MAT2110 - Cálculo Diferencial e Integral I

3ª Lista de Exercícios

Máximos e mínimos

1. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$. Resp. $x_0 = 1$.

   (b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$. Resp$-1$; $\sqrt{2}$.

   (b) $f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^3},\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$. Resp$\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x,\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$. Resp4; 1.

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2},\ -1 \leq x \leq 2$. (CUIDADO!) Resp $\sqrt[3]{-3}$; 0.

   (e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|,\ 0 \leq x \leq 3$. Resp 0; 27.

3. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

   Resp (5,0) e (-5,0)

4. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1). Resp $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)$

5. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R. Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.

6. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter?Resp $\frac{\pi}{4}$

7. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é 2/3 da altura do triângulo.Resp (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\dfrac{\sqrt{3}L}{9 + 4\sqrt{3}}$.

8. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

   (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado.Resp (a) 1; (b) $4/\pi$

Integrais Indefinidas

Calcule as integrais indefinidas abaixo:

1. $\int \frac{x^7+x^2+1}{x^2}\,dx$
2. $\int e^{2x}\,dx$
3. $\int \cos\ 7x\ dx$
4. $\int \mathrm{tg}^2\, x\ dx$
5. $\int \frac{7}{x-2}\,dx$
6. $\int \mathrm{tg}^3 x\ \sec^2 x\ dx$
7. $\int \frac{\mathrm{sen}^{\,3} x}{\sqrt{\cos\ x}}\,dx$
8. $\int \mathrm{tg}\, x\ dx$
9. $\int \mathrm{tg}^3 x\ dx$
10. $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$
11. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$
12. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$
13. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$
14. $\int \sec x\ dx$
15. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$
16. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+1}\,dx$
17. $\int \frac{4x+8}{2x^2+8x+20}\,dx$
18. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$
19. $\int \frac{dx}{(\mathrm{arcsen}x)\ \sqrt{1-x^2}}$
20. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$
21. $\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{1+\cos^2 x}\,dx$
22. $\int e^{x^3} x^2\,dx$
23. $\int e^x\ \sqrt[3]{1+e^x}\,dx$
24. $\int \frac{\mathrm{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
25. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}\,dx$
26. $\int 2x(x+1)^{2006}\,dx$
27. $\int x\,\mathrm{sen}\,x\ dx$
28. $\int e^x\ \cos x\ dx$
29. $\int x^r\ \ln x\ dx, r\in \mathbb{R}$
30. $\int (\ln x)^2\ dx$
31. $\int xe^{-x}\,dx$
32. $\int x\mathrm{arctg}\, x\ dx$
33. $\int \mathrm{arcsen}x\ dx$
34. $\int \sec^3 x\ dx$
35. $\int \cos^2 x\,dx$
36. $\int \mathrm{sen}^{\,2} x\ \cos^3 x\ dx$
37. $\int \mathrm{sen}^{\,2} x\ \cos^2 x\ dx$
38. $\int \frac{1-\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx$
39. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$
40. $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$
41. $\int \frac{3x^2+4x+5}{(x-1)^2(x-2)}\,dx$
42. $\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$
43. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
44. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$
45. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$

47. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

48. $\int \sqrt{x}\, \ln x\ dx$

49. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

50. $\int \dfrac{x}{x^2-4}\, dx$

51. $\int \dfrac{3x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\, dx$

52. $\int \sqrt{a^2+b^2x^2}\, dx$

53. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}\, dx$

54. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\, dx$

55. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$

56. $\int \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx$

57. $\int \cos^3 x\, dx$

58. $\int \operatorname{sen}^5 x\ dx$

59. $\int \dfrac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}\, dx$

60. $\int \operatorname{sen}^3 \left(\dfrac{x}{2}\right) \cos^5 \left(\dfrac{x}{2}\right)\, dx$

61. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^5 x\, \cos^3 x}\, dx$

62. $\int \operatorname{sen}^4 x\ dx$

63. $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^5 x\, dx$

64. $\int \operatorname{sen}^2 x\, \cos^4 x\ dx$

65. $\int \cos^6(3x)\, dx$

66. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\, dx$

67. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\, \cos^4 x}\, dx$

68. $\int \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\, dx$

69. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\, dx$
(**Sugestão:** Faça $u = \sqrt[6]{x}$)

70. $\int \dfrac{x+1}{x^2(x^2+4)^2}\, dx$

71. $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx$

72. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{2x-x^2}} dx$

73. $\int \dfrac{4x^2-3x+3}{(x^2-2x+2)(x+1)}\, dx$

74. $\int \dfrac{1}{1+e^x}\, dx$

75. $\int \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx$

76. $\int x^5 e^{-x^3}\, dx$

77. $\int \dfrac{x+1}{x^2(x^2+4)}\, dx$

Aplicações da Integral Definida

1. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = x^3 - 2x + 1$ e $g(x) = -x + 1$, com $-1 \le x \le 1$. (Resp.: $\dfrac{1}{2}$)

2. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde

   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2 - 4\},\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 12 - 3x^2\}$ e

   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 3x^2 + 12x + 12\}$ (Resp.: $\dfrac{104}{3}$)

3. Desenhe a região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2 - 1,\ y \le x + 1$ e $y \ge -x^2 - 3x - 2\}$ e calcule a sua área. (Resp.: $\dfrac{107}{24}$)

4. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região. (Resp.: $\dfrac{27}{4}$)

5. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$.

   (Resp.: $\frac{8}{5}$)

6. Calcule $\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$, interpretando-a como uma área. (Resp.: $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$)

7. Calcule $\int_{-1}^1 x^3 \text{sen}\,(x^2 + 1)dx$. (Resp.: 0)

8. Encontre o volume de uma pirâmide cuja base é o quadrado de lado L e cuja altura é h.

9. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$

   (Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (5 - x^2)dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5 - x^2)dx \right] = ...$)

   b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{6}$)

   c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \ \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$ (Resp.: $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$)

   d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \leq 1 \text{ e } 1/x \leq y \leq 4/x^2\}$ (Resp.: $\frac{5\pi}{6}$)

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$, da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$. (Resp.: $\frac{32}{3}\pi$)

11. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \ \leq 1 \text{ e } \ln(x + 1) + 2 \leq y \leq e^x + 4\}$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de A em torno da reta $y = 2$.

    (Resp.: $\pi \left[\int_0^1 (e^x + 2)^2 dx - \int_0^1 \ln^2(x + 1)dx \right] = ...$)

12. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x, \quad -3 \leq x \leq 4$. (Resp.: $\text{senh}4 + \text{senh}3$)

Miscelânea

1. Calcule $g'(x)$ onde

   (a) $g(x) = \int_{\cos x}^{\text{sen} x} e^{t^2} dt$

   (b) $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \text{sen}\,(t^2)dt$

2. Calcule $\int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}\, x\ \cos x}{x + 1}dx$ em termos de $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x + 2)^2}dx$.

   (Resp.: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi + 2} + \frac{1}{2} - A\right)$)

3. Considere a função:
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \qquad\qquad \text{para todo } x > 0.$$
Prove que para todo $a > 0$ e $x > 0$ vale:
(a) $F'(x) = \dfrac{1}{x}$
(b) $F(ax) = F(a) + F(x)$
(Observe que poderíamos ter definido a função **logaritmo natural** como sendo essa função F).

4. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja
$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t) f(t) dt$$
Prove que $\begin{cases} y'' + y = f(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

RESPOSTAS DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

Integrais Indefinidas

1) $\dfrac{x^6}{6} + x - \dfrac{1}{x} + k$

2) $\dfrac{e^{2x}}{2} + k$

3) $\dfrac{\operatorname{sen} 7x}{7} + k$

4) $\operatorname{tg} x - x + k$

5) $7 \ln|x-2| + k$

6) $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + k$

7) $2\sqrt{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{5} - 1\right) + k$

8) $-\ln|\cos x| + k$

9) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + k$

10) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + k$

11) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + k$

12) $x - \operatorname{arctg} x + k$

13) $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + k$

14) $\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

15) $2\sqrt{1+\ln x} + k$

16) $\dfrac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+1)^6} + k$

17) $\ln(2x^2+8x+20)+k$

18) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+k$

19) $\ln|\operatorname{arcsen} x|+k$

20) $\ln(1+e^x)+k$

21) $-\ln(1+\cos^2 x)+k$

22) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+k$

23) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+e^x)^4}+k$

24) $-2\cos\sqrt{x}+k$

25) $e^{\operatorname{arctg} x}+k$

26) $2(x+1)^{2005}\left(\dfrac{x+1}{2006}-\dfrac{1}{2005}\right)+k$

27) $-x\cos x+\operatorname{sen} x+k$

28) $\dfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x+\cos x)+k$

29) $\begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1}\ln x-\dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2}+k \text{ se } r\neq -1 \\ \frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+k \text{ se } r=-1 \end{cases}$

30) $x(\ln x)^2-2(x\ln x-x)+k$

31) $(-x-1)e^{-x}+k$

32) $\dfrac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x+k$

33) $x\ \operatorname{arcsen}\ x+\sqrt{1-x^2}+k$

34) $\dfrac{1}{2}\sec\ x\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{2}\ln|\sec\ x+\operatorname{tg} x|+k$

35) $\dfrac{1}{2}(x+\operatorname{sen}\ x\cos\ x)+k$

36) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{3}-\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5}+k$

37) $\dfrac{1}{8}\left(x-\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)+k$

38) $\ln|1+\operatorname{sen} x|+k$

39) $6\ln|x-1|-25\ln|x-2|+22\ln|x-3|+k$

40) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+k$

41) $-22\ln|x-1|+\dfrac{12}{x-1}+25\ln|x-2|+k$

42) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{35}{12}\ln|x-2|+\dfrac{61}{24}\ln\left[1+\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$

43) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-\dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+k$

44) $\dfrac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{8}\operatorname{arcsen} x+k$

45) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+k$

46) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+k$

47) $\ln|\sqrt{5-2x+x^2}+x-1|+k$

48) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\dfrac{2}{3}\right)+k$

49) $\frac{x}{2}\left[\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + k$

50) $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 4| + k$

51) $2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$

52) $x\sqrt{a^2+b^2x^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$

53) $\frac{1}{b}\ln\left[\frac{bx}{a} + \frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{a}\right] + k$

54) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$ +k

55) $\left(\frac{x+1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x+1}{2}\right) + k$

56) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right) + k$

57) $\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k$

58) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + k$

59) $\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x} - 2\ln|\operatorname{sen} x| + k$

60) $\frac{1}{4}\cos^8\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\cos^6\left(\frac{x}{2}\right) + k$

61) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + k$

62) $\frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + k$

63) $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - 2\frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + k$

64) $\frac{x}{16} - \frac{\operatorname{sen}(4x)}{64} + \frac{\operatorname{sen}^3(2x)}{48} + k$

65) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}(6x) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}(12x) - \frac{\operatorname{sen}^3(6x)}{144} + k$

66) $-\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + k$

67) $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{cotg}(2x) + k$

68) $\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + k$

69) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x} - 1| + k$

70) $\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + k$

71) $\frac{-\operatorname{arctg} x}{x} + \ln|x| - \ln\sqrt{1+x^2} + k$

72) $\frac{3}{2}\operatorname{arcsen}(x-1) - \left(\frac{x+3}{2}\right)\sqrt{2x-x^2} + k$

73) $2\ln|x+1| + \ln(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arctg}(x-1) + k.$