MAT5851 – Geometria Riemanniana
Lista de exercícios 4 – 25/05/2006

1. (*Teorema de Schur*) Seja M uma variedade Riemanniana conexa com $\dim M \geq 3$. Suponha que, para cada $p \in M$, todas as curvaturas seccionais de M em p são iguais. Mostre que M tem curvatura constante.

2. Seja G um grupo de Lie equipado com uma métrica Riemanniana bi-invariante.

   a. Mostre que $\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \frac{1}{4}\langle [X,Y],[Z,W]\rangle$ para X, Y, Z, $W \in \mathfrak{g}$. Conclua que as curvaturas seccionais são não-negativas.

   b. Calcule $\mathrm{Ric}(X,X)$. Mostre que a curvatura de Ricci é positiva se e somente se o centro de $\mathfrak{g}$ é trivial.

3. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. Mostre que:

   a. se M tem curvatura seccional constante k, então $\mathrm{Ric} = (n-1)kg$ e $s = n(n-1)k$.

   b. Se $\bar{g} = tg$ para $t > 0$, então $\bar{R} = tR$, $\bar{K}(P) = t^{-1}K(P)$ (P um 2-plano tangente), $\overline{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric}$ e $\bar{s} = t^{-1}s$.

4. Mostre que, no caso de uma variedade Riemanniana de dimensão três, o tensor de Ricci determina o tensor de curvatura.

5. Sejam M uma variedade Riemanniana completa, N uma subvariedade fechada de M, e $p \in M \setminus N$. Mostre que existe $q \in N$ e uma geodésica γ unindo p a q que realiza a distância de p a N. Mostre que, além disso, γ'e perpendicular a N em q.

6. Prove que toda variedade Riemanniana compacta de dimensão ímpar com curvatura seccional positiva é orientável. (Sugestão: use um argumento análogo ao da demonstração do Teorema de Synge.)

7. Sejam f, $g : M \to N$ duas isometrias locais entre variedades Riemannianas onde M é conexa. Suponha que existe $p \in M$ tal que $f(p) = g(p) = q \in N$ e $df_p = dg_p : T_pM \to T_qN$. Mostre que $f = g$.

8. Seja M uma variedade Riemanniana. Mostre que se o transporte paralelo entre dois pontos de M não depende da curva que une p a q, então M tem curvatura nula.