Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações - Lista 6.

Ex 1 Suponha que $\{E_n, n \geq 1\}$ e $\{F_n, n \geq 1\}$ são sequências crescentes de eventos tendo limites E e F. Mostre que se E_n é independente de F_n para todo n, então E é independente de F.

Ex 2 Sejam A e B eventos independentes, mostre que A^c, B são independentes, e deduza que A^c e B^c são independentes.

Ex 3 Considere n lançamentos de um dado. Seja A_{ij} o evento de que os valores observados nos lançamentos i e j são iguais. Mostre que os eventos $\{A_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ são independentes aos pares mas não independentes.

Ex 4 Prove que se $E_1, E_2, ..., E_n$ são eventos independentes, então:

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} E_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - \mathbb{P}(E_i)]$$

Ex 5 Se $0 \leq a_i \leq 1, i = 1, 2...$, prove que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[a_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - a_j) \right] + \prod_{i=1}^{\infty} (1 - a_i) = 1$$

Ex 6 (Aproximação da Binomial pela Poisson) $Y \sim \text{Binomial}(N, p)$, se: $\forall k \in \{0, 1, ..., N\}$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Mostre que se N e $p = p(N)$ são tais que $\lim_{N\to\infty} Np = \lambda$, então:

$$\mathbb{P}(Y = k) \to \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^k}{k!} \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^k}{k!}$$

Ex 7 (Aproximação da Hipergeométrica pela Binomial) $X \sim \text{Hipergeométrica}(N, b, n)$, se $\forall k \in \{0, 1, ..., b\}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mostre que se $N \to \infty, r = (N - b) \to \infty$ e $b \to \infty$ de tal maneira que $\frac{b}{N} \to p$ e $\frac{r}{N} \to 1 - p$, então:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ex 8 Seja X uma variável aletória inteira não negativa, então:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Ex 9 (Distribuição Geométrica) $X \sim$ Geométrica(p) se $\forall k \in \{1, 2, ...\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

a) Mostre então que:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k) \ \forall k, n \geq 1$$

b) Há outra distribuição nos inteiros positivos que satisfaz a propriedade acima?

Ex 10 (Lema de Borel-Cantelli) Sejam $A_1, A_2, ...$ eventos aleatórios em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, isto é, $A_n \in \mathcal{F} \ \forall n$. Mostre que:

a) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, então $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 0$.

b) Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ e os A_n são independentes, então $\mathbb{P}(A_n$ infinitas vezes$) = 1$.