Prova 1 - MAE 315

1. Espaço amostral:

$$\mathcal{S} = (1, 21, 31, 41, 22, 23, 24, 32, 33, 34, 42, 43, 44),$$

com

$$P(1) = 1/4, \quad P(21) = P(31) = P(41) = 1/16$$

$$P(22) = P(23) = P(24) = P(32) = P(33) = P(34) = P(42) = P(43) = P(44) = 1/16.$$

Para as frequências,

$$f_1(1) = f_1(21) = f_1(31) = f_1(41) = 1, \quad f_1 = 0, \quad c.c.$$

$$f_2(1) = f_2(31) = f_2(41) = f_2(33) = f_2(34) = f_2(43) = f_2(44) = 0,$$

$$f_2(22) = 2, \quad f_2(21) = f_2(23) = f_2(24) = f_2(32) = f_2(42) = 1.$$

Assim, temos as distribuições

$$P[f_1 = 0] = 9/16, \quad P[f_1 = 1] = 7/16,$$

de modo que

$$E[f_1] = 0(9/16) + 1(7/16) = 7/16.$$

Também,

f_1	0	1
Prob.	9/16	7/16

Também,

$$P[f_2 = 0] = 10/16, \quad P[f_2 = 1] = 5/16, \quad P[f_2 = 2] = 1/16$$

ou seja,

f_2	0	1	2
Prob.	9/16	7/16	1/16

de modo que f_1 e f_2 não são identicamenyte distribuidas e além disso

$$E[f_2] =] = 0(10/16) + 1(5/16) + 2(1/16) = 10/16.$$

Além disso, $E[f_1] \neq E[f_2]$. Portanto,para o plano acima, f_1 e f_2 não são identicamente distribuídas, e além disso, $E[f_1] \neq E[f_2]$. Portanto, plano não é simetrico.

Com relação a média amostral $\bar{x}$, temos

$$P[\bar{x} = 12] = 4/16, \quad P[\bar{x} = 14] = P[\bar{x} = 20] = P[\bar{x} = 21] = P[\bar{x} = 30] = 1/16,$$

$$P[\bar{x} = 16] = P[\bar{x} = 23] = P[\bar{x} = 18] = P[\bar{x} = 25] = 2/16.$$

Assim,

$\bar{x}$	12	14	16	18	20	21	23	25	30
Prob.	4/16	1/16	2/16	2/16	1/16	1/16	2/16	2/16	1/16

$$E[\bar{x}] = 12(4/16) + 14(1/16) + 16(2/16) + 18(2/16) + 20(1/16)$$

$$+21(1/16) + 23(2/16) + 25(2/16) + 30(1/16) = 297/16 = 18.56.$$

Note que

$$\bar{X} = (12 + 30 + 16 + 20)/4 = 39/2 = 19.50.$$

Logo $\bar{x}$ é viesado para $\bar{X}$.

Para calcular a variância da média amostral, temos que

$$E[\bar{x}^2] = (4/16)12^2 + ... = \frac{5981}{16}.$$

Então,

$$Var[\bar{x}] = \frac{5981}{16} - (\frac{297}{16})^2 = 29.25.$$

2. Espaço amostral:

$$\mathcal{S} = (1, 21, 31, 41, 22, 23, 24, 32, 33, 34, 42, 43, 44),$$

com

$$P(1) = 1/8, \quad P(21) = 3/64, \quad P(31) = P(41) = 2/64$$

$$P(22) = 9/64, \quad P(23) = 6/64 = P(24), \quad P(32) = 6/64,$$
$$P(33) = 4/64, \quad P(34) = 4/64, \quad P(42) = 6/64,$$
$$P(43) = 4/64 = P(44).$$

Com relação a média amostral $\bar{x}$, temos

$$P[\bar{x} = 12] = 8/64, \quad P[\bar{x} = 14] = 2/64, \quad P[\bar{x} = 16] = 6/64,$$

$$P[\bar{x} = 18] = 8/64, \quad P[\bar{x} = 20] = 4/64,$$
$$P[\bar{x} = 21] = 3/64, \quad P[\bar{x} = 23] = 12/64,$$
$$P[\bar{x} = 25] = 12/64, \quad P[\bar{x} = 30] = 9/64.$$

Assim,

$\bar{x}$	12	14	16	18	20	21	23	25	30
Prob.	8/64	2/64	6/16	8/64	4/64	3/64	12/64	12/64	9/16

$$E[\bar{x}] = 12(8/64) + 14(2/64) + 16(6/64) + 18(8/64) + 20(4/64)$$

$$+21(3/64) + 23(12/64) + 25(12/64) + 30(9/64) = 1353/64 = 18,56.$$

Note que
$$\bar{X} = (12 + 30 + 16 + 20)/4 = 39/2 = 19,50.$$
Logo $\bar{x}$ é viesado para $\bar{X}$.

Também,

$$E[\bar{x}^2] = 12(8/64) + 14(2/64) + ... = \frac{30543}{64}.$$

Logo
$$Var[\bar{x}] = \frac{30543}{64} - (\frac{1353}{64})^2 = 30,4.$$

3. Considere a população $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, $D(X) = (12, 30, 16, 20)$.
Temos

$$\mu_X = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} = \frac{78}{4} = \frac{39}{2}.$$

Assim.

$$S_X^2 = \frac{1}{3}[(12-\frac{39}{2})^2+(30-\frac{39}{2})^2+(16-\frac{39}{2})^2+(20-\frac{39}{2})^2] = \frac{1}{3}[\frac{225}{4}+[\frac{441}{4}+[\frac{49}{4}+[\frac{1}{4}] = \frac{179}{3}.$$

Para n=3, temos as seguintes 4 amostras distintas:

$$s = \{123, 124, 134, 234\},$$

com

$$P(123) = P(124) = P(134) = P(234) = 1/4.$$

também,

$\bar{x}(123) = 58/3$, $\bar{x}(124) = 62/3$, $\bar{x}(134) = 48/3$, $\bar{x}(234) = 66/3$.

Analogamente,

$$s^2(123) = \frac{1}{2}[(12-\frac{58}{3})^2 + (30-\frac{58}{3})^2 + (16-\frac{58}{3})^2] = \frac{1608}{18},$$

$$s^2(124) = \frac{1}{2}[(12-\frac{62}{3})^2 + (30-\frac{62}{3})^2 + (20-\frac{62}{3})^2] = \frac{1464}{18},$$

$$s^2(134) = \frac{1}{2}[(12-16)^2 + (16-16)^2 + (20-16)^2] = 16,$$

$$s^2(123) = \frac{1}{2}[(30-22)^2 + (16-22)^2 + (20-22)^2] = 52,$$

Temos então a distribuição

$$P[s^2 = \frac{1608}{18}] = P[s^2 = \frac{1464}{18}] = P[s^2 = 16] = P[s^2 = 52] = \frac{1}{4}.$$

s^2	1608/18	1464/18	16	52
Prob.	1/4	1/4	1/4	1/4

Então,

$$E[s^2] = \frac{1608}{18}.\frac{1}{4} + \frac{1464}{18}.\frac{1}{4} + 16.\frac{1}{4} + 52.\frac{1}{4} = \frac{179}{3}.$$

Portanto, s^2 é não viesado para S^2.