Lógica — Verão de 2002/3 na Poli

Exercícios sobre Lógica Sentencial (I)

Consideraremos as fórmulas bem-formadas (ou, simplesmente, *fórmulas*) segundo a definição do livro-texto, com todos os parênteses inseridos.

1) O que é uma linguagem formal ? Por que português ou inglês não são linguagens formais ? (Neste exercício, não é preciso ser formal.)

2) Decida se cada dessas fórmulas está bem formada sobre as variáveis p, q. Justifique.

a) $p \wedge (q \vee q$

b) $\rightarrow p \wedge \wedge$

c) $(p \rightarrow q)$

d) $((p \vee q) \wedge (\neg q))$

e) $((\neg q) \wedge (\neg \leftrightarrow q))$

3) A *linguagem dos parênteses bem-formados* pode ser definida a partir das fórmulas bem-formadas: uma expressão constituída apenas de parênteses ")" e "(" é bem-formada se, e somente se, é o resultado de remover todas as variáveis proposicionais e conectivos lógicos de uma fórmula bem-formada.

Mostre que essa linguagem constitui-se de todas as seqüências w de parênteses em que o número de parênteses à esquerda é igual ao de parênteses à direita — em símbolos, $|w|_(= |w|_)$ — e que, para todo prefixo v de w, $|v|_(\geqslant |v|_)$. Proceda, por exemplo, por indução no comprimento das seqüências de parênteses.

3) Existem fórmulas bem-formadas infinitas ? Se você justificar que a definição do livro-texto permite isso, apresente uma nova definição de fórmulas, que considere apenas fórmulas finitas, tão próxima da original quanto possível. Pode-se fazer demonstrações por indução em sua definição (ou na original) ? Justifique.

4) Mostre que não há fórmulas bem-formadas de comprimento 2, 3 ou 6, mas que há fórmulas de todos os outros comprimentos $\geqslant 1$. (Não esqueça os parênteses.)

5) Se α é uma fórmula, c o número de ocorrências de conectivos lógicos binários (isto é, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) e p o número de ocorrências de variáveis proposicionais, mostre que $p = c + 1$.