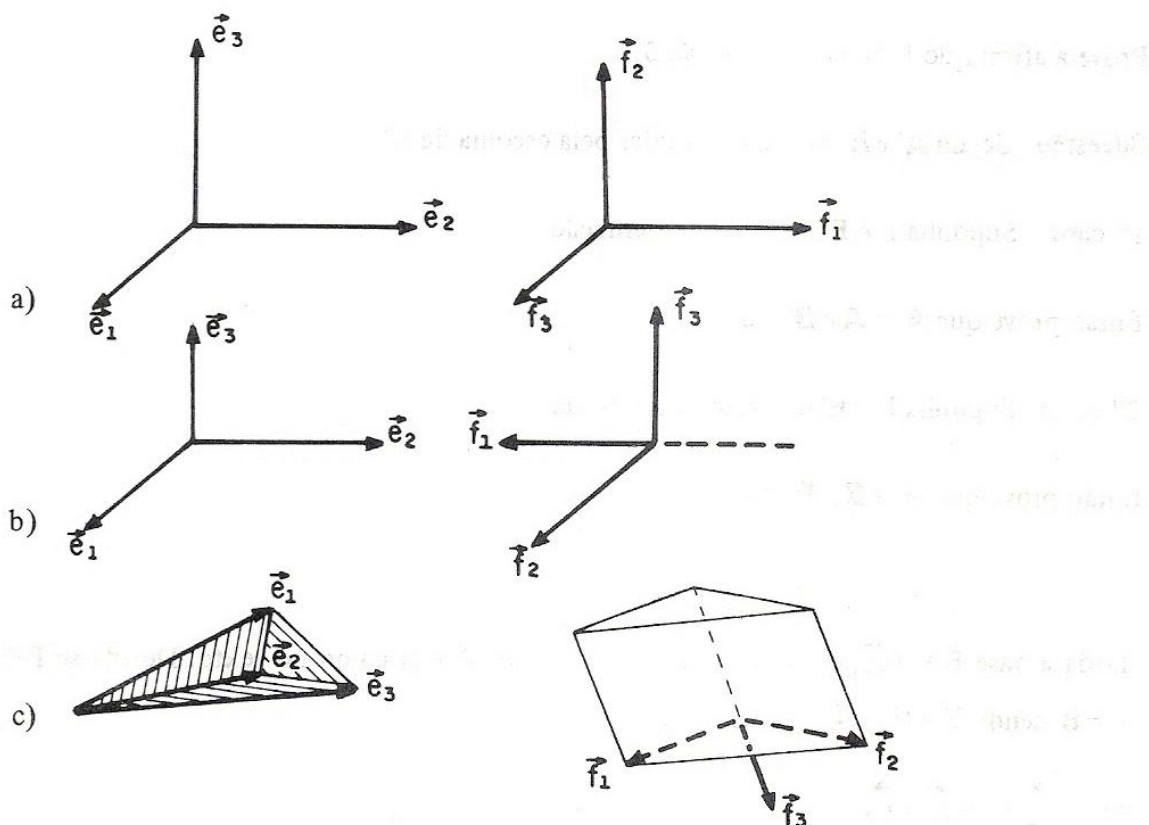


Orientação de V^3

1. Verifique se as bases têm mesma orientação, ou orientação oposta nos casos



2. Idem para $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ nos casos

a) $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$

b) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

c) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_2$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$

3. Prove que “ter mesma orientação” é uma relação de equivalência, isto é:
- E tem mesma orientação que E (propriedade reflexiva);
 - se E tem mesma orientação que F, então F tem mesma orientação que E (propriedade simétrica);
 - se E tem mesma orientação que F e F tem mesma orientação que G, então E tem mesma orientação que G (propriedade transitiva).

4. Prove a afirmação feita na Observação 2.

5. Prove a afirmação feita na Observação 3.

Sugestão Sejam $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}'$ as classes obtidas pela escolha de $\mathbf{E}'$.

1º caso: Suponha E e $\mathbf{E}'$ de mesma orientação.

Então prove que $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

2º caso: Suponha E e $\mathbf{E}'$ de orientação oposta.

Então prove que $\mathbf{A}' = \mathbf{B}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{A}$.

6. Dada a base $\mathbf{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, considere as classes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ como no texto. Decida se $\mathbf{F} \in \mathbf{A}$ ou $\mathbf{F} \in \mathbf{B}$, sendo $\mathbf{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, nos casos

a) $\vec{f}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

$\vec{f}_2 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$

b) $\vec{e}_1 = -2\vec{f}_1$

$\vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \vec{f}_3$

$\vec{e}_3 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$

7. Sendo $\mathbf{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base positiva e $\mathbf{F} = (\alpha\vec{e}_1, \beta\vec{e}_2, \gamma\vec{e}_3)$ também, qual a relação entre os números α, β, γ ?

8. Mostre que, sendo $\mathbf{E} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ e $\mathbf{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$ bases de orientação oposta, e $\vec{r} \parallel \vec{w}$, então $\vec{r} = \lambda \vec{w}$ com $\lambda < 0$ (isto é, $\vec{r}$ e $\vec{w}$ têm sentido contrário). Em particular, se $\vec{r}$ e $\vec{w}$ têm normas iguais, resulta $\lambda = -1$ e portanto $\vec{r} = -\vec{w}$.

Produto Vetorial

É fixada uma base ortonormal positiva $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{v} \wedge \vec{u}$ nos casos

a) $\vec{u} = (6, -2, -4), \quad \vec{v} = (-1, -2, 1).$

b) $\vec{u} = (7, 0, -5), \quad \vec{v} = (1, 2, -1).$

c) $\vec{u} = (1, -3, 1), \quad \vec{v} = (1, 1, 4).$

d) $\vec{u} = (2, 1, 2), \quad \vec{v} = (4, 2, 4).$

2. Calcule o momento em relação ao ponto O da força $\vec{f} = (-1, 3, 4)$, aplicada ao ponto P tal que $\vec{OP} = (1, 1, 1)$ (este momento é $\vec{OP} \wedge \vec{f}$).

3. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ e $\|\frac{1}{3}\vec{u} \wedge \frac{3}{4}\vec{v}\|$.

4. Sendo ABCD um tetraedro regular de lado unitário, calcule $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

5. Calcule a área do paralelogramo ABCD, sendo $\vec{AB} = (1, 1, -1)$ e $\vec{AD} = (2, 1, 4)$

6. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{AB} = (0, 1, 3)$.

7. Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, 3, 3)$.

8. Dados $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$, ache uma base ortonormal positiva $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

(i) $\vec{a} // \vec{u}$, $\vec{a}$ tem mesmo sentido que $\vec{u}$.

(ii) $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e sua primeira coordenada é positiva.

9. Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x} \wedge (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$$

10. Ache $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$, e $\|\vec{x}\| = \sqrt{6}$.

11. Sabe-se que $\vec{x}$ é ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, tem norma $\sqrt{3}$ e, sendo θ a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, tem-se $\cos \theta > 0$. Ache $\vec{x}$.

12. Prove que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$.

13. Prove que

a) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2$

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

14. Prove que $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{v} \wedge \vec{u})$

15. Prove que se $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ então

(a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$

(b) $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = 3(\vec{u} \wedge \vec{v})$

16. Prove que $(\vec{u} - \vec{v}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}$

17. Prove que $(\vec{u} - \vec{t}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{t}) \wedge (\vec{w} - \vec{u}) + (\vec{w} - \vec{t}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2(\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u})$
18. Se $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{t}$ e $\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{t}$ então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são linearmente dependentes. Prove isso.
19. Prove que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.
20. Prove que se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$. Interprete geometricamente.
21. Prove que a altura do $\triangle ABC$ relativa ao lado AB mede $h = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|}$
22. Calcule a distância do ponto C à reta r que passa por dois pontos distintos A e B.
23. Exprima a distância entre duas arestas opostas AB e CD de um tetraedro ABCD em função de $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{AD}$.

Produto Misto

É fixada uma base ortonormal positiva.

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 1)$.
2. Calcule o volume de um paralelepípedo definido pelos vetores $\vec{u} = (2, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$, $\vec{w} = (-2, -1, -1)$.
3. Calcule o volume do tetraedro ABCD dados $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (0, 1, 1)$, $\vec{AD} = (-4, 0, 0)$.
4. Verifique:

$$[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$$

$$\lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}].$$

5. Prove: $[\vec{u} + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}, \vec{v} + \gamma \vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
6. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{w}\| = 3$, e que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é uma base negativa, sendo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dois a dois ortogonais.
7. A medida em radianos do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$, e $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Sendo $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 4$, e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base positiva, ache $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
8. Prove que
- $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$
 - A igualdade ocorrerá se e somente se algum dos vetores for nulo, ou, sendo todos não-nulos, forem dois a dois ortogonais.
9. Prove que se $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente dependentes.
10. Prove:
- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]^2$
 - Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base, então $(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{w}, \vec{w} \wedge \vec{u})$ é base positiva.
11. Prove que a altura do tetraedro ABCD relativa à base ABC é

$$h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$$

Sugestão $\text{Volume} = \frac{1}{3} (\text{área } \triangle ABC) h.$

12. Ache a distância de um ponto D a um plano π que passa pelos pontos não-alinhados A, B, C, conhecendo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

13. a) Prove que se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é base, e $\vec{x} \in V^3$, então

$$\vec{x} = \frac{[\vec{x}, \vec{e}_2, \vec{e}_3]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \vec{e}_1 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_3, \vec{e}_1]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \vec{e}_2 + \frac{[\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2]}{[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]} \vec{e}_3$$

- b) Aplique isto no caso $\vec{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{e}_2 = (2, 0, 1)$, $\vec{e}_3 = (0, 1, 0)$, $\vec{x} = (4, 3, 3)$.

14. Prove que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{x} & \vec{u} \cdot \vec{y} & \vec{u} \cdot \vec{z} \\ \vec{v} \cdot \vec{x} & \vec{v} \cdot \vec{y} & \vec{v} \cdot \vec{z} \\ \vec{w} \cdot \vec{x} & \vec{w} \cdot \vec{y} & \vec{w} \cdot \vec{z} \end{vmatrix}$$

Sugestão Se $MN = P$, então $\det M \cdot \det N = \det P$:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 & * & * \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

15. Calcule o volume do tetraedro OABC, sabendo que OA, OB, OC medem respectivamente 2, 3, 4 e que $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ medem respectivamente 30, 45 e 60 graus.

Sugestão Use o resultado do Exercício 14.

Estudo da Reta

Nos Exercícios 2, 4, 8, 9, 10 e 13 o sistema de coordenadas é suposto ortogonal.

1. São dados os pontos $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.
 - a) Escreva equações vetorial e paramétricas para a reta determinada pelos pontos B e C, e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D = (3, 1, 4)$ pertence a essa reta?
 - b) Verifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.
 - c) Escreva equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.
2. Dados os pontos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 2, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$, obtenha equações paramétricas das bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, relativas ao vértice C (veja o Exercício 4 a), do Capítulo 4).
3. Obtenha equações paramétricas para os três eixos coordenados.
4. Dados os pontos $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$, determine P sobre a reta que passa por A e B tal que o comprimento de PB seja o triplo do comprimento de PA.
5. Escreva equações paramétricas para a reta r, que passa pelo ponto $A = (2, 0, -3)$ e:

- a) é paralela à reta

$$s: \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}$$

- b) é paralela à reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, 4)$ e $C = (2, 1, 3)$

c) é paralela à reta s' :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

6. Passe para a forma simétrica, quando for possível, as equações obtidas no exercício anterior.

7. Verifique se $r = s$ nos casos:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad s: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

$$\text{c) } r: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, -\frac{1}{2}) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$s: X = (0, 1, \frac{1}{2}) + \mu(-2, 0, 1) \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

8. Dados $A = (0, 2, 1)$, $r: X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, ache os pontos de r que distam $\sqrt{3}$ de A . Em seguida, diga se a distância do ponto A à reta r é maior, menor, ou igual a $\sqrt{3}$, e por quê.

9. Idem para $A = (1, 1, 1)$, a distância sendo $\sqrt{11}$, e

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

10. Dada a reta $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$ e os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, ache o ponto de r equidistante de A e B .

11. Ache equações paramétricas da reta que passa por $A = (3, 3, 3)$ e é paralela à reta BC , sendo $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, -1)$.

12. Dois pontos efetuam movimentos descritos pelas equações

$$X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Pergunta-se se as trajetórias são concorrentes e se haverá colisão.

13. Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

a) $A = (1, 2, 1), \quad B = (1, 2, 3)$

b) $A = (1, 3, 2), \quad B = (2, 2, 2)$

c) $A = (3, 0, 2), \quad B = (2, 1, 2)$

d) $A = (3, -2, 1), \quad B = (0, 0, 1)$

Estudo do Plano

1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD , onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

2. Verifique (e explique por que) se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos:

a) $\pi_1: X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1)$

$\pi_2: X = (1, 2, 1) + \alpha(-1, 1, -2) + \beta(-3, 4, -6)$

b) $\pi_1: X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$

$\pi_2: X = (1, 6, 2) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(2, 3, -1)$

c) $\pi_1: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$

$\pi_2: X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1) + \mu(0, -1, 1)$

d) $\pi_1: X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$

$\pi_2: X = (0, 1, 1) + \alpha(1, 3, -5) + \beta(1, -1, 3)$

3. Decomponha o vetor $\vec{v} = (1, 2, 4)$ em duas parcelas, sendo uma delas paralela ao plano $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e outra paralela à reta $X = (0, 0, 0) + \nu(2, 1, 0)$.

4. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos π_1 e π_2 , e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B. Dados:

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$

$\pi_2: X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 0) + \mu(-2, -1, -1)$.

5. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

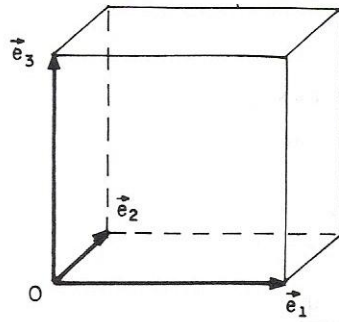
6. Escreva equações vetoriais para os planos bissetores dos diedros determinados pelos planos coordenados (são 6 bissetores!). Suponha que o sistema é ortogonal.

7. Obtenha equações paramétricas do plano π que passa pelo ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano

$\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$

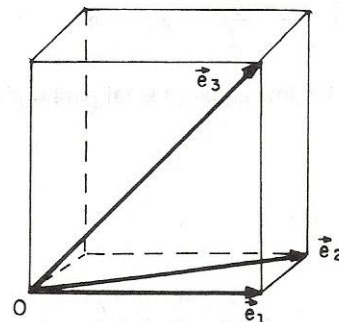
Equação geral de um plano

1. Faça um esboço dos planos com equações gerais dadas abaixo, relativamente aos sistemas de coordenadas ilustrados nas figuras.



(I)

CUBOS



(II)

- a) $x - 2 = 0$ b) $y + 1 = 0$ c) $z + 4 = 0$ d) $x + y - 1 = 0$
e) $x - z = 0$ f) $y - z - 2 = 0$ g) $x + y + z - 1 = 0$

2. Passe para a forma paramétrica as equações gerais dos planos do exercício anterior.
3. Obtenha equações gerais dos planos coordenados e dos planos bissetores dos diedros determinados por eles (suponha o sistema ortogonal).

4. Verifique se $\pi_1 = \pi_2$ nos seguintes casos (explique por que):

a) $\pi_1: x - 3y + 2z + 1 = 0$, $\pi_2: 2x - 6y + 4z + 1 = 0$

b) $\pi_1: x - \frac{y}{2} + 2z - 1 = 0$, $\pi_2: -2x + y - 4z + 2 = 0$

5. Obtenha equações gerais para os planos π descritos abaixo:

a) π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

b) π passa por $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, onde $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

c) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

d) π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

6. Dadas as retas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z \quad \text{e} \quad s: x-1 = y = z$$

obtenha uma equação geral para o plano determinado por r e s .

7. Idem, sendo

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4} \quad \text{e} \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$$

8. Obtenha uma equação geral do plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

9. Idem,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$$

10. Seja π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. Seja π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v} = (0, 1, -1)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$. Seja π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$.

a) Escreva equações gerais de π_1 , π_2 e π_3

b) Mostre que a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ se reduz a um único ponto; determine-o.

11. Verifique se a reta r está contida no plano π nos seguintes casos:

a) $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0)$, $\pi: x + 2y + 3z = 1$

b) $\pi: X = (1, 4, 1) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(-1, 2, -1)$ e r passa pelos pontos $A = (2, 3, 2)$ e $B = (0, 0, 1)$

c) $r: x - 1 = 2y = 4 - z$ e $\pi: x + 2y - 2z + 1 = 0$

12. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e $r: X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

a) Mostre que $P \notin r$.

b) Obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P .

13. Verifique, em cada um dos casos seguintes, se as retas r e s são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano determinado por elas.

$$a) \quad r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases} \quad s : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{2+z}{5}$$

$$b) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

4. Seja $ax + by + cz + d = 0$ uma equação geral de um plano π . Suponhamos $a \neq 0$. Prove que

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}\lambda - \frac{c}{a}\mu - \frac{d}{a} \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

são equações paramétricas de π .

Sugestão Verifique se elas são equações paramétricas de algum plano π_1 . Mostre que $\pi_1 \subset \pi$, donde $\pi_1 = \pi$.

Vetor normal a um plano

Está fixado um sistema *ortogonal* de coordenadas.

1. Obtenha um vetor normal ao plano π nos seguintes casos:

a) π passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$

b) π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

c) π tem equação geral $x - 2y + 4z + 1 = 0$

2. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo a $\pi_1 : x - y + 2z + 1 = 0$.

3. Dê uma equação geral do plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

4. Dê uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r: X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

5. Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

6. Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano $\pi: 2x + y - z = 2$.

7. Escreva equações paramétricas da reta interseção dos planos

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

8. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$

9. Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que são equidistantes de $A = (1, -1, 2)$ e $B = (4, 3, 1)$ é um plano. Mostre em seguida que esse plano passa pelo ponto médio de AB e é perpendicular ao segmento AB .

10. (Generalização do Exercício 9). Prove que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de dois pontos distintos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um plano que passa pelo ponto médio do segmento AB e é perpendicular a ele. Esse plano é chamado *plano mediador* do segmento AB .

11. Mostre que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam dos pontos $A = (2, 1, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (0, 2, 1)$ é uma reta, perpendicular ao plano que passa por A, B e C . Dê equações paramétricas dessa reta.

Feixe de planos

1. Obtenha uma equação geral do plano π que passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e contém a reta

$$r: X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$$

2. Prove que na equação (11), os coeficientes não podem ser simultaneamente nulos.
3. Prove que se $r = \pi_1 \cap \pi_2$ e se $r \subset \pi$, existem α e β reais, não ambos nulos, tais que (10) é uma equação de π .

Sugestão: O sistema formado pelas equações de π_1 , π_2 e π é indeterminado. Como as duas primeiras são independentes, a terceira é combinação linear delas.

4. Obtenha uma equação geral do plano π , que contém o eixo dos x e é perpendicular à reta $r: X = (0, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1)$ (sistema ortogonal).
5. Ache uma equação geral do plano π , que contém $r: X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 1)$ e é perpendicular a $s: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0)$ (sistema ortogonal).

Posição relativa de retas e planos: Reta e Reta

1. Estude a posição relativa das retas r e s nos seguintes casos:

a) $r: X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ $s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

c) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ $s: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

d) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ $s: \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$

e) $r: X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ $s: X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

f) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ $s: x - y = \frac{z-1}{4}$

g) $r: \frac{x+1}{2} = y = -z$ $s: \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

h) $r: x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$ $s: X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

2) Calcule $m \in \mathbb{R}$ para que

- a) r e s sejam paralelas;
- b) r , s e t sejam paralelas a um mesmo plano;
- c) r e t sejam concorrentes;
- d) s e t sejam coplanares;
- e) r e s sejam reversas.

São dadas

$$r: \begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases} \quad s: x = \frac{y}{m} = z \quad t: -x + z = y = -z - 1$$

- 3. No Exercício 1, obtenha, quando for o caso, uma equação geral para o plano determinado pelas retas r e s .
- 4. Nos itens do Exercício 1 em que r e s são reversas, obtenha uma equação geral para o plano que contém r e é paralelo a s .
- 5. Determine m para que as retas $r: X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $s: X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ sejam coplanares, e nesse caso estude sua posição relativa.
- 6. Determine α e β reais para que as retas

$$r: X = (1, \alpha, 0) + \lambda(1, 2, 1) \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = z - 2 \\ y = \beta z - 1 \end{cases}$$

sejam coplanares e obtenha nesse caso uma equação geral para o plano delas.

Posição relativa de retas e planos: Reta e Plano

- 1. Estude a posição relativa da reta r e do plano π nos seguintes casos:

a) $r: X = (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, $\pi: x - y - z = 2$

b) $r: \frac{x-1}{2} = y = z$, $\pi: X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$

c) $r: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \pi: X = (0, \frac{1}{2}, 0) + \lambda(1, -\frac{1}{2}, 0) + \mu(0, 1, 1)$

d) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \quad \pi: x + y = 2$

e) $r: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$
 $\pi: X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$

f) $r: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}, \quad \pi: 3x - 6y - z = 0$

2. Calcule m para que a reta $r: X = (1, 1, 1) + \lambda(2, m, 1)$ seja paralela ao plano

$$\pi: X = (0, 0, 0) + \alpha(1, 2, 0) + \beta(1, 0, 1).$$

3. Calcule $m, n \in \mathbb{R}$ para que a reta $r: X = (n, 2, 0) + \lambda(2, m, m)$ esteja contida no plano $\pi: x - 3y + z = 1$.

4. Calcule m para que a reta $r: \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja transversal ao plano $\pi: x + my + z = 0$.

5. Ache o ponto P onde r fura π nos casos dos Exercícios Resolvidos 1 e 3.

Posição relativa de retas e planos: Plano e Plano

1. Estude a posição relativa de π_1 e π_2 nos seguintes casos:

a) $\pi_1: X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(-1, 2, 1)$
 $\pi_2: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, -1, -2)$

b) $\pi_1: 2x - y + 2z - 1 = 0$
 $\pi_2: 4x - 2y + 4z = 0$

c) $\pi_1: x - y + 2z - 2 = 0$
 $\pi_2: X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$

2. Calcule m para que os planos

$$\pi_1: X = (1, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1) + \mu(1, 1, m)$$

e

$$\pi_2: 2x + 3y + 2z + n = 0$$

sejam paralelos distintos, nos casos:

a) $n = -5$

b) $n = 1$

3. Mostre que os planos

$$\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(-1, m, 1) + \mu(2, 0, 1)$$

$$\pi_2 : X = (1, 2, 3) + \alpha(m, 1, 0) + \beta(1, 0, m)$$

são transversais, para todo $m \in \mathbb{R}$.

4. Desenvolva um método para estudar a posição relativa dos planos $\pi_1 : X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ e $\pi_2 : X = B + \lambda \vec{t} + \mu \vec{w}$, sem passar suas equações para a forma geral.

Sugestão: Discuta a dependência linear das triplas $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ e $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.