

MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I

2ª Lista de Exercícios

1. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

2) $f(x) = \frac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$

3) $f(x) = \frac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x) = x \operatorname{sen}(\sqrt{x^5} - x^2)$

5) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$

6) $f(x) = \sqrt[6]{x} \operatorname{tg}^2 x$

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + \operatorname{cosec} x}{x^3 + 3x^2}$

8) $f(x) = \sec(\sqrt{x^2+1})$

9) $f(x) = \frac{x^2 \operatorname{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x}$

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$

11) $f(x) = \frac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

12) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

13) $f(x) = \frac{2x}{(x + \sqrt{x})^{\frac{1}{3}}}$

14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$

15) $f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{sen}^{33} x \cos^{17} x}$

16) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos(x^2)}$

17) $f(x) = \frac{x \operatorname{arctg}(x^3+1)}{x^2 + \cos(50x)} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$

2. Verifique que:

(a) $\frac{d}{dx} [(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}] = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

(b) $\frac{d}{dx} \left[\frac{-1}{2} \operatorname{arcsen} \left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x^3 + x^2|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é derivável em 0? Resp.: Sim .

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in]0, +\infty[$. Calcule, em termos de $f'(a)$, o limite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$. Resp.: $2\sqrt{a} f'(a)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em $x = 0$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e não derivável em $x = 0$. Calcule a derivada de $h(x) = f(x)g(x)$ no ponto $x = 0$. Resp.: 0.

6. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência. Resp.: $(3, -3)$.

7. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

Resp.: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

8. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = xf(x+1 + \operatorname{sen} 2x)$. Calcule $g''(x)$. Supondo $f'(1) = -2$, calcule $g''(0)$. Resp.: -8 .

9. Seja $f(x) = |x^3|$. Calcule $f''(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f'' é derivável no ponto $x_0 = 0$? Justifique. Resp.: Não .

10. Sabe-se que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3 é $x + 2y = 6$. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = (f(\sqrt{9 + 4x}))^2$. Determine $g'(0)$.
 Resp.: -1 .
11. Sejam $f(x) = 2x + \cos x$ e g a função inversa de f . Admitindo g derivável, determine $g'(1)$. Resp.: $\frac{1}{2}$.
12. Sejam $f(x) = \frac{7x^3 - 1}{x^2 + 1}$, para $x > 0$ e g a função inversa de f . Admitindo g derivável, verifique se a reta tangente ao gráfico de g no ponto $(3, g(3))$ é normal à reta $2y + 15x + 1 = 0$. Resp.: Sim.
13. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e g a função inversa de f . Admitindo g derivável até a segunda ordem, calcule $g''(0)$. $\frac{-3}{256}$.
14. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 = y^3(2 - y)$. Admitindo f derivável, determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$. $y = x$.
15. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $x^2 + xy + y^2 = 3$. Admitindo f derivável, determine as retas tangentes ao gráfico de f que são normais à reta $x - y + 1 = 0$.
 Resp.: $y + x = 2$; $y + x = -2$.
16. Seja $y = f(x)$ uma função dada implicitamente pela equação $\arctg(y^2) + 2xy + 27 = 3x^2$. Admitindo f derivável em seu domínio I , onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ contido em $] -5, 1[$, determine a equação da reta que é normal ao gráfico de f e paralela à reta $3y + x = 1$. Resp.: $3y + x + 3 = 0$.
17. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.
- (a) Mostre que h é injetora.
- (b) Calcule $h^{-1}(1)$. Resp: 0
- (c) Admitindo (h^{-1}) derivável, determine $(h^{-1})'(1)$. Resp: $\frac{1}{2}$
- Resp: $5y = 6x + 6$
18. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:
- a) $\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (cosseno hiperbólico) b) $\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (seno hiperbólico)
- c) $f(x) = e^{(e^x)}$ d) $f(x) = x^e + e^x$
- e) $f(x) = e^{1/x^2} + \frac{1}{e^{(x^2)}}$ f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$
- g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ h) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$ j) $f(x) = 2^{(x^2)} + 3^{2x}$

$$\text{k)} f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$$

$$\text{l)} f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\operatorname{sen} x}$$

$$\text{m)} f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$$

$$\text{n)} f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$$

$$\text{o)} f(x) = \frac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$$

$$\text{p)} f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x^5}$$

$$\text{q)} f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$$

$$\text{r)} f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$$

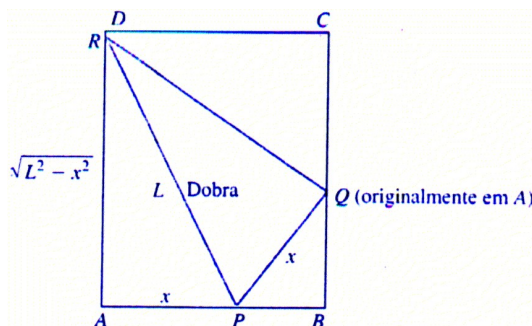
$$\text{s)} f(x) = \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$$

$$\text{t)} f(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

19. (*Expansão Adiabática*) Quando certo gás composto sofre uma expansão adiabática, a sua pressão p e seu volume V satisfazem à equação $pV^{1,3} = k$, onde k é uma constante. Mostre que $-V \frac{dp}{dt} = 1,3p \frac{dV}{dt}$.
20. De um petroleiro quebrado vaza um grande volume V de óleo num mar calmo. Após a turbulência inicial ter acabado, o petróleo se expande num contorno circular de raio r e espessura uniforme h , onde r cresce e h decresce de um modo determinado pela viscosidade e flutuabilidade do óleo. Experiências de laboratório sugerem que a espessura é inversamente proporcional à raiz quadrada do tempo decorrido: $h = \frac{c}{\sqrt{t}}$. Mostre que a taxa $\frac{dr}{dt}$ com que o petróleo se expande é inversamente proporcional a $t^{3/4}$.
21. Num certo instante t_0 , a altura de um triângulo cresce à razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de 2cm²/min. No instante t_0 , sabendo que sua altura é 10cm e sua área é 100cm², qual a taxa de variação da base do triângulo?
Resp.: -1,6cm/min.
22. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual à três vezes a altura. Quando a altura do monte é de 1,2m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de 0,081m³/min. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante?
Resp.: $\frac{1}{40\pi}$ m/min.
23. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0 , o seu volume cresce a uma taxa de 10cm³/min. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo?
Resp.: $\frac{4}{3}$ cm²/min.
24. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de 1,8m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a 1,2m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.
Resp.: 3,6m/s; 0,9m/s.

25. Uma tina de água tem 10m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézóide isósceles com 30cm de comprimento na base, 80cm de extensão no topo e 50cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2\text{m}^3/\text{min}$, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30cm de profundidade? Resp.: $\frac{10}{3}\text{cm}/\text{min}$.

26. (*Escada deslizante*) Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede (veja figura). Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 metros da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo.



- (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?
- (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.
- (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

Resp.: (a) $\frac{7}{12}\text{pes/s}$; (b) $\frac{527}{24}\text{pes}^2/\text{s}$; (c) $\frac{1}{12}\text{rad/s}$.

27. Dois corredores iniciam uma corrida ao mesmo tempo e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles têm a mesma velocidade.

28. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:

- (a) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$
- (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a \geq 1 \text{ e } b \geq 1.$
- (c) $\left| \ln \frac{a}{b} \right| \leq |a - b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } a \geq 1 \text{ e } b \geq 1.$
- (d) $b^b - a^a > a^a(b - a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ com } 1 \leq a < b.$
- (e) $e^x - e^y \geq x - y$, para todo x, y com $x > y > 0$.

29. Seja f uma função derivável em um intervalo $]a, +\infty[$ e suponha que $a < 0$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x, \quad \forall x > 0$.

30. Mostre que $f(x) = (1+x)^{1/x}$ é estritamente decrescente para $x > 0$ e conclua que $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

31. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \quad \forall x > 1$

(b) $e^\pi > \pi^e$

(c) $\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} > \frac{b}{a}$ sempre que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \frac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \quad \forall x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ se $x > 0$

(f) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2), \quad \forall x > 0$

32. Seja f derivável em $\mathbb{R}$ e seja g dada por $g(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x \neq 0$. Suponha que p é ponto de máximo local de g . Prove que $pf'(p) - f(p) = 0$. Prove que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p passa pela origem.

33. Determine a constante a tal que $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenha:

(a) Um mínimo local em $x = 2$.

(b) Um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que f não terá máximo local para nenhum valor de a .

Resp: (a) 16 ; (b) -54

34. Determine c para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

Resp: $c < -27$ ou $c > 5$.

35. Mostre que a equação $3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

36. Seja $n \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{nx-1}{nx+1}\right)^x = 4$. Determine n .

Resp: $-1/\ln 2$

37. Calcule, caso exista

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg} \pi x} \quad \text{Resp: } 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}} \quad \text{Resp: } 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} \quad \text{Resp: } 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}} \quad \text{Resp: } 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}} \quad \text{Resp: } 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \ln x, \quad p > 0 \quad \text{Resp: } 0$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen} \left(\frac{p}{x} \right)$ Resp: p

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right)$ Resp: $1/6$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right]$ Resp: 1

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$ Resp: 1

k) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{1/x}$ Resp: e^4

m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$ Resp: 1

n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]$ Resp: $+\infty$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$ Resp: $2/3$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$ Resp: 1

r) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ Resp: e^2

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \operatorname{sen} x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2} \right)$ Resp: 3

t) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$ Resp: $-\frac{1}{2}$

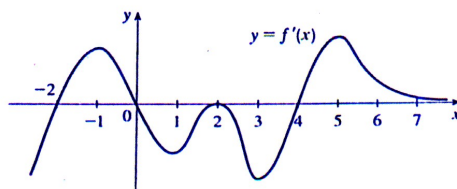
u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$ Resp: 0

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$ Resp: e

x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}]$ Resp: 1

y) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

38. Seja f uma função cuja derivada tem o gráfico esboçado na figura abaixo:



(a) Em que intervalos f é crescente ou decrescente?

(b) Para quais valores de x f tem um máximo ou mínimo local?

(c) Em que intervalos f tem concavidade para cima ou para baixo?

(d) Ache os pontos de inflexão de f .

(e) Assumindo que f seja contínua e que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f .

39. Esboce o gráfico das funções abaixo e dê as equações das assíntotas, quando existirem.

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

e) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$

f) $f(x) = \left(3 - \frac{6}{x}\right)e^{2/x}$

g) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

i) $f(x) = e^x - e^{3x}$

j) $f(x) = x - 3 \ln x - \frac{2}{x}$

40. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(b) Determine, em função de k , o número de soluções da equação $ke^x = x^2$.

Resp: não há soluções se $k < 0$; uma solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; duas soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; três soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$.

41. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x) = \frac{e^x}{x}$ no intervalo $]0, +\infty[$. *Resp:* $x_0 = 1$.

(b) Prove que $\frac{e^{a+b}}{ab} \geq e^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

42. Achar, caso existam, os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x) = \sin x - \cos x$, $x \in [0, \pi]$. *Resp:* -1 ; $\sqrt{2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{3+2x-x^3}$, $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. *Resp:* $\sqrt{\frac{17}{8}}$; $\sqrt{3 + \sqrt{\frac{32}{27}}}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$. *Resp:* 4 ; 1 .

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, $-1 \leq x \leq 2$. (CUIDADO!) *Resp:* $\sqrt[3]{-3}$; 0 .

(e) $f(x) = |x^4 - 2x^3|$, $0 \leq x \leq 3$. *Resp:* 0 ; 27 .

43. Mostre que a equação $x^3 - 6x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-1, 1]$.

44. Suponha que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0, 1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo $x \in [0, 1]$.

45. Seja $f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}$, para $x \geq 0$. Mostre que 1 é a única raiz de f em $]0, +\infty[$, que $f(2) > 0$ e que $f(1/2) < 0$. Conclua que $f(x) > 0$ em $]1, +\infty[$ e que $f(x) < 0$ em $]0, 1[$.

46. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e suponha que $x_0 \in \mathbb{R}$ é o único ponto crítico de f . Prove que, se x_0 for ponto de mínimo local (máximo local) de f , então x_0 será o único ponto de mínimo (máximo) global de f .

47. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ é mínima?

Resp: $(5, 0)$ e $(-5, 0)$

48. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de $(0, 1)$. *Resp:* $\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

49. Um triângulo isóceles está circunscrito a um círculo de raio R . Se x é a altura do triângulo, mostre que sua área é mínima quando $x = 3R$.
50. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x , onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter? *Resp:* $\frac{\pi}{4}$
51. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo. *Resp:* (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\frac{\sqrt{3}L}{9 + 4\sqrt{3}}$.
52. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata? (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado. *Resp:* (a) 1; (b) $4/\pi$
53. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ . Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bola. Então r é dado por $r = \frac{2v^2}{g} \sin \theta \cos \theta$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo? *Resp:* $\theta = \frac{\pi}{4}$
54. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.
Resp: altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$.
Resp: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi+12}}$.
55. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? *Resp:* $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.
56. Um papel de filtro circular de raio a deve ser transformado em um filtro cônico cortando um setor circular e juntando as arestas CA e CB . Ache a razão entre o raio e a profundidade do filtro de capacidade máxima. *Resp:* $\sqrt{2}$

