ESTIMAÇÃO DA PROPORÇÃO POPULACIONAL p

Objetivo

Estimar uma proporção p (desconhecida) de elementos em uma população, apresentando certa característica de interesse, a partir da informação fornecida por uma amostra.

Exemplos:

p: proporção de alunos da USP que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês;

p: proporção de consumidores satisfeitos com os serviços prestados por uma empresa telefônica;

p: proporção de eleitores da cidade de São Paulo que votariam em um determinado candidato, caso a eleição para presidente se realizasse hoje;

p: proporção de crianças de 2 a 6 anos, do estado de São Paulo, que não estão matriculadas em escola de educação infantil.

Dois possíveis procedimentos de estimação:

- **Estimação pontual**
- **Estimação intervalar**

- Vamos observar n elementos, extraídos ao acaso e com reposição da população;

- Para cada elemento selecionado, verificamos a presença (sucesso) ou não (fracasso) da característica de interesse.

Estimador pontual

O ***estimador pontual para*** p, também denominado ***proporção amostral***, é definido como

$$\hat{p} = \frac{X}{n},$$

sendo que,

X denota o número de elementos na amostra que apresentam a característica;

n denota o tamanho da amostra coletada.

Se observamos o valor k da v. a. X, obtemos $\hat{p} = k / n$ que denominamos ***estimativa pontual para*** p.

Exemplo 1: Sejam,

p: proporção de alunos da USP que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês, e

X: número de estudantes que respondem “sim” em uma pesquisa com n entrevistados.

Suponha que foram entrevistados $n = 500$ estudantes e que, desses, $k = 100$ teriam afirmado que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

A ***estimativa pontual*** (***proporção amostral***) ***para*** p é dada por:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{100}{500} = 0{,}20 \ ,$$

ou seja, 20% dos estudantes *entrevistados* afirmaram que foram ao teatro pelo menos uma vez no último mês.

$\rightarrow$ Note que, outra amostra de mesmo tamanho pode levar a uma outra estimativa pontual para p.

Estimativa intervalar ou intervalo de confiança

• Para uma amostra observada, os estimadores pontuais fornecem como estimativa um único valor numérico para o parâmetro.

• Os estimadores pontuais são variáveis aleatórias e, portanto, possuem uma distribuição de probabilidade, em geral, denominada *distribuição amostral*.

Idéia: construir **intervalos de confiança**, que incorporem à estimativa pontual informações a respeito de sua variabilidade (erro amostral).

Intervalos de confiança são obtidos por meio da ***distribuição amostral do estimador pontual*.**

A ***estimativa intervalar*** corresponde a um intervalo determinado da seguinte maneira:

$$\left[\hat{p} - \varepsilon;\ \hat{p} + \varepsilon\right],$$

sendo ε o **erro amostral** ou **margem de erro**.

Pergunta: *Como encontrar* ε *?*

Seja $P(\varepsilon)$ a probabilidade da estimativa pontual estar a uma distância de, no máximo, ε da proporção verdadeira p, ou seja,

$$P(\varepsilon) = P(\left|\hat{p} - p\right| \leq \varepsilon).$$

A probabilidade $P(\varepsilon)$ é também denominada coeficiente de confiança do intervalo, que denotamos pela letra grega γ (gama).

Afirma-se ainda que a estimativa intervalar tem coeficiente de confiança $\gamma = P(\varepsilon)$.

Formalmente,

$$P(\varepsilon) = P(|\hat{p} - p| \leq \varepsilon) = P(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon)$$

$$= P(p - \varepsilon \leq \frac{X}{n} \leq p + \varepsilon)$$

$$= P(np - n\varepsilon \leq X \leq np + n\varepsilon)$$

$$= P(\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}})$$

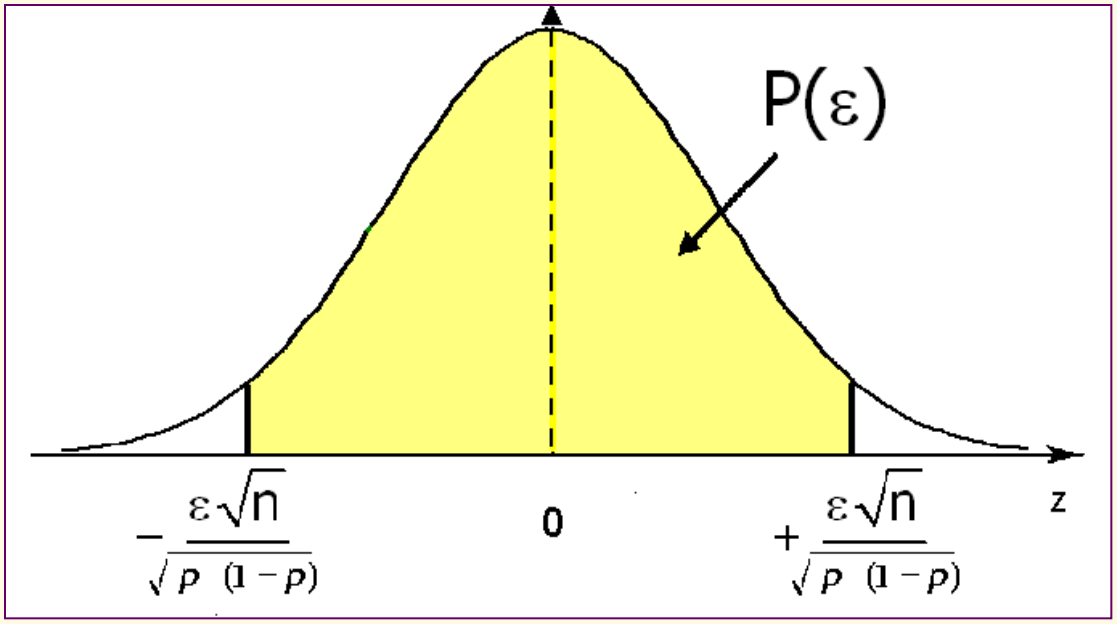
Como $X \sim b(n, p)$ temos que, para n **grande**,

a variável aleatória $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ tem distribuição $N(0,1)$.

Deste modo, para ***n* grande**,

$$P(\varepsilon) \cong P\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \right),$$

onde $Z \sim N(0,1)$.

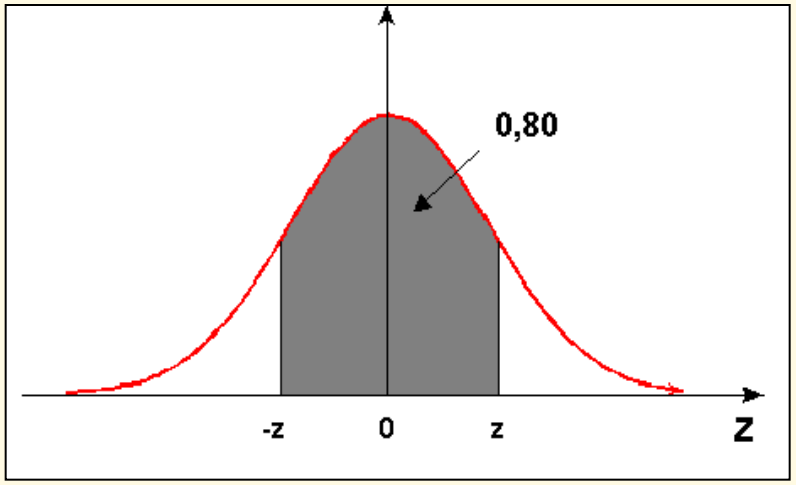


Denotando $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} = z$,temos que

$P(\varepsilon) = \gamma = P(-z \leq Z \leq z)$.

Assim, podemos obter z conhecendo-se γ (ou $P(\varepsilon)$).

Por exemplo, considere $\gamma = 0{,}80$.



$\Rightarrow z$ é tal que $A(z) = 0{,}90$.

Pela tabela, temos $z = 1{,}28$.

Erro da estimativa intervalar

Da igualdade $z = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$,

é imediato mostrar que o **erro amostral ε** é dado por

$$\varepsilon = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ ,$$

onde z é tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$, com $Z \sim N(0,1)$.

Dimensionamento da amostra

Da relação $\varepsilon = z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$,

segue que o **tamanho amostral** n, dados γ e a margem de erro ε, tem a forma

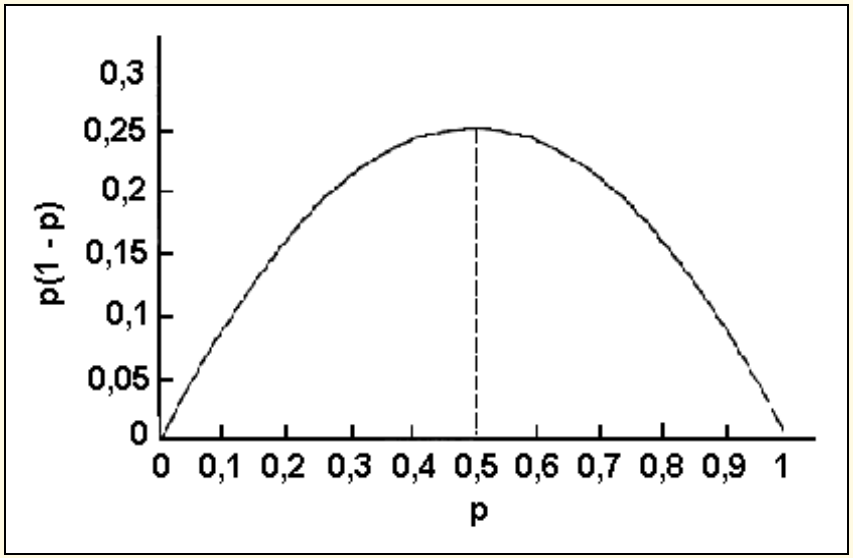
$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 p(1-p),$$

onde z é tal que $\gamma = P(-z \leq Z \leq z)$ e $Z \sim N(0,1)$.

Entretanto, nesta expressão, n depende de $p(1-p)$, que é desconhecido.

→ ***Como calcular o valor de n?***

Gráfico da função $p(1\text{-}p)$, para $0 \leq p \leq 1$.



Pela figura observamos que:

- a função $p(1\text{-}p)$ é uma parábola simétrica em torno de $p = 0{,}5$;
- o máximo de $p(1\text{-}p)$ é 0,25, alcançado quando $p = 0{,}5$.

Assim, na prática, substituímos $p(1\text{-}p)$ por seu valor máximo, obtendo

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 0{,}25\,,$$

que pode fornecer um valor de n maior do que o necessário.

Exemplo 2:

No exemplo da USP (Exemplo 1) suponha que nenhuma amostra foi coletada. Quantos estudantes precisamos consultar de modo que a estimativa pontual esteja, no máximo, a 0,02 da proporção verdadeira p, com uma probabilidade de 0,95?

Dados do problema:

$\varepsilon = 0{,}02$ (erro da estimativa);

$P(\varepsilon) = \gamma = 0{,}95 \Rightarrow z = 1{,}96.$

$$n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 p(1-p) \leq \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 0{,}25 = 2401 \text{ estudantes}.$$

Pergunta: ***É possível reduzir o tamanho da amostra quando temos alguma informação a respeito de p?***

Por exemplo, sabemos que:

- p não é superior a 0,30, ou
- p é pelo menos 0,80, ou
- p está entre 0,30 e 0,60.

Resposta: ***Depende do tipo de informação sobre p.***

Em alguns casos, podemos substituir a informação $p(1-p)$, que aparece na expressão de n, por um valor menor que 0,25.

Redução do tamanho da amostra

Vimos que, se nada sabemos sobre o valor de p, no cálculo de n, substituímos $p(1\text{-}p)$ por seu valor máximo, e calculamos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}25\,.$$

Se temos a informação de que p ***é no máximo 0,30*** ($p \leq 0{,}30$), então o valor máximo de $p(1\text{-}p)$ será dado por $0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$.

Logo, reduzimos o valor de n para

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}21.$$

Agora, se ***p é pelo menos 0,80*** ($p \geq 0{,}80$), então o máximo valor de $p(1\text{-}p)$ é 0,8x0,2 = 0,16, e temos

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}16\,.$$

Mas, se ***0,30 ≤ p ≤ 0,60***, o máximo valor de $p(1\text{-}p)$ é $0{,}5\times0{,}5=0{,}25$ e, neste caso, não há redução, ou seja,

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 \times 0{,}25.$$

Exemplo 3:

No Exemplo 2, suponha que temos a informação de que no máximo 30% dos alunos da USP foram ao teatro no último mês.

Portanto, temos que $p \leq 0{,}30$ e, como vimos, o máximo de $p(1\text{-}p)$ neste caso é 0,21.

Assim, precisamos amostrar

$$n = \left(\frac{z}{\varepsilon}\right)^2 0{,}21 = \left(\frac{1{,}96}{0{,}02}\right)^2 0{,}21 = 2017 \text{ estudantes},$$

conseguindo uma redução de 2401- 2017 = 384 estudantes.

Intervalo de confiança para p

Vimos que a estimativa intervalar para p tem a forma:

$$\left[\hat{p}-\varepsilon\,;\ \hat{p}+\varepsilon\right],$$

com $\varepsilon = z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-p)}{n}}$ e z tal que $\gamma = P(-z \le Z \le z)$ na $N(0,1)$.

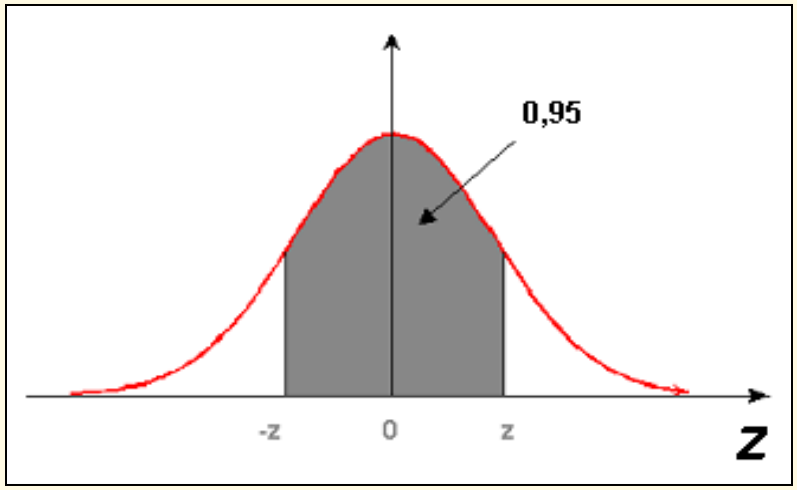
Na prática, substituímos a proporção desconhecida p pela proporção amostral $\hat{p}$, obtendo o seguinte ***intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ:***

$$IC(p\,;\gamma) = \left[\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,;\ \ \hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Exemplo 4:

No exemplo da *USP*, temos $n = 500$ e $\hat{p} = 0{,}20$.

Construir um intervalo de confiança para p com coeficiente de confiança $\gamma = 0{,}95$.



Como $\gamma = 0{,}95$ fornece $z = 1{,}96$, o intervalo é dado por:

$$\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; ; \; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$$= \left[\mathbf{0{,}20 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}20 \times 0{,}80}{500}}} \; ; \; \mathbf{0{,}20 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}20 \times 0{,}80}{500}}} \right]$$

$$= \mathbf{[0{,}20 - 0{,}035 \; ; \; 0{,}20 + 0{,}035]} = \mathbf{[0{,}165 \; ; \; 0{,}235]}.$$

Nesse intervalo ($\gamma = 0{,}95$), a estimativa pontual para p é 0,20, com um erro amostral ε igual a 0,035.

Interpretação do IC com γ = 95%:

Se sortearmos 100 amostras de tamanho n = 500 e construirmos os respectivos 100 intervalos de confiança, com coeficiente de confiança de 95%, esperamos que, aproximadamente, 95 destes intervalos contenham o verdadeiro valor de p.

Comentários:

Da expressão $\varepsilon = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, é possível concluir que:

- para γ fixado, o erro diminui com o aumento de n.
- para n fixado, o erro aumenta com o aumento de γ.

Exemplo 5:

Ainda no exemplo da USP, temos k = 100 e n = 500.

Qual é a probabilidade da estimativa pontual estar a uma distância de, no máximo, 0,03 da proporção verdadeira?

Dados do problema:

$n = 500$, $\hat{p} = 0{,}20$ e $\varepsilon = 0{,}03$ $\Rightarrow$ $P(\varepsilon) = \gamma = ?$

Como a proporção verdadeira p é desconhecida, utilizamos a estimativa pontual $\hat{p}$ para calcular z e, assim, obter γ (ou $P(\varepsilon)$).

Cálculo de z:

$$z = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \cong \frac{0{,}03\sqrt{500}}{\sqrt{0{,}2\times 0{,}8}} = 1{,}68\,.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varepsilon) &\cong 2\times A(z)-1 \\ &= 2\times A(1{,}68)-1 \\ &= 2\times 0{,}953-1 \\ &= 0{,}906 \ \ (90{,}6\%). \end{aligned}$$

Exemplo 6: Suponha que estamos interessados em estimar a proporção p de pacientes com menos de 40 anos diagnosticados com câncer nos pulmões que sobrevivem pelo menos 5 anos.

Em uma amostra aleatoriamente selecionada de 52 pacientes, somente 6 sobreviveram mais de 5 anos.

- Estimativa por ponto para p: $\hat{p} = \frac{6}{52} = 0{,}115$ (proporção amostral)

- Intervalo de confiança aproximado de 95% para p:

$$(0{,}115 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}115(1-0{,}115)}{52}}\,;\,0{,}115 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}115(1-0{,}115)}{52}})$$

$$= (0{,}028,\ 0{,}202)$$

Comentário:

Embora esse intervalo tenha sido construído usando a aproximação normal para a distribuição binomial, poderíamos ter gerado um intervalo de confiança *exato* para p usando a própria distribuição binomial.

Um intervalo exato é particularmente útil para pequenas amostras, em que o uso da aproximação normal não pode ser justificada.