MAT5730 - Álgebra Linear

2ª Lista de Exercícios

1. Mostre que se uma matriz $n \times n$ complexa A tem somente 0 como autovalor então A é nilpotente (isto é, $A^k = 0$ para algum inteiro positivo k).

2. Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$ onde $\dim W_1 = n$ e $\dim W_2 = m$. Seja T a projeção de V em W_1. Determine os autovalores, os autovetores, o polinomio característico e o polinomio minimal de T.

3. Seja A uma matriz complexa $n \times n$ tal que, para todo inteiro positivo k, tem-se traço $(A^k) = 0$. Prove que A é nilpotente.

4. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita e suponhamos que T é um operador linear de V tal que $T^2 = -I$.

   a) Mostre que V possui uma base da forma

   $$\{u_1, u_2, \ldots, u_k, T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_k)\}.$$

   b) Mostre que a operação $(a + ib)u = au + bT(u) \quad (a, b \in \mathbb{R})$ define, juntamente com a adição de V, uma estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial em V.

   c) Se $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, qual é a $\dim_{\mathbb{C}} V$?

5. Seja A uma matriz real cujo polinômio característico é

   $$(x^2 + 1)^2 (x^2 + x + 1)^2.$$

   Determine as possíveis formas racionais de A.

6. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e seja $T \colon V \to V$ um operador linear tal que os únicos subespaços invariantes sob T são $\{0\}$ e V.

   a) Prove que o polinômio minimal de T coincide com o polinômio característico de T e é irredutível.

   b) Prove que todo operador linear de V que comuta com T é um polinômio em T.

   c) Seja $K[T] = \{p(T) \mid p(x) \in K[x]\}$. Prove que $K[T]$ é um corpo.

7. A matriz real $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ tem polinomio característico $f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 5)(x - 7)$. Ache a forma racional $\mathbb{R}$ de A e ache uma matriz real inversível P tal que $P^{-1}AP = \mathbb{R}$.

8. Seja T um operador linear de $\mathbb{R}^4$ tal que:

   (i) O polinômio $x^2 + 3$ é um divisor do polinômio minimal de T.

   (ii) 1 é o único autovalor de T.

   Quais são as possíveis formas racionais de T?

9. Seja $A \in M_n(F)$ onde F é um corpo qualquer. Seja T um operador linear de $M_n(F)$ definido por $T(X) = AX - XA$. Prove que se A é diagonalizável então T é diagonalizável.

10. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo K.

    Seja T um operador linear de V. Prove que T possui n autovalores distintos se e somente se T é diagonalizável e tem um vetor cíclico.

11. Seja T o operador linear de $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação a base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

    Determine operadores lineares D e N de $\mathbb{R}^4$ tais que $T = D + N$, D é diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$.