MAT5851 – Geometria Riemanniana
Lista de exercícios 2 – 19/04/2004

1. Sejam g e $\tilde{g}$ duas métricas Riemannianas em M tais que $\tilde{g} = f^2 g$, onde f é uma função diferenciável em M que nunca se anula. Relacione as conexões de Levi-Cività ∇ e $\tilde{\nabla}$ de g e $\tilde{g}$.

2. Considere as imersões $S^1 \times S^1 \to \mathbf{R}^3$ e $S^1 \times S^1 \to \mathbf{R}^4$ do toro:

$$\begin{aligned} (\theta, \varphi) &\mapsto ((2+\cos\theta)\cos\varphi, (2+\cos\theta)\sin\varphi, \sin\theta) \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (\cos\theta, \sin\theta, \cos\varphi, \sin\varphi) \end{aligned}$$

Compare $[\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}]$ e $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta}} \frac{\partial}{\partial\varphi}$ nos dois casos.

3. Seja $P = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}$, $g_z = \frac{dx^2+dy^2}{(\Im z)^2}$.

a. Calcule Γ_{ij}^k e escreva a equação das geodésicas.

b. Note que $\gamma : t \mapsto (x_0, e^{at})$ são geodésicas.

c. Mostre que $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ age transitivamente em P pondo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d},$$

onde a, b, c, $d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$, $z \in P$.

d. Mostre que o subgrupo de isotropia em i (formado pelos elementos de $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ que fixam i) é $\mathbf{SO}(2)$.

e. Mostre que a ação de $\mathbf{SO}(2)$ em T_iP é dada por

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto \text{rotação de ângulo } 2\theta.$$

f. Conclua que $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ age transitivamente no fibrado tangente unitário de P e que, portanto, as geodésicas de P são as retas e os círculos perpendiculares a $y = 0$, parametrizados com velocidade constante.

4. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n. Dado $p \in M$, mostre que existem uma vizinhança U de p, e n campos de vetores $E_1, \ldots, E_n$ em U que são ortonormais em cada ponto de U e tais que $(\nabla_{E_i} E_j)_p = 0$ para todos i, j.