Sol. Prova 3 - MAE315

1.

i. Note que com AASc,

$$Var[\hat{P}] = \frac{\sigma^2}{n},$$

onde

$$\sigma^2 = \sigma_d^2 + \sigma_e^2 = 0,0656 + 0,0007 = 0,0663,$$

pois,

$$\sigma_d^2 = 0,4.0,03.0,97 + 0,6.0,1.0.9 = 0,0656,$$

$$\sigma_e^2 = 0,4.(0,03 - 0,067)^2 + 0,6.(0,1 - 0,067)^2 = 0,0007.$$

Pois

$$\hat{P}_{es} = 0,4.0,03 + 0,6.0,1 = 0,072.$$

Então,

$$Var[\hat{P}] = \frac{0.0663}{2000} = 3,31.10^{-5}.$$

ii. Para AE com AP temos,

$$V_{Pr} = \frac{\sigma_d^2}{n} = \frac{0,0656}{2000} = 3,28.10^{-5}.$$

iii. AE com AO:

$$V_{ot} = \frac{(\sum_{h=1}^{Y} HW_h\sigma_h)^2}{n} = \frac{(0,4.0,17 + 0,6.0,3)^2}{2000} = \frac{0,0615}{2000} = 3,07.10^{-5}.$$

2. Temos

$$P = \sum_{h=1}^{H} W)hP_h = 0,5.0,2 + 0,3.0,3 + 0,2.0,6 = 0,34.$$

$$\sigma^2 = \sigma_e^2 + \sigma_d^2 = 0,20 + 0,0244 = 0,2244.$$

$$\sigma_d^2 = \sum_{h=1}^{H} W_h \sigma_h^2 = 0,5.0,2.0,8 + 0,3.0,4.0,6 + 0,2.0,6.0,4 = 0,20.$$

$$\sigma_e^2 = \sum_{h=1}^{H} W_h (P_h - P)^2 = 0,5.(0,2-0,34)^2 + 0,3.(0,4-0,34)^2 + 0,2.(0,6-0,34)^2 = 0,0244.$$

Assim

$$Var[\hat{P}] = \frac{0,2244}{600} = 0,000374.$$

ii.

$$V_{pr} = \frac{\sigma_d^2}{n} = 0,000374 \rightarrow n = \frac{0,20}{0,000374} = 535.$$

iii.

$$V_{ot} = \frac{(\sum_{h=1}^{H} W_h \sigma_h)^2}{n} = 0,000374 \rightarrow n = \frac{0,198}{0,000374} = 530.$$

3. i) Pode-se selecionar a amostra de Bernoulii da seguinte forma Como no estrato 1, $p_1 = 0,4$ e $0,4.15 = 6$, com duas colunas (a primeira correspondendo ao último dígito de seu número USP, temos que sucesso corresponde ao dígitos 01-06 e falha a 07-15, que leva a 15 Bernoullis

$$(0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,1,1,1),$$

resultando na amostra

$$s_1 = (6,7,9,12,13,14,15),$$

de modo que

$$d_{s_1}(NH \geq 2) = (0,0,1,0,1,1,1),$$

que leva ao estimador do total de $(HM \geq 2)$:

$$\hat{\tau}_{B_1} = \frac{1}{p_1} \sum_{i \in s_1} Y_i = \frac{1}{0.4}.4 = 10.$$

De maneira similar, para o segundo estrato, como $0,6.15 = 9$ temos as 15 Bernoullis

$$0,0,1,1,1,0,1,0,1,1,1,1,0,1,1,$$

que leva a amostra

$$s_2 = (18,19,20,22,24,25,26,27,29,30),$$

que leva aos dados,

$$d_{s_2} = (1,1,0,1,0,0,1,0,0,1),$$

que leva ao estimador

$$\hat{\tau}_{B_2} = \frac{1}{p_2}\sum_{i\in s_2} Y_i = \frac{1}{0.6}.5 = \frac{10}{6}.5 = 8.33$$

Assim, o estimador combinado da proporção de interesse é dado por

$$\hat{P}_{Bes} = \frac{10+8.33}{30} = \frac{18.33}{30} = 0,611.$$

Temos as variâncias estimadas

$$\hat{V}_{B1} = \frac{1}{p_1}(\frac{1}{p_1}-1)\sum_{i\in s} Y_i^2 = \frac{10.(10-4).4}{4.4} = 15,$$

$$\hat{V}_{B2} = \frac{1}{p_2}(\frac{1}{p_2}-1)\sum_{i\in s} Y_i^2 = \frac{10.(10-6).5}{6.6} = 5,56,$$

de modo que

$$\hat{V}_{Bes} = \frac{1}{30^2}(5,56+15) = 0,0228.$$

ii) Amostra AASc com $n_1 = 6$ do Estrato 1. Usando TNA

$$s_1 = (06,06,06,11,08,13),$$

$$d_{s_1}(HM \geq 2) = (0,0,0,1,0,1),$$

de modo que

$$\hat{\tau}_{B1} = 15.\frac{2}{6} = 5.$$

Para o estrato2, $n_2 = 9$, resultando na AASc

$$s_2 = (24, 25, 16, 29, 28, 17, 16, 27, 19),$$

$$d_{s_2}(HM \geq 2) = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1),$$

de modo que

$$\hat{\tau}_{B2} = 15.\frac{5}{9} = 8,33,$$

com estimador combinado

$$\hat{\mu}_{Bes} = \frac{6}{15}.\frac{1}{3} + \frac{9}{15}.\frac{5}{9} = 0,467,$$

com variância estimaa

$$\hat{V}_{Bes} = \sum_{h=1}^{2} W_h^2 \frac{\hat{P}_h(1-\hat{P}_h)}{n_h - 1} = 0,0249.$$

Entao, AB melhor que AASc.