

Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações - Lista 5.

Ex 1 Prove que: (1 ponto)

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

Ex 2 (Continuidade de probabilidade) Se $A_n \uparrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$. Se $A_n \downarrow A$, então $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$. (1 ponto)

Ex 3 Defina-se $A := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, se $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A$. Mostre que se $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$, então $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$. (1 ponto)

Ex 4 Seja $A_r, r \geq 1$, uma sequência de eventos tais que $\mathbb{P}(A_r) = 1 \forall r$. Mostre que: (1 ponto)

$$\mathbb{P}(\cap_{r=1}^{\infty} A_r) = 1$$

Ex 5 Seja uma empresa com n funcionários, n par. Mostre que a probabilidade de se formar uma comissão qualquer com um número par de membros, é igual a probabilidade de se formar uma comissão com um número ímpar de membros. obs: existe uma maneira de se formar uma comissão de "zero" membros, não formar nenhuma comissão! (1 ponto)

Ex 6 Há n urnas, a r -ésima urna contém $r - 1$ bolas vermelhas e $n - r$ bolas pretas. Você escolhe uma urna aleatoriamente e remove duas bolas da urna escolhida sem reposição. Encontre a probabilidade que: (1 ponto)

a) A segunda bola é preta

b) A segunda bola é preta, dado que a primeira também o é.

Ex 7 Seja $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ com A e B independentes e igualmente prováveis de serem quaisquer um dos 2^n eventos aleatórios (incluindo o \emptyset e o próprio Ω). Mostre que: (1 ponto)

a) $\mathbb{P}(\{A \subset B\}) = (\frac{3}{4})^n$

b) Mostre que $\mathbb{P}(\{A \cap B\}) = 0$

Ex 8 Um evento F "carrega" informação negativa para um evento E ($F \searrow E$) se $\mathbb{P}(E|F) \leq \mathbb{P}(E)$. Prove ou dê contra-exemplos das seguintes afirmações: (1,5 ponto)

- a) Se $F \searrow E$, então $E \searrow F$.
- b) Se $F \searrow E$ e $E \searrow G$, então $F \searrow G$.
- c) Se $F \searrow E$ e $G \searrow E$, então $FG \searrow E$.

Ex 9 Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta é p . Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe, ele responde corretamente com probabilidade $\frac{1}{m}$. (1,5 ponto)

- a) Qual a probabilidade de que ele sabia a resposta dado que a pergunta foi respondida corretamente?
- b) Calcule o limite dessa probabilidade quando $m \rightarrow \infty$ com p fixo.
- c) Calcule o limite dessa probabilidade quando $p \rightarrow 0$ com m fixo.