vee s) \wedge p)$ a uma fórmula na forma disjuntiva normal. (Verifique por tabela-verdade, mas siga aproximadamente a receita no teorema 15B do livro-texto, exibindo seus cálculos.)

6) Fixe uma variável proposicional p. Dada uma fórmula ϕ, podemos considerar a fórmula $\phi(\alpha)$ obtida substituindo-se todas as ocorrências de p pela fórmula α.

a) Mostre que $\phi \vDash \phi(\perp) \vee \phi(\top)$.

b) Se p não ocorre em ψ, mostre que $\phi(\perp) \vee \phi(\top) \vDash \psi$.

c) Construa uma fórmula θ, dadas ϕ, ψ, que contenha apenas variáveis proposicionais que ocorram em ambas as fórmulas, de modo que $\phi \vDash \theta \vDash \psi$.