Lógica — Verão 2002/3 na Poli

Exercícios sobre Lógica Sentencial (II)

1) Sendo Σ um conjunto de fórmulas, mostre que $\Sigma \cup \{\alpha\} \vDash \beta \Leftrightarrow \Sigma \vDash (\alpha \to \beta)$.

2) Você está em uma terra habitada por pessoas que sempre dizem a verdade ou sempre mentem. Em uma bifurcação, você quer informar-se sobre qual caminho tomar para chegar à capital, mas o transeunte que você encontra só responderá uma pergunta, do tipo sim-ou-não. Como você deve perguntar para saber qual caminho tomar ? Por quê ?

3) (Dualidade) Seja α uma fórmula que contenha apenas os conectivos $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Seja α^* o resultado de permutar $\wedge$ e $\vee$ e substituir toda variável proposicional p por $(\neg p)$.

Mostre que $\vDash (\neg\alpha) \leftrightarrow \alpha^*$ e tente estender a construção de α^* aos conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$ de modo que se mantenha essa propriedade.

4) Conjuntos Σ, Γ de fórmulas são *equivalentes* se, para toda fórmula α, $\Sigma \vDash \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vDash \alpha$. Σ é *independente* se nenhum membro seu é tautologicamente implicado pelos restantes, isto é, se não há $\phi \in \Sigma$ tal que $\Sigma - \{\phi\} \vDash \phi$. Mostre que

a) Um conjunto finito de fórmulas sempre tem um subconjunto equivalente independente.

b) Dê um exemplo de conjunto infinito que não tem subconjunto próprio equivalente e independente.

5) Reescreva as tautologias da página 37 seguindo as convenções da página 43 do livro-texto para minimizar o número de parênteses. (Escreva as fórmulas originais ao lado !)

6) a) Suponha que não se escrevam parênteses à direita. Por exemplo, $((p \wedge (\neg q)) \to (r \vee s))$ seria escrita como $((p \wedge (\neg q \to (r \wedge s$. Mostre que não surgem ambigüidades, isto é, a "leitura" continua única. (Observe que o número de parênteses é o mesmo de conectivos lógicos.)

b) O que acontece se não escrevermos os parênteses à esquerda ? (Nosso exemplo ficaria $p \wedge \neg q)) \to r \vee s))$.)

7) Vimos um algoritmo para construir a árvore de uma fórmula bem-formada "de cima para baixo", ou seja, da raiz para as folhas. Aplique esse algoritmo à fórmula $((p \wedge q) \vee (\neg r))$.

Descreva com detalhes um algoritmo que faça tal análise de baixo para cima (das folhas para a raiz), começando pelos parênteses mais internos. Aplique seu algoritmo à mesma fórmula acima.

8) Na Notação Polonesa Reversa (das calculadoras Hewlett-Packard), a fórmula $((p \wedge q) \vee (\neg r))$ é escrita $p\,q \wedge r \neg \vee$. Descreva um algoritmo para traduzir notação infixa em polonesa reversa e outro para o trabalho inverso (inserindo os devidos parênteses). Assuma que as pilhas dos algoritmos (análogas à das calculadoras), se houver, são infinitas (não há "stack overflow") e também que as entradas já são fórmulas bem-formadas. Prove por indução nas fórmulas que seus algoritmos funcionam.