MAT5851 – Geometria Riemanniana
Lista de exercícios 3 – 09/05/2006

1. Seja G um grupo de Lie.

   a. Mostre que ter uma métrica Riemanniana bi-invariante em G é equivalente a ter um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Ad-invariante em $T_1G = \mathfrak{g}$, i.e. tal que $\langle \mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y\rangle = \langle X, Y\rangle$ para todos X, $Y \in \mathfrak{g}$. Mostre ainda que essa condição implica a condição $\langle [X,Y], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle = 0$ para todos X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$, e que elas são equivalentes no caso em que G é conexo.

   b. Mostre que todo grupo de Lie compacto admite uma métrica bi-invariante (sugestão: use uma integral de Haar bi-invariante como em (4.12) do livro de Warner).

   Nos próximos três ítens, suponha que G está equipado com uma métrica bi-invariante.

   c. Se X, $Y \in \mathfrak{g}$, mostre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

   d. Prove que as geodésicas de G são as curvas integrais dos campos invariantes à esquerda de G, e que as exponenciais no grupo e na variedade Riemanniana coincidem.

   e. Mostre que a exponencial de G é sobrejetora.

   f. Mostre que não existe métrica bi-invariante em $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$.

2. Seja
$$H^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad x,\, y,\, z \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

   a. Mostre que H^3 é um grupo de Lie (é o chamado *grupo de Heisenberg*).

   b. Mostre que $A = \frac{\partial}{\partial x}$, $B = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$, $C = \frac{\partial}{\partial z}$ são campos de vetores invariantes à esquerda. Calcule os colchetes entre esses campos.

   c. Declare $\{A, B, C\}$ ortonormal. A métrica invariante à esquerda correspondente g é bi-invariante?

   d. Calcule a conexão de Levi-Cività, a equação das geodésicas, e as geodésicas explicitamente. São elas os translados dos subgrupos a um parâmetro?

   e. Seja Z o subconjunto de H^3 definido por $x = y = 0$. Mostre que Z é um subgrupo normal de H^3, e que H^3/Z é isomorfo como grupo de Lie a $\mathbf{R}^2$. Mostre que existe uma submersão Riemanniana $\pi : (H^3, g) \to (\mathbf{R}^2, \mathrm{can})$ com fibras totalmente geodésicas. Quais são as geodésicas horizontais?

3. Seja $\pi : \tilde{M} \to M$ uma submersão Riemanniana.

   a. Seja $\tilde{\gamma}$ uma geodésica de $\tilde{M}$. Mostre que se o vetor $\tilde{\gamma}'(0)$ é horizontal, então $\gamma'(t)$ é horizontal para todo t, e a curva $\pi \circ \tilde{\gamma}$ é uma geodésica de M de mesmo comprimento do que $\tilde{\gamma}$.

   b. Seja $\tilde{p} \in M$, e seja γ uma geodésica em M com $\gamma(0) = \pi(\tilde{p})$. Mostre que existe um único levantamento horizontal $\tilde{\gamma}$ de γ, e que $\tilde{\gamma}$ é, além disso, uma geodésica de $\tilde{M}$.

   c. Mostre que se $\tilde{M}$ é completa, então M também é completa. O que se pode dizer sobre a recíproca?

4. Uma geodésica $\gamma : [0, +\infty) \to M$ em uma variedade Riemanniana M é chamada de *raio* se ela minimiza a distância entre $\gamma(0)$ e $\gamma(s)$ para todo $s > 0$. Mostre que se M é completa e não-compacta, então dado $p \in M$, existe um raio $\gamma : [0, +\infty) \to M$ com $\gamma(0) = p$.

5. Seja M uma variedade diferenciável onde qualquer métrica Riemanniana é completa. Mostre que M é compacta (sugestão: use o exercício anterior).

6. Uma variedade Riemanniana M é chamada de homogênea se dados p, $q \in M$, existe uma isometria g de M tal que $gp = q$. Mostre que uma variedade Riemanniana homogênea é completa.