Lógica — Verão 2002/3 na Poli

Exercícios sobre Conjuntos, Relações e Funções

1) Se U é um conjunto e $B = \{x \in U \mid x \notin x\}$, mostre que $B \subseteq U$ e $B \notin U$. Use isso para mostrar que não existe o conjunto de todos os conjuntos.

2) Por definição, $\emptyset$ é um conjunto que não contém nenhum elemento. Assuma que $\emptyset$ existe e mostre que é o único com essa propriedade.

3) Se U é um conjunto, mostre que $\subseteq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{P}(U)$, o conjunto das partes de U. Comece relembrando qual é a definição de $\subseteq$ e $=$ de conjuntos.

4) Quem são $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant x \leqslant n\}$ e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$? Justifique rigorosamente suas respostas.

5) Define-se *par ordenado* $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Mostre que $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c$ e $b = d$.

6) Se X_i, $i \in I$, são conjuntos, defina $\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i$ para cada $i \in I\}$. Se $I = \{1, \ldots, n\}$ é finito, construa uma bijeção natural entre $\prod_{i \in I} X_i$ e $X_1 \times \ldots \times X_n$.

7) O que é uma relação n-ária sobre um conjunto X ? Defina, a partir desse conceito, uma função de um conjunto A a um conjunto B e suas imagens diretas / inversas de subconjuntos de A / B. Defina também o que é uma função n-ária.

8) Se X_i, $i \in I$, e U são conjuntos e $f_i : X_i \to U$ funções tais que $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in X_i \cap X_j$, $i, j \in I$, defina rigorosamente uma função $f : \bigcup_{i \in I} X_i \to U$ que coincida com f_i em cada X_i.

9) Dado um conjunto X, construa uma bijeção entre $\mathcal{P}(X)$ e o conjunto das funções de X a $\{0, 1\}$.

10) Mostre, por indução, que dois conjuntos finitos têm mesma cardinalidade se, e somente se, têm o mesmo número de elementos. O conjunto $\mathbb{N}$ é finito ?

11) (Schröder-Bernstein) Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ injeções. Mostre que existe uma bijeção $h : A \to B$.

Sugestão: Defina $S_0 = A - g[B]$ e $S_{n+1} = g[f[S_n]]$ para todo $n \geqslant 0$. Sejam $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ e $X = f[S]$. Prove que $g[B - X] = A - S$ e não se esqueça de concluir o exercício.

12) Considere $\mathbb{Z}$ com a operação de soma e $\mathbb{Q}^*$ com a operação de produto. Mostre que $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(n) = 2^n$, é injetora, não é sobrejetora e mapeia essa estrutura de $\mathbb{N}$ na de $\mathbb{Q}^*$, isto é, $f(n + m) = f(n).f(m)$. A partir apenas dessa última propriedade, mostre que $f(0) = 1$ e $f(-n) = 1/f(n)$. (Consideramos aqui um *homomorfismo injetor* de *grupos*.)

13) Mostre que $\mathbb{R}$ tem a mesma cardinalidade que $]0, 1[$ — em símbolos, $\text{card}\mathbb{R} = \text{card}]0, 1[$. Tente também para $[0, 1[$ e $[0, 1]$. (Aqui basta dar uma idéia intuitiva, desde que correta, mas tente ser rigoroso.)

14) Se n é finito, mostre que $]0,1[^n$ tem a mesma cardinalidade de $]0,1[$ e que $\text{card}\mathbb{R}^n = \text{card}\mathbb{R}$.

15) Mostre que $\text{card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \text{card}\mathbb{R}$.

16) Construa uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (Novamente, basta uma idéia intuitiva e correta, mas tente ser rigoroso.)

17) O que é uma seqüência sobre um conjunto X ? Construa uma bijeção natural entre o conjunto $X^\star$ das seqüências finitas em X e $\bigcup_{n\in N} X^n$. Use essa bijeção para definir concatenação de seqüências. * é a chamada *estrela de Kleene*.

18) Suponha Σ um conjunto qualquer, chamado *alfabeto*. Se $A, B \subseteq \Sigma^\star$, mostre que $(A \cup B)^\star = A^\star(BA^\star)^\star$, onde $CD = \{cd \mid c \in C,\ d \in D\}$.

19) Se $A, B \subseteq \Sigma^\star$, que se pode dizer sobre conjuntos $X \subseteq \Sigma^\star$ tais que $X = AX \cup B$?

a) Mostre que $A^\star B \subseteq X$.

b) Mostre que $A^\star B$ é solução da equação, isto é, $X = A^\star B \Rightarrow X = AX \cup B$.

c) Se A não contém a seqüência vazia λ, mostre que a única solução possível é $A^\star B$. (O item a) ajuda.)