MAT5730 - Álgebra Linear

3ª Lista de Exercícios

1. Seja T o operador linear de $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação a base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine operadores lineares D e N de $\mathbb{R}^4$ tais que $T = D + N$, D é diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$.

2. Seja $A \in M_6(\mathbb{R})$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16I = 0$. Quais são as possíveis formas canonicas de Jordan não semelhantes para A?

3. Ache a forma de Jordan J da matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

   e ache uma matriz inversível $M \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $M^{-1}AM = J$.

4. Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear e denote por $m_T(x)$ seu polinômio minimal. Prove que existe um vetor v_0 em V tal que $g(T)(v_0) \neq 0$, para todo $g \in \mathbb{C}[X]$ tal que $\mathrm{grau}(g) < \mathrm{grau}(m)$.

5. Dar a forma de Jordan da matriz $\begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix}$

6. Seja a matriz real $A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ache a forma de Jordan J de A. Determine também uma matriz inversível M tal que $M^{-1}AM = J$.

7. Seja n o número máximo de matrizes não semelhantes $A \in M_5(\mathbb{R})$ que verificam $(A + I)^3 = 0$. Determine n.

8. Seja A uma matriz real 9×9 cujo polinomio característico é $(x - 3)^5(x - 2)^4$ e cujo polinomio minimal é $(x - 3)^3(x - 2)^2$. Dê as possíveis formas de Jordan de A.

9. Verifique se as matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Seja A uma matriz complexa $n \times n$ ($n \geq 3$) de posto 2. Determine todas as possíveis formas de Jordan de A.

11. Seja $P_n(\mathbb{R}) = \{p(X) \in \mathbb{R}[X] \mid p(X) = 0 \text{ ou } \operatorname{grau}(p(X)) \leq n\}$. Seja T o operador linear de $P_n(\mathbb{R})$ definido por $T(f(X)) = f(X+1)$.

   (i) Determine a forma de Jordan J de T.

   (i) Para o caso $n = 4$, encontre uma base B de $P_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B = J$.

12. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz triangular superior tal que os elementos da diagonal principal são todos iguais a α e os elementos imediatamente acima dela são não-nulos. Calcule o posto de $A - \alpha I$. Prove que A é semelhante a uma matriz que tem todos os elementos da diagonal principal iguais a α, todos os elementos da diagonal imediatamente inferior iguais a 1 e todos os outros elementos iguais a zero.

13. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita n e com produto interno. Seja W o espaço vetorial dos operadores lineares $T\colon V \to V$ que verificam $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$. Determine a dimensão de W.

14. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual e um operador linear T do $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que $v_1 = (1, 1, \ldots, 1)$, $v_2 = (1, 1, \ldots, 1, 0), \cdots, v_n = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ são autovetores de T. Mostre que T é autoadjunto se e somente se T possui um único autovalor.

15. Sejam V um espaço vetorial real com produto interno de dimensão finita. Um operador autoadjunto $T\colon V \to V$ é dito positivo se $\langle x, T(x)\rangle > 0$ para todo $x \in V$, $x \neq 0$. Mostre que se T é autoadjunto e positivo então existe um único operador autoajunto positivo $R\colon V \to V$ tal que $T = R^2$.

16. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno.

   a) Seja $T\colon V \to V$ um operador normal. Mostre que:

(i) T é autoadjunto se e somente se todo autovalor de T é um número real.

(ii) T é positivo se somente se todo autovalor de T é positivo.

(iii) T é unitário se e somente se todo autovalor de T tem valor absoluto 1.

b) Sejam T e U operadores lineares de V que comutam. Prove que se T e U são normais então TU é normal.

17. Considere em $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear inversível.

    (i) Mostre que $T^*T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear autoadjunto positivo e que todo autovalor de T^*T é positivo.

    Lembrete: Um operador autoadjunto $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dito positivo se $\langle U(v), v\rangle$ é positivo para todo $v \in \mathbb{R}^n, \quad v \neq 0$.

    (ii) Seja λ o maior autovalor de T^*T. Mostre que $||T||^2 \geq \lambda$, onde

    $$||T|| = sup\{||T(x)|| : ||x|| = 1\}.$$

    (iii) Mostre que, de fato, $||T||^2 = \lambda$.

18. Seja $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual. Seja T um operador normal de $\mathbb{R}^2$. Prove que T é diagonalizável ou $T = \alpha\mathbb{R}_\theta$, onde α é um número real positivo e R_θ é a rotação de ângulo θ em torno da origem.

19. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear autoadjunto cujos autovalores distintos são λ_1 e λ_2. Prove que existem um subespaço W de V e escalares α e β tais que $T = \alpha E + \beta I$, onde E é a projeção ortogonal de V sobre W e I é o operador identidade.

20. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sejam u e v vetores não-nulos em V. Mostre que u e v são linearmente dependentes se e somente se $|\langle u, v\rangle| = ||u||||v||$.

    Sugestão: Note que u e v são linearmente dependentes se e somente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $||u + av|| = 0$.

21. Consideremos $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador unitário que satisfaz a seguinte condição: se B e C são bases ortonormais de $\mathbb{R}^2$ tais que o determinante da matriz de mudança da base B para a base C é 1, então $[T]_B = [T]_C$. Prove que T é uma rotação em torno da origem.

22. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com produto interno $\langle \ , \ \rangle$ e $T\colon V \to V$ um operador linear normal. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios com coeficientes em K primos entre si. Prove que se u e v são dois elementos de V tais que $f(T)(u) = 0$ e $g(T)(v) = 0$, então $\langle u, v\rangle = 0$.

23. Decida se as afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique completamente sua resposta.

(1) Sejam $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrizes reais. Então, A e B são ortogonalmente semelhantes (isto é, existe uma matriz **ortogonal** P tal que $P^tAP = B$.)

(2) Duas matrizes são semelhantes se e somente se elas tem os mesmos autovalores.

(3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Seja $N\colon V \to V$ um operador linear nilpotente. Então, para todo polinômio $f(x)$ com coeficientes complexos, a parte diagonalizável de $f(N)$ é um múltiplo do operador identidade de V.

24. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de V de dimensão finita. Seja E um operador linear de V tal que $E^2 = E$ e $Im(E) = W$. Mostre que E é a projeção ortogonal de V sobre W se e somente se $||E(v)|| \leq ||v||$ para todo v em V.

25. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considerando $A \in M_4(\mathbb{C})$, encontre uma matriz unitária P e uma matriz diagonal D tal que $P^*AP = D$.

26. No espaço vetorial real $M_n(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$. Sejam $P \in M_n(\mathbb{R})$ e T o operador linear de $M_n(\mathbb{R})$ definido por $T(X) = XP$. Mostre que T é um isomorfismo de espaços vetoriais com produto interno se e somente se P é uma matriz ortogonal.

27. Seja $\mathbb{R}_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador rotação em torno da origem de um angulo θ, $0 < \theta < \pi$. Sejam $p\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um produto interno em $\mathbb{R}^2$ e $\langle \ , \ \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathbb{R}_\theta$ preserva o produto interno p se e somente se existe um número real positivo k tal que $p(x, y) = k\langle x, y\rangle$, para todo x, y em $\mathbb{R}^2$.

28. Classifique a menos de semelhança as matrizes reais ortogonais 4×4.

29. Determine um operador ortogonal que reduz a forma quadrática

$$q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz$$

sobre $\mathbb{R}^3$ (munido do produto interno usual) a uma soma de quadrados.

30. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas formas lineares não-nulas e seja $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(u,v) = f(u)g(v) + f(v)g(u)$. Mostre que $F(u,v)$ é uma forma bilinear não-degenerada se e somente se f e g são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

31. Sejam f e g formas bilineares sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Suponhamos que g é não-degenerada. Prove que existe um único operador linear $T\colon V \to V$ tal que $f(u,v) = g(T(u),v),\ \forall u,v \in V$.

32. Seja f uma forma bilinear não-nula sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que existem h e g em V^* tais que $f(x,y) = h(x)g(y)$ para todo x e y em V se e somente se f tem posto 1.

33. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Dizemos que uma função $p\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática se $p(\lambda v) = \lambda^2 p(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ e $f(u,v) = \frac{1}{2}[p(u+v) - p(u) - p(v)]$ é uma forma bilinear simétrica.

    (i) Mostre que uma função $p\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática se e somente se existe um operador linear autoadjunto $T\colon V \to V$ tal que $p(v) = \langle T(v), v\rangle$ para todo $v \in V$.

    (ii) Se $q\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática mostre que existem números reais α e β tais que $\alpha \quad ||u||^2 \leq q(u) \leq \beta \quad ||u||^2$, (para todo u em V).

    (iii) Exiba vetores v e w tais que $q(v) = \alpha||v||^2 e q(w) = \beta||w||^2$, onde α e β são os valores achados no ítem (ii).

34. Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno.

    a) Seja $T\colon V \to V$ um operador normal. Mostre que:

    (i) T é autoadjunto se e somente se todo autovalor de T é um número real.

    (ii) T é positivo se somente se todo autovalor de T é positivo.

    (iii) T é unitário se e somente se todo autovalor de T tem valor absoluto 1.

    b) Sejam T e U operadores lineares de V que comutam. Prove que se T e U são normais então TU é normal.

35. Considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear inversível.

(i) Mostre que $T^*T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear autoadjunto positivo e que todo autovalor de T^*T é positivo.

Lembrete: Um operador autoadjunto $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dito positivo se $\langle U(v), v\rangle$ é positivo para todo $v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$.

(ii) Seja λ o maior autovalor de T^*T. Mostre que $||T||^2 \geq \lambda$, onde $||T|| = sup\{||T(x)|| : ||x|| = 1\}$.

(iii) Mostre que, de fato, $||T||^2 = \lambda$.

36. Seja $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual. Seja T um operador normal de $\mathbb{R}^2$. Prove que T é diagonalizável ou $T = \alpha\mathbb{R}_\theta$, onde α é um número real positivo e R_θ é a rotação de ângulo θ em torno da origem.

37. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear autoadjunto cujos autovalores distintos são λ_1 e λ_2. Prove que existem um subespaço W de V e escalares α e β tais que $T = \alpha E + \beta I$, onde E é a projeção ortogonal de V sobre W e I é o operador identidade.

38. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sejam u e v vetores não-nulos em V. Mostre que u e v são linearmente dependentes se e somente se $|\langle u, v\rangle| = ||u||||v||$.

Sugestão: Note que u e v são linearmente dependentes se e somente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $||u + av|| = 0$.

39. Consideremos $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador unitário que satisfaz a seguinte condição: se B e C são bases ortonormais de $\mathbb{R}^2$ tais que o determinante da matriz de mudança da base B para a base C é 1, então $[T]_B = [T]_C$. Prove que T é uma rotação em torno da origem.

40. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com produto interno $\langle , \rangle$ e $T\colon V \to V$ um operador linear **normal**. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios com coeficientes em K primos entre si. Prove que se u e v são dois elementos de V tais que $f(T)(u) = 0$ e $g(T)(v) = 0$, então $\langle u, v\rangle = 0$.

41. Decida se as afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique completamente sua resposta.

(1) Sejam $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & -8 & -1 \\ 4 & -1 & -8 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrizes reais. Então, A e B são ortogonalmente semelhantes (isto é, existe uma matriz **ortogonal** P tal que $P^tAP = B$.)

(2) Duas matrizes são semelhantes se e somente se elas tem os mesmos autovalores.

(3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$. Seja $N\colon V \to V$ um operador linear nilpotente. Então, para todo polinômio $f(x)$ com coeficientes complexos, a parte diagonalizável de $f(N)$ é um múltiplo do operador identidade de V.

42. Sejam V um espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de V de dimensão finita. Seja E um operador linear de V tal que $E^2 = E$ e $Im(E) = W$. Mostre que E é a projeção ortogonal de V sobre W se e somente se $||E(v)|| \leq ||v||$ para todo v em V.

43. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considerando $A \in M_4(\mathbb{C})$, encontre uma matriz unitária P e uma matriz diagonal D tal que $P^*AP = D$.

44. No espaço vetorial real $M_n(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$. Sejam $P \in M_n(\mathbb{R})$ e T o operador linear de $M_n(\mathbb{R})$ definido por $T(X) = XP$. Mostre que T é um isomorfismo de espaços vetoriais com produto interno se e somente se P é uma matriz ortogonal.

45. Seja $\mathbb{R}_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador rotação em torno da origem de um angulo θ, $0 < \theta < \pi$. Sejam $p\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um produto interno em $\mathbb{R}^2$ e $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Prove que $\mathbb{R}_\theta$ preserva o produto interno p se e somente se existe um número real positivo k tal que $p(x, y) = k\langle x, y\rangle$, para todo x, y em $\mathbb{R}^2$.

46. Classifique a menos de semelhança as matrizes reais ortogonais 4×4.

47. Determine um operador ortogonal que reduz a forma quadrática

$$q(x, y, z) = 2x^2 - y^2 + 2z^2 + 4xy - 2xz + 4yz$$

sobre $\mathbb{R}^3$ (munido do produto interno canônico) a uma soma de quadrados.

48. Sejam $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas formas lineares não-nulas e seja $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(u, v) = f(u)g(v) + f(v)g(u)$. Mostre que $F(u, v)$ é uma forma bilinear não-degenerada se e somente se f e g são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

49. Sejam f e g formas bilineares sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Suponhamos que g é não-degenerada. Prove que existe um único operador linear $T\colon V \to V$ tal que $f(u,v) = g(T(u),v), \ \forall u, v \in V$.

50. Seja f uma forma bilinear não-nula sobre um espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que existem h e g em V^* tais que $f(x,y) = h(x)g(y)$ para todo x e y em V se e somente se f tem posto 1.

51. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Dizemos que uma função $p\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática se $p(\lambda v) = \lambda^2 p(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ e $f(u,v) = \frac{1}{2}[p(u+v) - p(u) - p(v)]$ é uma forma bilinear simétrica.

    (i) Mostre que uma função $p\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática se e somente se existe um operador linear autoadjunto $T\colon V \to V$ tal que $p(v) = \langle T(v), v\rangle$ para todo $v \in V$.

    (ii) Se $q\colon V \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática mostre que existem números reais α e β tais que $\alpha \ \ ||u||^2 \leq q(u) \leq \beta \ \ ||u||^2$ (para todo u em V).

    (iii) Exiba vetores v e w tais que $q(v) = \alpha||v||^2$ e $q(w) = \beta||w||^2$, onde α e β são os valores achados no ítem (ii).