O TEOREMA DE PITÁGORAS E AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO COM MATERIAL EMBORRACHADO

Rita de Cássia Pavani LAMAS[1]
Juliana MAURI[2]

Resumo: Modelos concretos no ensino fundamental, em particular, no ensino da geometria, pode ser considerado um recurso didático para o professor, capaz de desenvolver nos alunos a capacidade de visualização e compreensão das propriedades fundamentais dessa área da matemática, que em geral, os alunos apresentam muita dificuldade. Este artigo apresenta um modelo concreto com material emborrachado (EVA), para mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e modelos análogos a este que mostram as relações métricas no triângulo retângulo.

Palavras–chave: relações métricas; Teorema de Pitágoras; modelo concreto.

1. HISTÓRICO

Um dos objetivos do projeto "Geometria Concreta no Ensino Fundamental", do Núcleo de Ensino, realizado em 2004, na "Escola Estadual Profa. Maria de Lourdes de Camargo", com o auxílio financeiro da FUNDUNESP, era a construção e a utilização de modelos concretos no ensino de geometria nas oitavas séries.

No conteúdo a ser desenvolvido constava o tópico: Relações Métricas no Triângulo Retângulo, mas as referências bibliográficas não apresentavam modelos concretos que pudessem ser utilizados no projeto, para mostrar experimentalmente todas as relações. No entanto, foram encontrados diferentes modelos para provar o Teorema de Pitágoras: "O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos" e um modelo para mostrar a relação métrica particular: "Em um triângulo retângulo, o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos". Este último foi apresentado na "I Bienal da SBM em Belo Horizonte, Minas Gerais, em 2002", pela Profa. Sonia Ferreira da Universidade Federal da Bahia. Tais modelos foram construídos com material emborrachado (EVA), para facilitar o manuseio das peças, e estão descritos nas atividades 1 e 2, respectivamente. O modelo do Teorema de Pitágoras, foi baseado em [3] e [7]. Surgiu então o interesse em mostrar experimentalmente as demais relações métricas utilizando também material emborrachado. Para isso, além de utilizar parte do modelo de Pitágoras aqui descrito, foi necessária a construção de quadrados e retângulos tomando como lados as projeções dos catetos (m e n) e a altura relativa à hipotenusa (h) do triângulo retângulo considerado na figura 1.

[1]Professora Doutora do Departamento de Matemática – Disciplina: Geometria Euclidiana e Cálculo Diferencial e Integral I (Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – UNESP – São José do Rio Preto); coordenadora do projeto.
[2] [2]Aluna bolsista do terceiro ano do Curso de Matemática.

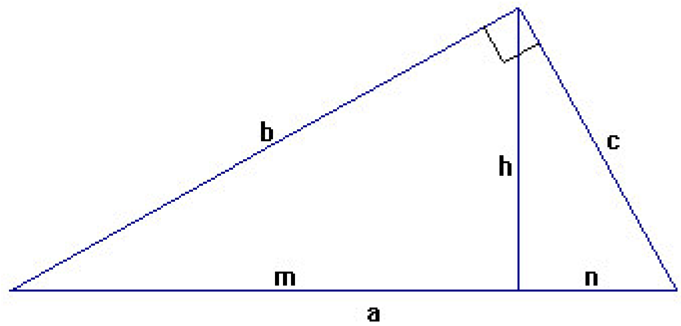


Figura 1

Inicialmente, será apresentada a construção das figuras geométricas que serão necessárias para a obtenção dos modelos apresentados nas atividades de 1 a 5. Esta construção envolveu o conceito de congruência de triângulos. As atividades de 1 a 5 consistem em mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, utilizando o conceito de área das figuras geométricas obtidas.

2. Desenvolvimento

2.1 Materiais utilizados

- EVA (3 cores diferentes)
- Tesoura
- Caneta Hidrocor
- Cola
- Régua

2.2. Construção de figuras

1º . Com uma única cor de EVA, foram construídos quatro triângulos retângulos congruentes ao considerado na figura 1, de catetos b, c e hipotenusa a. Dois deles foram recortados na altura relativa à hipotenusa, formando outros quatro triângulos retângulos. As projeções de b e c foram nomeadas por m e n, respectivamente, e a altura de h, como mostra a figura 2.

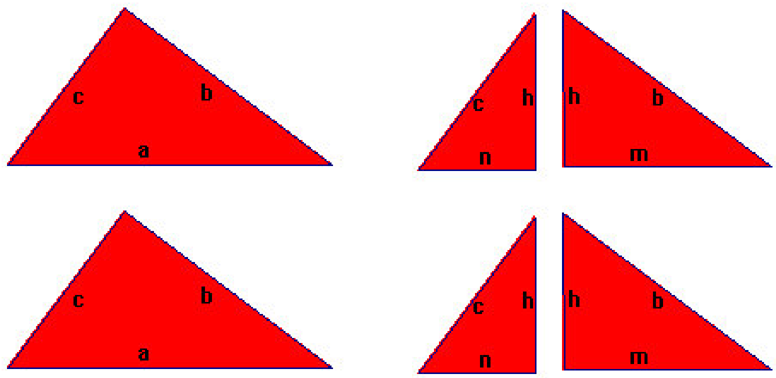


Figura 2

Foram utilizadas, em particular, as medidas: a = 15 cm, b = 12 cm, c = 9 cm, m = 9,6 cm, n = 5,4 cm, h = 7,2 cm. Observamos que em sala de aula é importante a utilização de medidas distintas entre os alunos, visando ter uma amostra razoável de modelos distintos satisfazendo a mesma propriedade matemática.

2º . Utilizando uma outra cor de EVA, foram construídos 5 quadrados de lados: a, b, c, h e m (Fig. 3).

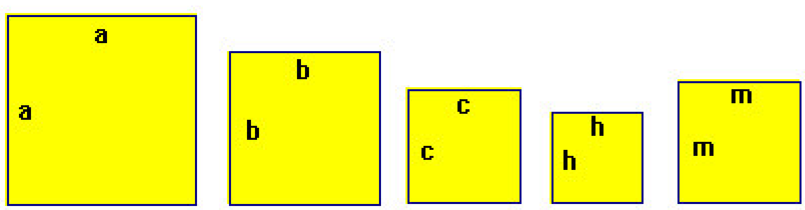


Figura 3

3º . Com uma terceira cor de EVA, foram construídos 3 retângulos de lados: a e m, a e n, m e n (Fig. 4).

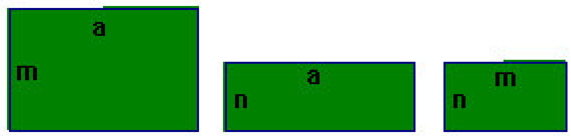


Figura 4

4º . Para finalizar, foi construída uma base quadrangular (Fig. 5) com área $(b+c)^2$ cm^2 para auxiliar nas demonstrações, da seguinte maneira: com EVA de qualquer cor foi construído um quadrado de lado (b+c+2) cm. Recortou-se quatro retângulos, sendo dois de tamanho (a+b+2) cm x 1 cm e dois (a+b) cm x 1 cm, que foram colocados nas bordas laterais, superior e inferior do quadrado de lado (b+c+2) cm, respectivamente.

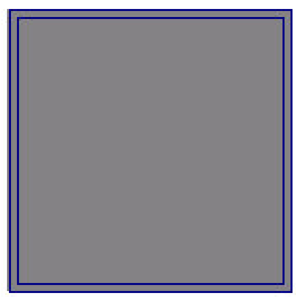


Figura 5

Para mostrar experimentalmente o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no triângulo retângulo, os modelos propostos construídos com material emborrachado (EVA), estão apresentados nas atividades a seguir. A notação utilizada considera o triângulo retângulo da figura 1.

2.3 Atividades Experimentais

ATIVIDADE 1

Objetivo: Mostrar o Teorema de Pitágoras: O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Solução:

1. O quadrado de lado a (Fig. 3) e todos os triângulos construídos (Fig. 2), são posicionados na base construída de lado (a+b) (Fig.5), como mostra a figura 6.

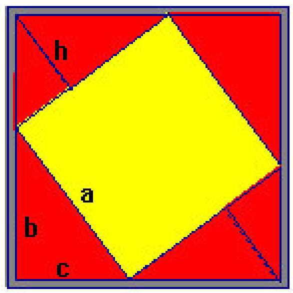
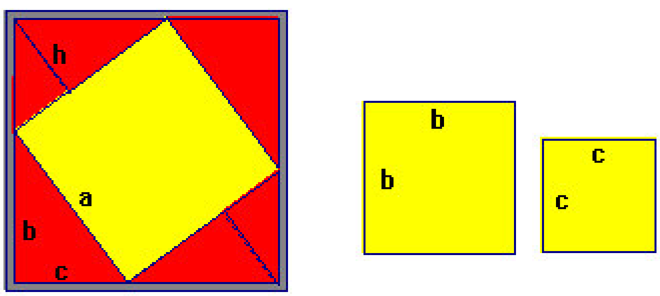


Figura 6

Consideremos o modelo de Pitágoras:



2. O quadrado de lado a é substituído pelos quadrados de lados b e c, e os triângulos posicionados, como mostra a figura 7. Logo, a área do quadrado de lado a é igual a soma das áreas dos quadrados de lado b e c, ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

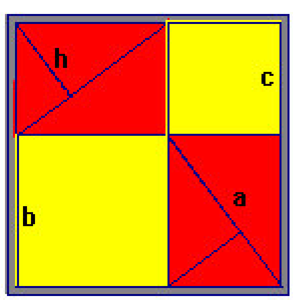


Figura 7

ATIVIDADE 2

Objetivo: Mostrar que em um triângulo retângulo o produto da hipotenusa pela altura relativa a esta é igual ao produto dos catetos, ou seja, a.h = b.c .

Solução:

1. Unindo as hipotenusas dos dois triângulos congruentes construídos sendo um deles o que está dividido em outros dois na altura relativa à hipotenusa (Fig. 8), obtém-se um retângulo cuja área é dada pelo produto dos catetos b e c (Fig. 9).

A figura 9 é o próprio modelo utilizado para provar a relação pedida. Vejamos.

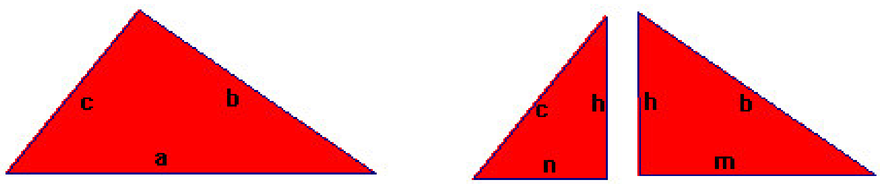


Figura 8

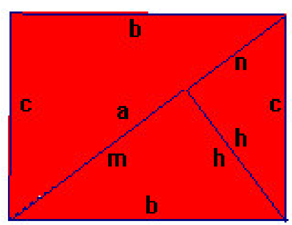


Figura 9

2. Os triângulos da figura 9 são então posicionados de forma que os catetos b e c coincidam, para formar um novo retângulo de área ah (Fig. 10).

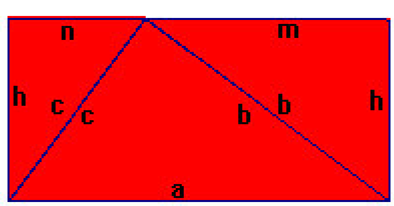


Figura 10

As áreas de figuras distintas formadas por triângulos congruentes são iguais. Logo, de 1. e 2.

b.c = a.h.

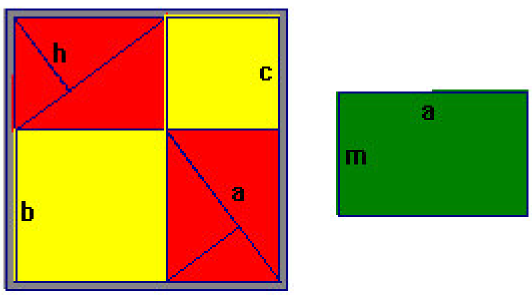
Para o nosso conhecimento os livros didáticos utilizam semelhança de triângulos para mostrar as relações métricas (GIOVANNI & GIOVANNI Jr, 1996) descritas nas atividades de 3 a 5 a seguir, não apresentando os modelos concretos aqui descritos. As atividades experimentais para mostrar essas relações são análogas à apresentada na atividade 1, e utiliza parte do modelo desta.

<u>*ATIVIDADE 3*</u>

Objetivo: Provar que no triângulo retângulo, $b^2 = a.m.$

Solução:

Consideremos o modelo:



1. O quadrado de lado b da base é substituído pelo retângulo de lados a e m, o quadrado de lado c e os triângulos são posicionados, como mostra a figura 11. Logo, o quadrado de lado b ocupa a mesma área que o retângulo de lados a e m, ou seja,

$$b^2 = a.m.$$

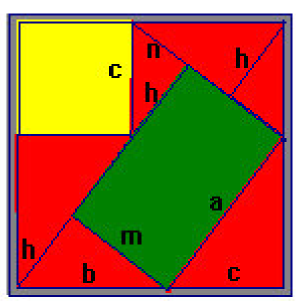


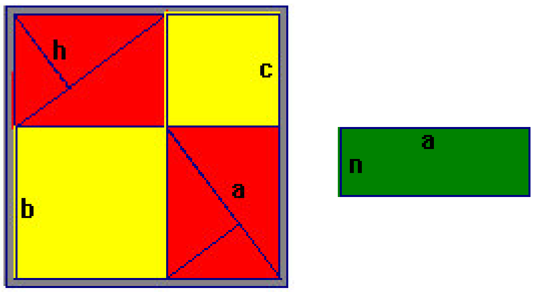
Figura 11

ATIVIDADE 4

Objetivo: Mostrar que no triângulo retângulo, $c^2 = a.n$.

Solução:

Consideremos o modelo:



1. O quadrado de lado c da base foi substituído pelo retângulo de lados a e n, o quadrado de lado b e os triângulos na base foram posicionados como mostra a figura 12. Logo, o quadrado de lado c ocupa a mesma área que o retângulo de lados a e n, ou seja,

$$c^2 = a.n.$$

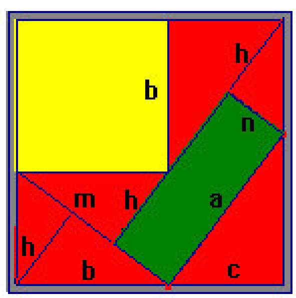


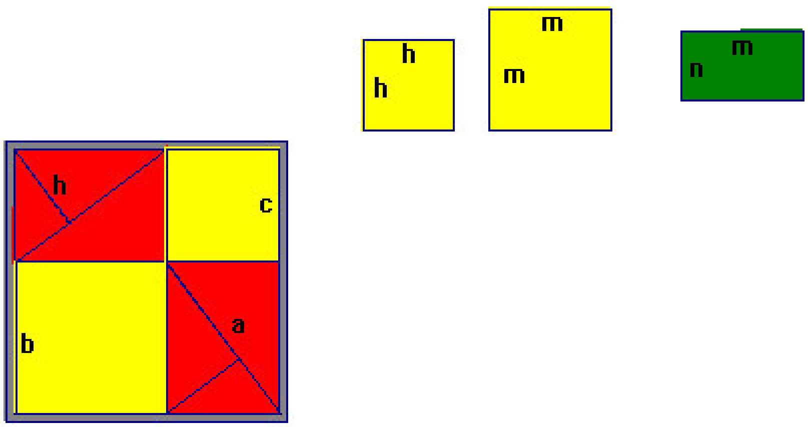
Figura 12

ATIVIDADE 5

Objetivo: Mostrar que no triângulo retângulo, $h^2 = m.n$.

Solução:

Consideremos o modelo:



1. Considerando o triângulo retângulo de catetos m e h e hipotenusa b (Fig. 2), pela atividade 1, é possível substituir inicialmente, o quadrado de lado b da base pelos quadrados de lados h e m (Fig.13)

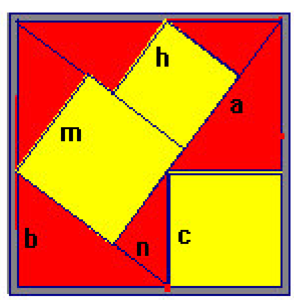


Figura 13

2. Substituindo então o quadrado de lado h pelo retângulo de lados m e n, e posicionando os demais triângulos e quadrados na base (Fig. 14), verifica-se que o quadrado de lado h, ocupa a mesma área que o retângulo de lados m e n. Logo,

$$h^2 = m.n.$$

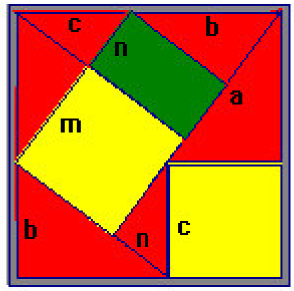


Figura 14

3. CONCLUSÕES

As propriedades matemáticas podem ser verificadas analiticamente ou experimentalmente. Neste trabalho foram desenvolvidas particularmente atividades experimentais para mostrar o Teorema de Pitágoras e as Relações Métricas no Triângulo Retângulo, utilizando modelos concretos construídos com material emborrachado (EVA). Estes modelos podem ser considerados materiais didáticos, que visam facilitar a visualização e o entendimento das propriedades geométricas. Caso tenha necessidade de diminuir o custo do modelo, em virtude da situação econômica dos alunos, sugerimos substituir o EVA pelo papel cartão.

Durante o ano de 2004, a Professora Luzia Silveira do Carmo auxiliada pelos estagiários Juliana Mauri e Paulo Henrique Galão, orientados pela Profa. Dra. Rita de Cássia Pavani Lamas, do Departamento de Matemática da UNESP de São José do Rio Preto, utilizaram modelos desta natureza com os alunos das oitavas séries da “Escola Estadual Profa. Maria de Lourdes de Camargo”, durante as aulas de geometria, despertando nos alunos um grande interesse pelos conteúdos envolvidos, dando oportunidades de cada um desenvolver o seu próprio raciocínio e conhecimento. O manuseio com os modelos concretos levaram os alunos a entenderem de forma natural as propriedades e teoremas mediante questionamentos e curiosidades.

Uma sugestão para o professor leitor é que ele construa com os alunos os modelos aqui apresentados, através de atividades propostas que permitirão ao professor explorar os conceitos de congruência de triângulos, triângulos retângulos e área, além de levar o próprio aluno a concluir os Teoremas ou propriedades que o professor está querendo apresentar.

Caso o leitor tenha interesse pelos modelos em EVA apresentados neste trabalho, entrar em contato pelo e-mail: rita@ibilce.unesp.br ou jumauri@terra.com.br .

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BARBOSA, J. L. M.. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[2] BIGODE, A. J. L.. *Matemática Hoje é Feita Assim*. Guarulhos, FTD, 2002.

[3] GIOVANNI & GIOVANNI, Jr. Coleção: *Matemática pensar e descobrir*. São Paulo, FTD,1996.

[4] IMENES, JAKUBO e LELLIS. *Para que Serve a Matemática – Semelhança*, Atual, 1992.

[5] LINDQUIST, M.M. *Aprendendo e ensinando Geometria*, Atual, 1998.

[6] MACHADO, N. J. *Semelhança não é mera coincidência*, Scipione, 2000.

[7] Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. *Experiências Matemáticas* – 8ª Série – São Paulo, 1998.

[8] Secretaria de Estado da Educação – São Paulo. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta Curricular para o Ensino de Matemática. São Paulo: SE/CENP, 1988.