POLIMINÓS

Aparecida Francisco da Silva /IBILCE
Hélia Matiko Yano Kodama /IBILCE

S. W. Golomb em seu artigo Checker boards and polyminoes publicado no American Mathematical Monthy de 1954, propôs uma série de problemas envolvendo recobrimento de tabuleiros de xadrez com peças que denominou "poliminós". Para as figuras "compostas" de 5 quadrados, os chamados pentaminós (nome do jogo como é comercialmente conhecido) propôs algumas questões que foram retomadas por M. Gardner em seu livro "Divertimentos Matemáticos"; no qual apresenta também algumas soluções não só para os problemas inicialmente propostos mas, também, uma coletânea de trabalhos publicados a partir da proposta de Golomb.

Neste artigo, apresentamos algumas soluções já obtidas para os problemas e algumas, que pelo menos até onde conhecemos, ainda não foram publicadas.

INTRODUÇÃO - No presente artigo apresentamos uma proposta de utilização do jogo "pentaminó" (quebra cabeça geométrico) no ensino da matemática, da forma como foi desenvolvido no projeto "A implementação de alternativas para o ensino de Matemática no nível fundamental".

Em nosso trabalho, propusemos atividades que contemplam as diversas fases que a utilização de jogos dessa natureza deve considerar, de acordo com a literatura a respeito. Essas fases são:

- exploração do material
- a aprendizagem de regras
- a construção de estratégias
- a resolução de situações problemas.

Na primeira parte apresentamos uma série de propostas de atividades, divididas por assunto, mas cuja ordem de aplicação dependeu da turma e dos questionamentos feitos.

Na segunda, com intuito de incentivar e facilitar o uso deste jogo pelos leitores, apresentamos respostas para algumas das atividades propostas.

O trabalho foi desenvolvido em conjunto com as alunas: Alcione Ribeiro de Oliveira, Carla Fernanda Pissini, Cristiane Aparecida Risso, Danielle de Souza Antoniazzi, Denise Helena Nunes Brandão, Fabiana Felícia Maria Laura, Gisele da Silva Pires, Luciana Cristina Tonello, Maisa Aparecida Siqueira Rodrigues, Marcela Lopes de Santana, e apresentado pelas bolsistas* Monique Carvalho Ramos e Monique Ponce Grecco no 29º Colóquio de Incentivo à Pesquisa, realizado no IBILCE/UNESP, com resumo publicado nos anais ([1]).

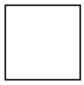
* bolsistas do núcleo de ensino UNESP.

I – Atividades Propostas

I A – Obtendo todas as formas com um número fixo de peças

Material utilizado:

- quadrados de madeira (4 cm aproximadamente) conforme ilustração abaixo:



- folhas de papel sulfite;
- folhas de papel quadriculado;
- lápis.

- **Atividades Propostas:**

  - Construir figuras quaisquer utilizando os "*monominós*";
  - Reproduzir as figuras em papel sulfite e posteriormente no papel quadriculado;
  - Contar quantas peças foram usadas nas figuras;
  - Tabelar os resultados obtidos e montar um gráfico de barras, registrando quantas peças, cada aluno ou grupo utilizou;
  - Explorar o significado do gráfico;
  - Construir figuras utilizando 2 quadrados;
  - Copiar o resultado na folha de papel sulfite;
  - Repetir o processo para 3, 4, 5 ou mais quadrados;
  - Colocar a regra: ***ter um lado em comum;***
  - Utilizando a regra, formar figuras com duas, três, quatro, cinco ou mais peças;

I B – Explorando as formas

- **Atividades Propostas:**

1) *Duplicando as peças do tetraminó e do pentaminó* (duplicação entendida como duplicação do lado da figura)

1A) Utilizando uma peça:

a) Analisar a duplicação de cada peça;
b) Discussão de alguma impossibilidade;
c) Verificar se existe alguma relação entre a área da peça e a da figura formada na sua duplicação;

1B) Utilizando duas ou mais peças:

a) Montar uma figura usando duas peças;
b) Duplicar a figura obtida. Discutir quando é possível ou não;
c) Verificar a relação existente entre as áreas das figuras;
d) Repetir o processo anterior para figuras compostas por 3 peças;

2) *Triplicando as peças*

Repetir as atividades de 1)

3) *Duplo- Duplo*

- Formar uma peça com dois pentaminós de uma forma escolhida qualquer;
- Copiar com outras 2 peças;
- Com as 8 peças restantes formar uma peça semelhante, mas com o dobro do tamanho.

4) *Formando retângulos*

a) Construir retângulos 6x10, 5x12, 4x15, 3x20 utilizando os doze pentaminós;
b) Discutir a impossibilidade de se obter um retângulo 2x20;
c) Verificar a área e o perímetro dos retângulos formados e das próprias peças concluindo que não há relação entre perímetro e área, ou seja, com mesma área podemos ter diferentes perímetros;
d) Usando as 12 peças do pentaminó formar um retângulo 5x13 com um buraco em forma de uma das peças do pentaminó.

I C – Explorando Tabuleiros 8x8

- **Atividades Propostas:**

1) Verificar se 32 **dominós** recobrem todo o tabuleiro;
2) Discutir a impossibilidade de recobrir o tabuleiro com os **triminós**;
3) Verificar a possibilidade de recobrir o tabuleiro com 21 **triminós** "retos" e um **monominó**, explorando a localização do **monominó**;
4) Verificar a possibilidade de cobrir o tabuleiro com 21 **triminós** em "L" e um **monominó**, explorando a localização do **monominó**;
5) Propor o seguinte jogo: cada jogador na sua vez escolhe uma peça e a coloca sobre o tabuleiro, perdendo o jogo aquele que na sua vez não conseguir encaixar mais nenhuma peça;

Sugestão:

- Procurar colocar as peças deixando lugar só para um número ímpar de peças (no caso de dois jogadores);
- Discutir qual o número mínimo de **pentaminós** que pode ser colocado sobre um tabuleiro de modo a tornar impossível a colocação de mais um qualquer dos restantes;

6) Verificar a possibilidade de recobrir o tabuleiro com 16 **tetraminós** da mesma espécie;
7) Verificar a possibilidade de recobrir o tabuleiro com 15 **tetraminós** em "L" e um **quadrado**;
8) Verificar a possibilidade de recobrir o tabuleiro com 15 **T-tetraminós** e um **quadrado**;
9) Discutir a impossibilidade de recobrir o tabuleiro com as peças do **pentaminó**.

I D - Explorando Tabuleiros 8x8 mutilados

- **Atividades Propostas:**

1) Verificar a possibilidade de dispor 31 dominós, sobre o tabuleiro mutilado como nas figuras a seguir:

Figura1

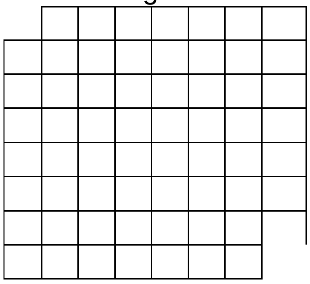


Figura 2

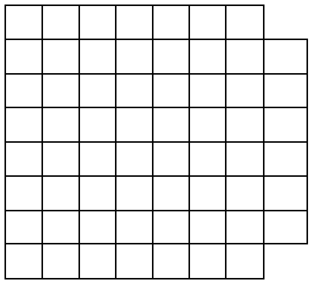


Figura 3

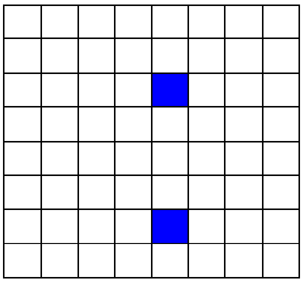
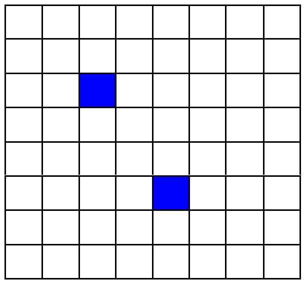
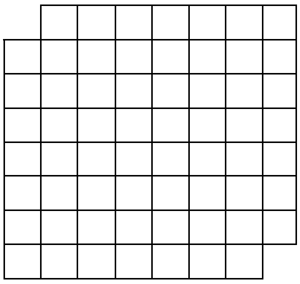


Figura 4



2) Verificar se é possível cobrir o tabuleiro a seguir, com 20 triminós em “L” e um dominó:



3) Verificar a possibilidade de cobrir os tabuleiros apresentados a seguir, com os pentaminós:

Figura 1

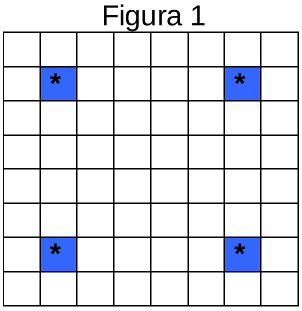


Figura 2

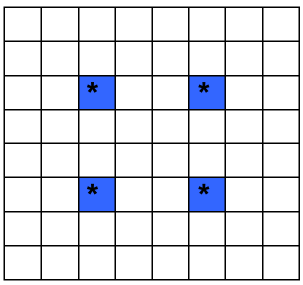


Figura 3

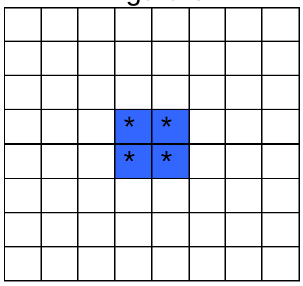
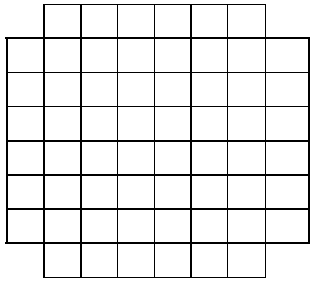


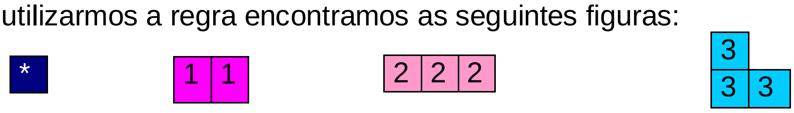
Figura 4



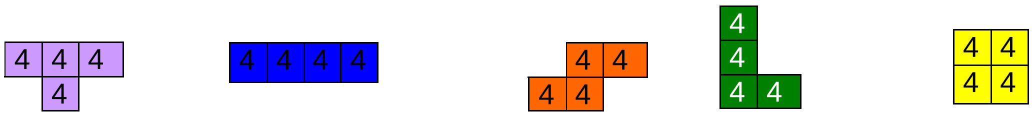
II - Soluções Encontradas

II A – Obtendo todas as formas com um número fixo de peças

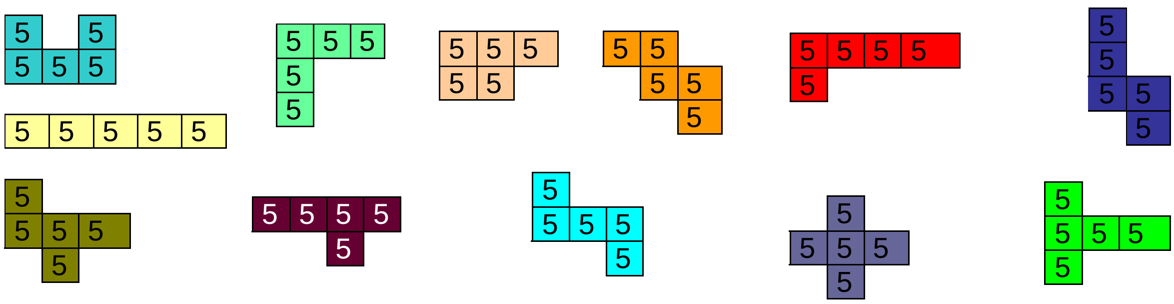
Ao utilizarmos a regra encontramos as seguintes figuras:



monominó dominó triminó reto triminó "L"



T-tetraminó tetraminó reto tetraminó escada L-tetraminó tetraminó quadrado



Pentaminós

Observação: as figuras 1a e 1b, 2a e 2b abaixo são equivalentes:

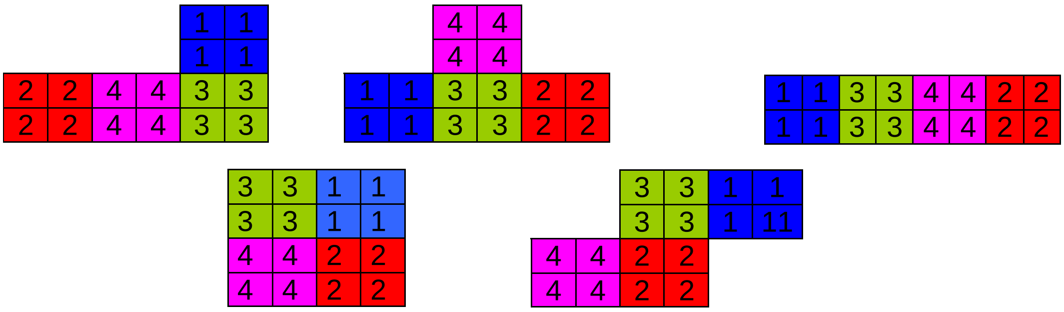
1a 1b 2a 2b

II B – Explorando as formas

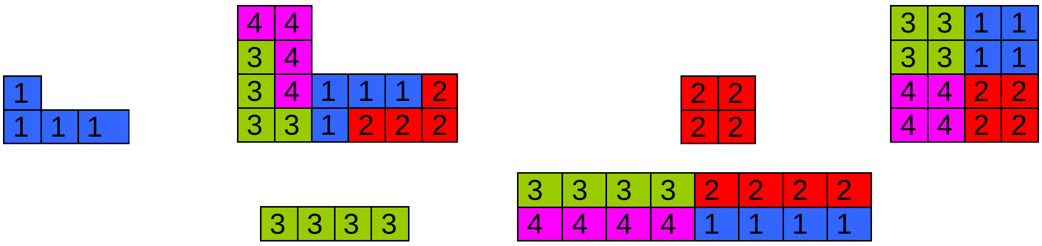
1) Duplicando as peças:

i) Tetraminó:

Observamos inicialmente que é possível fazer a duplicação dos tetraminós usando somente o tetraminó quadrado, como nas figuras abaixo:

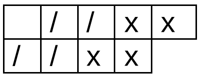


Agora, algumas peças podem ser duplicadas utilizando peças da mesma forma:

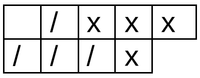


No entanto, se tentarmos duplicar as figuras abaixo, usando a mesma peça,

sempre aparecerão bicos:

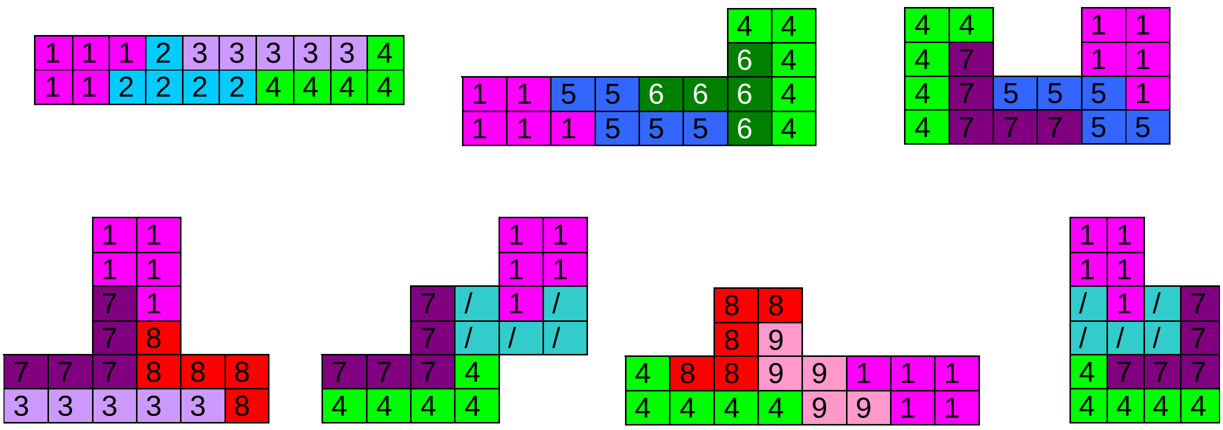


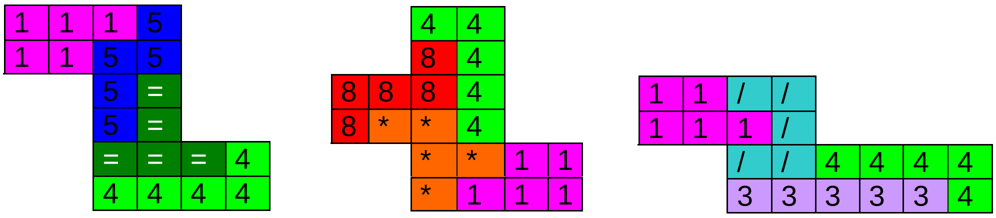
ou



ii) Pentaminó:

a) Peças que podem ser duplicadas:



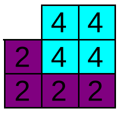


b) Peças que não podem ser duplicadas:

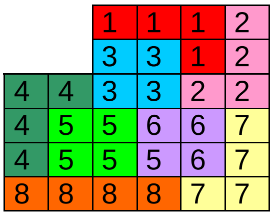
c) Analisando a duplicação de cada peça verificou-se: sempre que uma peça pode ser duplicada, sua área necessariamente é quadruplicada.

1B) Utilizando duas ou mais peças
i) Tetraminó:

a) Uma possibilidade é a seguinte:

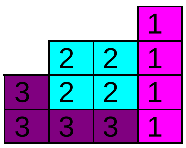


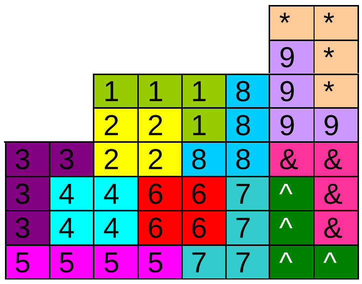
b) É possível a duplicação repetindo os tetraminós, usando 8 tetraminós.



c) A área da figura duplicada é 4 vezes maior do que a área da figura formada por duas peças do tetraminó.

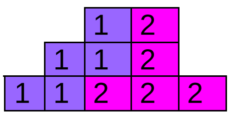
d) Usando três peças:

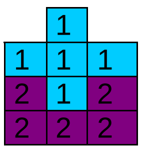




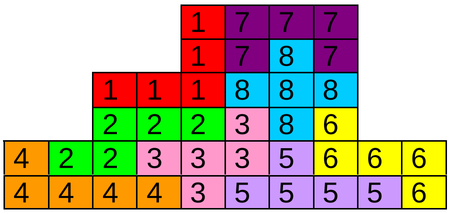
ii) Pentaminó:

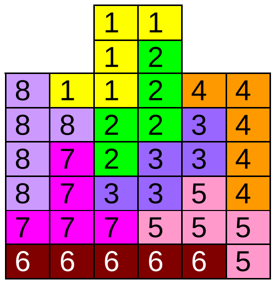
a) Duas das possibilidades são:





b) É possível a duplicação repetindo os pentaminós, usando 8 pentaminós.





c) A área da figura duplicada é 4 vezes maior do que a área da figura formada por duas peças do pentaminó.

2) Triplicando as peças:

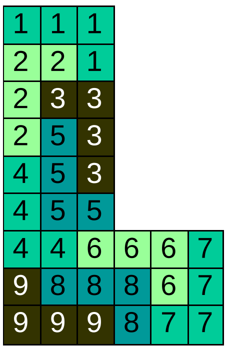
i) Tetraminó:

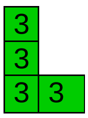
Usando os cincos tetraminós sem repetí – los:

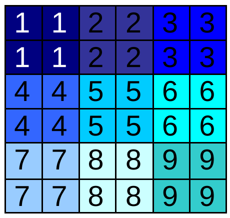
- Não é possível triplicar nenhuma peça usando apenas os cincos tetraminós, pois não há peças suficientes para a triplicação.

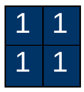
Repetindo os tetraminós:

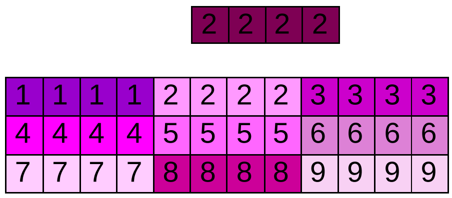
- Usando a mesma peça é possível triplicar o tetraminó reto, o tetraminó quadrado e o tetraminó “L”.



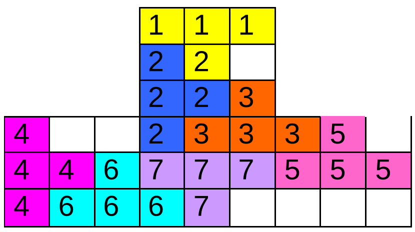


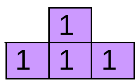




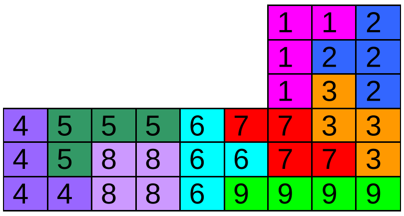


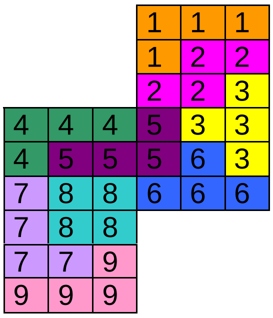
- As demais peças não podem ser triplicadas com peças do mesmo formato, pois o encaixe delas proporcionam espaços vazios. Veja, por exemplo:

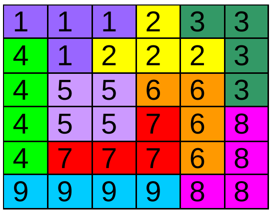


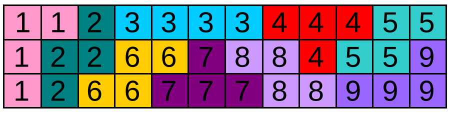


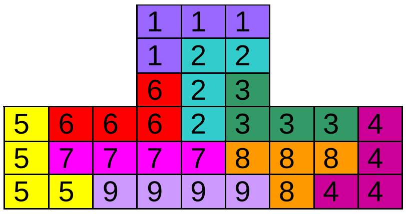
- Utilizando peças aleatórias do tetraminó é possível triplicar todos os tetraminós. Veja as figuras abaixo:











- Em todos os casos de triplicação foram utilizadas 9 peças.
- Cada tetraminó possui 4 monominós e cada tetraminó triplicado possui 36 monominós, ou seja, a peça triplicada é 9 vezes maior que cada tetraminó.
- Multiplicando por 4, a área se torna 16 vezes maior, pois a área de cada tetraminó é 4 u.m. e o produto de 4 por 4 é 16. Multiplicando por 5, a área se torna 20 vezes maior e por 6, 24.

Observação: Pode-se trabalhar aqui a generalização: se um poliminó tem seu lado multiplicado por k sua área é multiplicado por k^2.

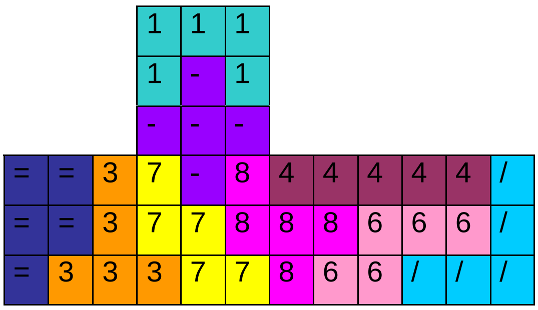
ii) Pentaminó: as soluções em (5) da bibliografia.

- É impossível triplicar uma figura com duas ou mais peças,utilizando um único conjunto de figuras, uma vez que a área da figura triplicada é 9 vezes maior do que a área da figura formada, e tomadas duas peças quaisquer, a área da figura formada será de 10 u.m.^{2} , então necessariamente a área da figura triplicada deveria ter 90 u.m.^{2} , no entanto as 10 peças restantes admitem área máxima de 50 u.m.^{2} .

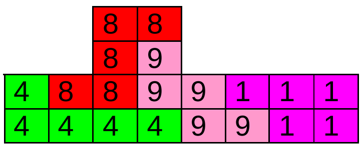
- A área da figura triplicada é 9 vezes maior que a área da peça escolhida.

- Para a triplicação foram utilizadas 9 peças.

Observação: Temos duas propostas distintas de duplicação ou triplicação das peças: utilizando ou não só peças de mesma forma da peça dada.



(triplicação)



(duplicação)

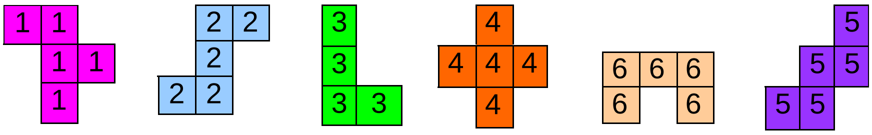
3) Duplo - duplo: soluções em (5) da bibliografia.

4) Formando retângulos: soluções em (5) da bibliografia.

b) Retângulo 2x20 :

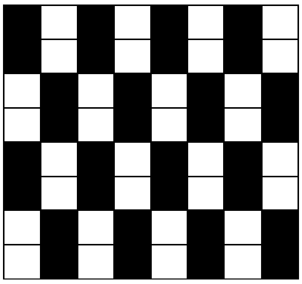
Para construirmos este retângulo, seria necessária a utilização das 12 peças do jogo, sendo que dessas, 7 peças (descritas abaixo) são impossíveis de serem utilizadas, pois seu formato não admite encaixe com qualquer outra peça, sem obter uma peça que possua, nas duas direções medida maior que 2.

Peças que não são utilizadas:



II C – Explorando Tabuleiros 8x8

1) Uma solução possível é:



2) Note que não é possível cobrir um tabuleiro comum de xadrez 8x8, com triminós, pois o tabuleiro apresenta 64 quadrados e este número nem mesmo é divisível por 3.

3) Colorindo o tabuleiro com 3 cores que denominamos por **a**, **b** e **c**, temos 21 quadrados coloridos com **a**, 22 quadrados coloridos com **b** e 21 quadrados coloridos com **c**.

a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
b	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
c	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**
a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
b	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**
c	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**
a	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
b	**c**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**	**c**

Todo triminó reto cobre um quadrado de cada cor, então triminós retos cobrirão sempre o mesmo número de **a**-quadrados, **b**-quadrados e **c**-quadrados.

Se cobrirmos um **a**-quadrado com um monominó, restarão 20 **a**-quadrados, 22 **b**-quadrados e 21 **c**-quadrados, portanto é impossível cobrir o resto do tabuleiro com os triminós.

O mesmo ocorre se cobrirmos um **c**-quadrado com um monominó.

Agora, suponhamos um **b**-quadrado coberto pelo monominó, então restam 21 **a**-quadrados, 21 **b**-quadrados e 21 **c**-quadrados. Para facilitar a solução chamemos a reta horizontal que divide o quadrado ao meio de eixo-x.

Se o **b**-quadrado for o localizado no canto esquerdo da metade inferior do tabuleiro, por simetria com relação ao eixo-x, o problema é análogo de quando o monominó é colocado no **a**-quadrado do canto esquerdo da metade superior e como já vimos, é impossível cobrir o tabuleiro nessas condições.

Assim, só é possível cobrir o tabuleiro com 21 triminós e 1 monominó, desde que o monominó seja colocado em um **b**-quadrado que é simétrico a um outro **b**-quadrado com relação ao eixo-x.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
9	9	9	0	!	*	*	*
$	$	$	0	!	^	^	^
?	%		0	!	+	+	+
?	%	/	/	/	=	=	=
?	%	#	#	#	~	~	~

		+			+		
		+			+		

4) É possível realizar tal tarefa e a demonstração é feita por indução em tabuleiros 2^n x 2^n, como veremos a seguir:

- Tabuleiro 2x2:

+	=
=	=

- Tabuleiro 2^2x2^2:

Dividimos o tabuleiro em quatro quadrantes. Cada quadrante é um tabuleiro 2x2, então podemos colocar um monominó em cada quadrante e cobrir o resto com o triminó em L.

Colocando os monominós no centro, obtemos um quadrado. Trocamos esse quadrado por 1 monominó e um triminó em L.

=	+	1	1
=	=	2	1
3	2	2	4
3	3	4	4

Observe que o monominó pode ocupar qualquer posição.

1	1	3	3
1	4	4	3
2	4	=	=
2	2	=	+

=	=	1	1
=	+	2	1
3	2	2	4
3	3	4	4

- Tabuleiro 8x8:

Dividimos o tabuleiro em 4 quadrantes, assumindo que o monominó está em um dos quadrantes, podemos cobri-lo com os triminós em L (caso anterior).

Nos outros três quadrantes colocamos o monominó no centro do tabuleiro e depois os trocamos por um triminó em L.

1	1	2	2	3	3	4	4
1	5	5	2	3	6	6	4
7	5	8	8	9	9	6	0
7	7	8	/	/	9	0	0
=	=	-	/				
=	\	-	-				
[	\	\	]				
[	[	]	]				

5) O número mínimo de pentaminós é 5, com a seguinte configuração:

	1	1	9	9	9	9	
		1				9	
	1	1		2		4	
			2	2		4	
/	/	/		2		4	
		/		2		4	
		/				4	

6) É possível cobrir o tabuleiro inteiramente com 16 tetraminós retos, 16 T-tetraminós, 16 tetraminós quadrados e 16 L-tetraminós. A seguir apresentamos um tabuleiro 8x8 com cada quadrante contendo a possibilidade para cada uma das formas.

1	1	1	2	3	4	5	6
1	2	2	2	3	4	5	6
7	7	7	8	3	4	5	6
7	8	8	8	3	4	5	6
9	9	0	0	=	/	/	/
9	9	0	0	=	=	/	^
*	*	$	$	=	#	^	^
*	*	$	$	#	#	#	^

- Não é possível cobrir o tabuleiro com 16 tetraminós escada. De fato:

Se pudéssemos cobrir o tabuleiro com tetraminós escada, encontraríamos as seguintes situações nas laterais do tabuleiro:

1	1						
2	1	1					
2	2						
3	2						
3	3						
4	3						
4	4						
	4						

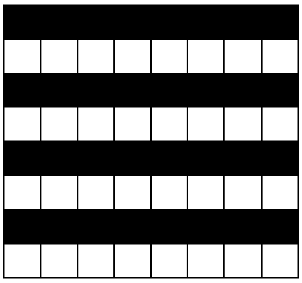
(1)

1							
1	1						
2	1						
2	2						
3	2						
3	3						
	3						

(2)

Nos casos (1) e (2), observamos que o encaixe de tetraminós escada proporciona espaços vazios impossíveis de serem cobertos por um tetraminó escada.

7) Colorindo o tabuleiro da seguinte maneira:



temos que cada T-tetraminó ocupa três quadrados de uma cor e uma de outra e o tetraminó quadrado, dois de cada. Assim 15 L-tetraminós e um quadrado ocuparão um número ímpar de quadrados pretos e um número ímpar de quadrados brancos e o tabuleiro apresenta número par de quadrados brancos e número par de quadrados pretos. Dessa forma não é possível recobrir o tabuleiro com 15 T-tetraminós e um quadrado.

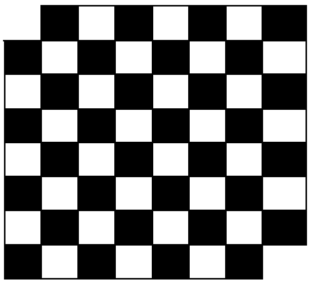
8) Analisando o tabuleiro com a coloração padrão do tabuleiro de xadrez, temos que o T-tetraminó ocupa um número ímpar de quadrados pretos e um número ímpar de quadrados brancos e um tetraminó quadrado ocupa 2 quadrados pretos e 2 quadrados brancos, em qualquer posição que os coloquemos. Dessa forma 15 T-tetraminós e 1 tetraminó quadrado ocuparão um número ímpar de quadrados pretos e um número ímpar de quadrados brancos, o que é impossível pois, o tabuleiro apresenta um número par de quadrados brancos e um número par de quadrados pretos.

9) A impossibilidade ocorre porque o tabuleiro de xadrez apresenta 64 quadrados e este número não é divisível por 5 (número de quadrados de cada peça do pentaminó).

II D - Explorando Tabuleiros 8x8 mutilados

1) Observemos que colorindo o tabuleiro de maneira usual, cada dominó cobre um quadrado preto e outro branco, então n dominós cobrem n quadrados pretos e n quadrados brancos.

Assim, no caso do tabuleiro mutilado, conforme a figura 1, é impossível cobri-lo com 31 dominós uma vez que temos 32 quadrados pretos e 30 quadrados brancos.



* Podemos recobrir o tabuleiro mutilado conforme a figura 2, com 31 dominós, porque colorindo da maneira usual, são retirados exatamente um quadrado preto e um branco, e portanto restam o mesmo número de quadrados pretos e brancos.

* No caso da figura 3, conforme a coloração do tabuleiro não é possível recobrir, pois os quadrados retirados são da mesma cor e portanto restam 30 quadrados de uma cor e 32 de outra.

* No caso da figura 4, estão sendo retirados 1 quadrado branco e outro preto, portanto é possível cobrir o tabuleiro com 31 dominós, uma vez que restam 31 quadrados pretos e 31 quadrados brancos.

2) Sim é possível, conforme pode ser visto na figura a seguir.

	1	2	2	3	4	4	5
1	1	2	3	3	4	5	5
6	6	7	7	8	8	9	9
6	0	0	7	8	=	=	9
-	0	/	/	#	#	=	\
-	-	/			#	\	\
&	%	%	*	*	^	{	{
&	&	%	*	^	^	{	

3) É possível, conforme soluções apresentadas a seguir.

9	9	6	=	=	/	/	/
9		6	=	=	7		/
9	6	6	=	-	7	7	/
9	6	3	-	-	-	7	7
3	3	3	8	-	5	5	2
1	1	3	8	8	5	2	2
1		8	8	5	5		2
1	1	4	4	4	4	4	2

Figura 1

9	9	9	9	8	=	=	=
9	7	7	8	8	8	=	=
7	7		8	1		1	4
7	-	5	5	1	1	1	4
-	-	-	5	/	/	/	4
3	-		5	5		/	4
3	3	3	6	6	2	/	4
3	6	6	6	2	2	2	2

Figura 2

2	2	2	2	9	9	9	9
=	=	2	7	9	/	/	/
=	=	7	7	3	3	3	/
=	7	7			3	6	/
1	1	-			3	6	6
1	-	-	-	8	5	5	6
1	1	-	8	8	8	5	6
4	4	4	4	4	8	5	5

Figura 3

	8	8	1	1	1	6	
8	8	3	1	-	1	6	6
9	8	3	-	-	-	7	6
9	3	3	3	-	7	7	6
9	=	=	=	7	7	5	/
9	9	=	=	5	5	5	/
2	2	2	2	5	/	/	/
	2	4	4	4	4	4	

Figura 4

Referência Bibliográfica:

(1) Anais do 29º C.I.P.: *A visão do ser humano no século XXI*.
(2) Gardner, M. *Divertimentos matemáticos*. Ibrasa, 2ª Edição, SP, 1967.
(3) Golomb,S.W. *Checker Boards and Polyminoes*. American Mathematical Monthly, 1954.
(4) Macedo, L. e outros. *Aprender com Jogos e Situações-Problemas*. Artmed, 2000.
(5) Sócio Industria e Comércio de Brinquedos Ltda. *Pentaminó* (Quebra-Cabeças Geométricos).